

Т. М. Бусарова, Т. С. Гришечкіна,
О. В. Звонарєва, Г. І. Семенець

ВИЩА МАТЕМАТИКА. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ: Вивчення та візуалізація в **Maple**

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ НАУКИ І ТЕХНОЛОГІЙ

Т. М. Бусарова, Т. С. Гришечкіна,
О. В. Звонарьова, Г. І. Семенець

Вища математика. Функції багатьох змінних:
Вивчення та візуалізація в Maple

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ДНІПРО
2025

УДК 517.5:004.42(075.8)

В 95

Авторський колектив:

Бусарова Т. М., Гришечкіна Т. С., Звонарьова О. В., Семенець Г. І.

Рекомендовано Радою якості освітньої діяльності
УДУНТ (Протокол № 2 від 21.10.2025)

В 95 Вища математика. Функції багатьох змінних: Вивчення та візуалізація в Maple : навч. посіб. / Т. М. Бусарова, Т. С. Гришечкіна, О. В. Звонарьова, Г. І. Семенець ; Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Електрон. вид. – Дніпро : УДУНТ, 2025. – 134 с.

ISBN 978-617-8314-76-7 (PDF)

Посібник містить основний теоретичний матеріал розділу «Функції багатьох змінних», велику кількість розв'язаних прикладів, розв'язані задачі з візуалізацією у Maple, приклади для самостійного розв'язання, варіанти індивідуальних завдань, а також приклади тестових завдань з наведеними відповідями.

Для студентів першого курсу інженерно-технічних спеціальностей.

Іл. 67. Бібліогр.: 6 назв.

УДК 517.5:004.42(075.8)



Цей твір ліцензовано на умовах Ліцензії Creative Commons
[«Attribution-NonCommercial-ShareAlike» 4.0 International \(CC BY-NC-SA 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)
(«Із зазначенням авторства – Некомерційна – Поширення на тих самих умовах» 4.0 Міжнародна)

ISBN 978-617-8314-76-7 (PDF)
DOI 10.15802/978-617-8314-76-7

© Бусарова Т. М., Гришечкіна Т. С., Звонарьова О. В.,
Семенець Г. І., 2025
© Укр. держ. ун-т науки і технологій, 2025

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
1. Основні поняття.....	7
1.1 Означення функції двох змінних, область її визначення.....	7
1.2. Означення функції багатьох змінних, область її визначення.....	10
1.3. Лінії та поверхні рівня	10
Розв'язання прикладів	11
1.4 Границя функції багатьох змінних	14
1.5 Неперервність функції багатьох змінних	16
Розв'язання прикладів	17
Приклади для аудиторної роботи.....	17
Приклади для самостійного розв'язання.....	18
2. Частинні похідні першого порядку.....	19
2.1. Частинні прирости і повний приріст функції багатьох змінних	19
2.2. Частинні похідні першого порядку функцій багатьох змінних	19
Розв'язання прикладів	23
2.3 Повний диференціал функції багатьох змінних	28
Приклади для аудиторної роботи.....	30
Приклади для самостійної роботи	30
3. Частинні похідні вищих порядків	32
Розв'язання прикладів	33
Приклади для аудиторної роботи.....	34
Приклади для самостійної роботи	35
4. Диференціювання неявно заданих функцій.....	36
5. Складні функції та їх диференціювання	38
Розв'язання прикладів	40
Приклади для аудиторної роботи.....	43
Приклади для самостійної роботи	43
5. Екстремум функції двох змінних (локальний максимум і мінімум функції).....	44
6. Найбільше і найменше значення функції двох змінних в замкненій області (глобальний максимум і мінімум функції).....	48
Розв'язання прикладів	51
Приклади для аудиторної роботи.....	59
Приклади для самостійної роботи	59
7. Умовний екстремум функції двох змінних.....	60
8. Дотична площина і нормаль до поверхні	64
Розв'язання прикладів	65
Приклади для аудиторної роботи.....	67
Приклади для самостійної роботи	67
9. Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт	68
9.1 Скалярне поле	68
9.2 Похідна за напрямом	69
9.3 Градієнт	71
Розв'язання прикладів	72
Приклади для аудиторної роботи.....	76

Приклади для самостійної роботи	76
10. Розв’язання задач у Maple.....	77
Приклади тестів	97
Теоретичні питання	97
Практичні питання.....	99
Варіанти індивідуальних завдань	103
Варіанти індивідуальних завдань у Maple	115
Список літературних джерел.....	132

ВСТУП

Функції багатьох змінних займають важливе місце в математичному аналізі. Вони дозволяють описувати складні взаємозв'язки між величинами у багатовимірних просторах, тому широко використовуються в різних областях науки і техніки від фізики і інженерії до економіки і біоінформатики.

На відміну від функцій однієї змінної, функції багатьох змінних описують процеси, які залежать від двох і більше параметрів. Наступні приклади покликані це продемонструвати.

Приклад з математики. Площа прямокутника S дорівнює добутку довжин його сторін x і y . Тобто $S = xy$. При зміні довжин сторін змінюється і площа прямокутника. Отже площа залежить від двох змінних – довжин сторін прямокутника.

Приклад з фізики. Відома формула Клапейрона: $pV = RT$. Якщо V (об'єм) і T (температура) – незалежні змінні, то функцію p (тиск) можна записати таким чином: $p = R \frac{T}{V}$, (тут R – константа). Отже тиск залежить від об'єму і температури (тобто є функцією двох змінних), $p = f(T, V)$. Або $T = \frac{p \cdot V}{R}$. Тут T – функція, а p і V – незалежні змінні, $T = f(p, V)$.

Приклад з економіки. Якщо позначити кількість одиниць випущеної продукції через Π , кількість одиниць праці через x , а суму капіталу, вкладеного у виробничий план, через K , то Π буде функцією двох змінних x і K , тобто $\Pi = f(x, K)$.

Ще один приклад з фізики: шлях S , який проходить вільно падаюче тіло за час t , залежить від:

t – часу падіння;

h – висоти над рівнем моря;

p – тиску повітря;

T – температури повітря;

s – площі поперечного перерізу тіла і т. д.

У першому наближенні змінна t – найважливіша. Якщо ігнорувати решту змінних, то одержимо функцію однієї змінної $S = f(t) \Rightarrow S = \frac{gt^2}{2}$. Якщо врахувати всі перелічені змінні, то одержимо більш точний результат: $S = f(t, h, p, T, s)$ – функцію п'ятьох змінних.

Для того, щоб вивчити такі залежності та користуватися ними, вводиться поняття функції багатьох змінних.

Математичні методи, які пов'язані з аналізом таких функцій, дозволяють вирішувати задачі оптимізації, прогнозування, оцінки поведінки систем і моделювання складних об'єктів.

Актуальність вивчення цієї теми обумовлена необхідністю підготовки спеціалістів, які здатні застосовувати методи багатовимірного аналізу при

розв'язанні прикладних завдань. В сучасному світі особливо важлива інтеграція теоретичних знань з цифровими інструментами. Одним із таких потужних засобів є система комп'ютерної алгебри Maple, яка дозволяє не тільки автоматизувати обчислення, але і наочно візуалізувати поведінку функцій, аналізувати екстремуми, обчислювати похідні та будувати 2-D і 3-D графіки.

Помітимо, що між функціями однієї змінної і багатьох змінних багато спільного. Тобто попередній вивчений матеріал щодо функції однієї змінної буде здобувачу вищої освіти в нагоді.

Далі, слід зазначити, що теоретичний і практичний матеріали щодо функцій двох і більше змінних має багато спільного. Тому, в подальшому, ми будемо розглядати теми цього розділу на прикладі функцій двох змінних, а потім вже поширювати розглянуте на функції трьох і більше змінних.

Посібник спрямований на те, щоб допомогти здобувачам освіти оволодіти як класичним апаратом аналізу функцій багатьох змінних, так і сучасними цифровими засобами їх дослідження.

Оволодіння цим матеріалом формує основу для вивчення таких дисциплін, як математичне моделювання, теорія оптимізації, економіка, логістика, а також для підготовки до наукової роботи.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

1.1 Означення функції двох змінних, область її визначення.

Розглянемо множину D пар чисел (x, y) , яка задана на площині $ХОУ$.

Означення. Якщо кожній парі **незалежних одна від одної** змінних x і y із області D можна поставити у відповідність за деяким законом одне значення змінної z , то кажуть, що z – **функція двох змінних** x і y .

Цю функціональну залежність позначають так: $z = f(x, y)$ (або, наприклад, $z = z(x, y)$).

Змінні x і y (незалежні і рівноправні) називають **аргументами**.

Змінну z , залежну від x і y називають **функцією**.

Формула $z = \pi x^2 y$ задає об'єм циліндра z як функцію двох змінних: x – радіуса основи циліндра і y – висоти циліндра.

Якщо задані конкретні значення аргументів $x = x_0$, $y = y_0$, то $z = f(x_0, y_0)$, це **числове значення** функції $z = f(x, y)$, яке вона приймає коли $x = x_0$, $y = y_0$. Його ще називають **частинним значенням** функції.

Означення. Сукупність пар чисел (x, y) , для яких функція $z = f(x, y)$ існує називається **областю визначення функції** $z = f(x, y)$. За нашим означенням – це область (множина) D .

Можна інакше сформулювати це означення.

Означення. Сукупність усіх точок (x, y) , при яких заданий аналітичний вираз приймає певні дійсні значення називається **областю визначення функції** $z = f(x, y)$.

Нагадаємо, що для функції однієї змінної $y = f(x)$ область визначення функції є деякий проміжок (скінчений, або нескінчений) осі $ОХ$.

У випадку функції двох змінних **область визначення** – це **частина площини, або вся площина $ХОУ$** .

Наприклад: 1) $z = x^2 + y^2$ – функція визначена на всій площині. Тобто, які б пари чисел (x, y) ми не вибирали, все одно функцію z можна обчислити.

2) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ – функція визначена (тобто набуває дійсних значень) в усіх точках (x, y) , які задовольняють нерівність $x^2 + y^2 \leq 4$, тобто область визначення – це коло з центром, який співпадає з початком координат і радіусом $R = 2$.

3) $z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$ – функція визначена для усіх точок (x, y) , які задовольняють нерівність $x^2 + y^2 < 4$, область визначення – це коло з центром, який співпадає з початком координат і радіусом $R = 2$.

Розберемося, чим відрізняються області визначення у другому і третьому прикладах.

Лінію, що обмежує область D , називають **межею** області визначення. Точки області D , що не лежать на її межі, називають **внутрішніми** точками. Область D , яка містить тільки внутрішні точки, називається **відкритою**. Якщо до області належать і точки межі, то D називається **замкненою**.

Отже, у другому прикладі область D замкнена, а у третьому – відкрита.

Слід зазначити, що крім функції $z = f(x, y)$ з областю визначення розташованої у площині $ХОУ$, розглядаються функції $x = f(y, z)$ (тут аргументи y і z , а функція x . Область визначення лежить у площині YOZ) і $y = f(x, z)$ (тут аргументи x і z , а функція y . Область визначення лежить у площині XOZ). Але в подальшому ми будемо зазвичай розглядати функції виду $z = f(x, y)$.

Тепер перейдемо до зображення самої функції $z = f(x, y)$ (Якщо згадати функцію однієї змінної $y = f(x)$, то її графічне зображення – це **лінія** у площині $ХОУ$). Кожна пара значень аргументів (x, y) геометрично визначає точку на площині $ХОУ$, а значення функції в цій точці є апліката z просторової точки $M(x, y, z)$. Геометричне місце усіх точок $M(x, y, z)$ – є **поверхня**, яка взаємно однозначно проєктується у область D на площині $ХОУ$. Ця поверхня і є **геометричним зображенням** функції $z = f(x, y)$ (рис.1).

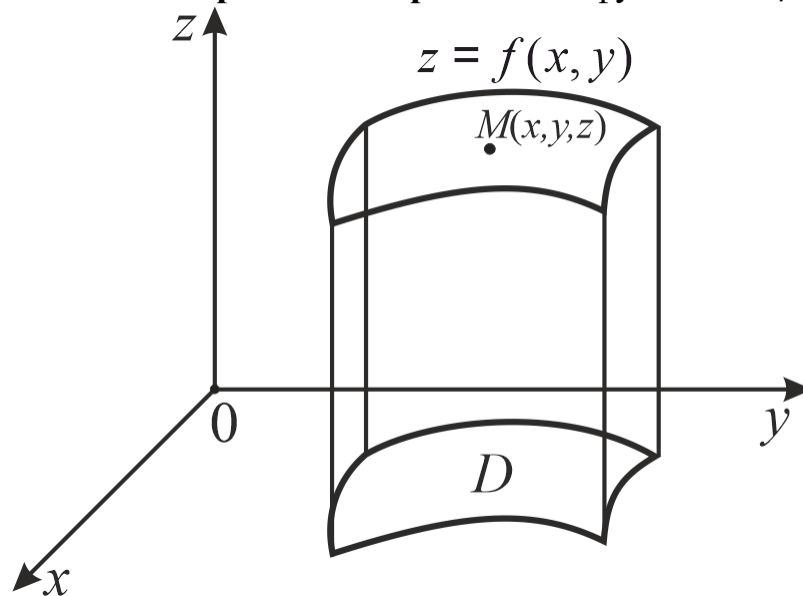


Рисунок 1.

Розглянемо ще два зображення функцій двох змінних (про них ішла мова вище).

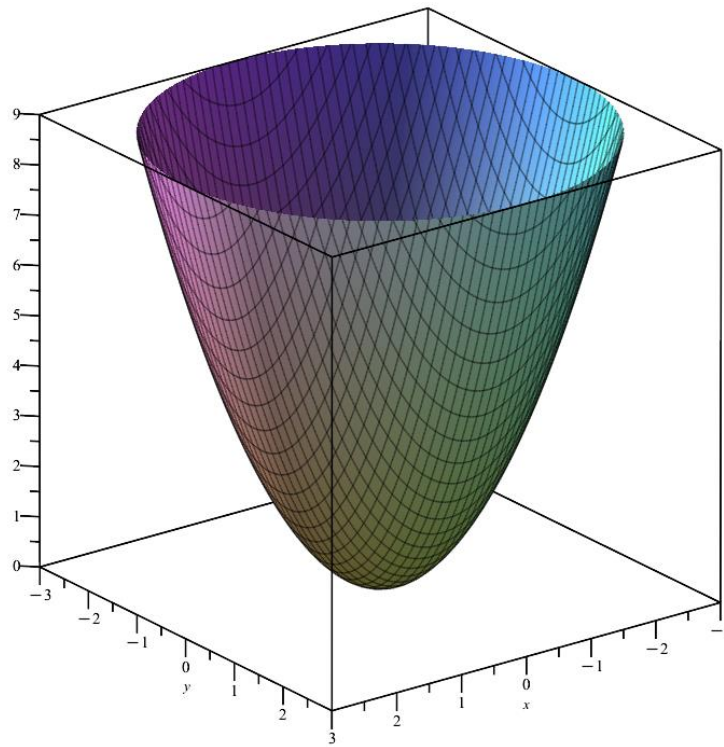


Рисунок 2. $z = x^2 + y^2$ – параболоїд обертання

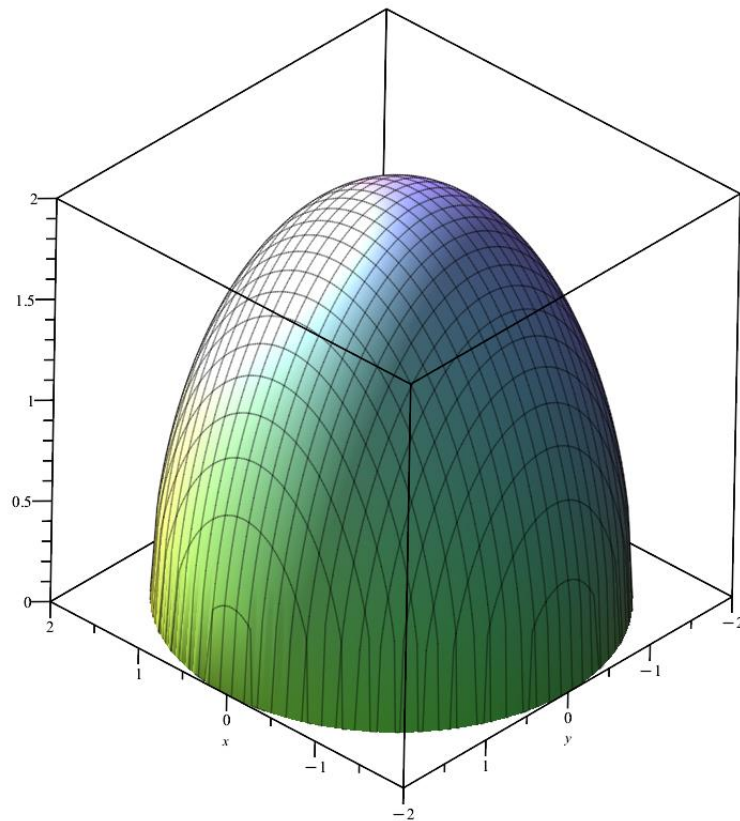


Рисунок 3. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ – півсфера

Слід зазначити, що графічно можна зобразити тільки функції двох змінних. Для функцій трьох і більше змінних геометричне зображення відсутнє.

1.2. Означення функції багатьох змінних, область її визначення.

Означення. Змінна u називається **функцією багатьох змінних** $x_1, x_2, \dots, x_n$, якщо кожній сукупності значень цих змінних відповідає певне значення u . Цю функціональну залежність позначають так: $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$, **незалежні і рівноправні**, називають **аргументами**. Змінну u , залежну від $x_1, x_2, \dots, x_n$ називають **функцією**.

Означення. Сукупність усіх значень незалежних змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, при яких функція u набуває певних дійсних значень, називається **областю визначення функції** $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ існує геометричне зображення області визначення.

Наприклад: $u = \sqrt{100 - x^2 - y^2 - z^2}$. Тут підкореневий вираз не може бути від'ємним. Тобто $100 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$. Остання нерівність означає, що область визначення функції $u = \sqrt{100 - x^2 - y^2 - z^2}$ є куля зі своєю межею (тобто замкнена область) з центром у точці $O(0,0,0)$ і радіусом $R=10$. Ще раз підкреслимо, що мова йде про область визначення цієї функції. А геометричного зображення самої функції не існує. Для функцій чотирьох і більше змінних область визначення взагалі побудувати не можливо.

1.3. Лінії та поверхні рівня

Розглянемо функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Нагадаємо, що її геометричне зображення – це деяка поверхня, різні точки якої віддалені від площини $ХОУ$ на різну відстань, а область визначення – це частина, або вся площина $ХОУ$. Будемо надавати функції z різних сталих значень C_1, C_2 , тобто: $z = C_1, z = C_2 \dots$. Тоді в площині $ХОУ$ одержимо низку ліній: $f(x, y) = C_1, f(x, y) = C_2, \dots$. Такі лінії будемо називати **лініями рівня** функції двох змінних. Отже рівняння виду $f(x, y) = C$ (C – стала) називається **лінією рівня** функції $z = f(x, y)$ (рис.4).

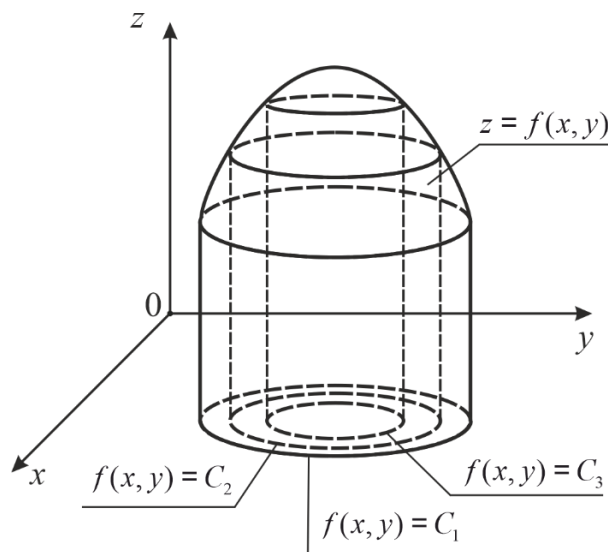


Рисунок 4. Лінії рівня функції $z = f(x, y)$

Через кожну точку площини проходить лише одна лінія рівня, причому вони між собою не перетинаються. До речі, прикладами ліній рівня є ізотерми (в метеорології це лінії, які з'єднують точки з однаковою температурою повітря, води, ґрунту, або поверхні землі), та ізобари (в метеорології це лінії, що з'єднують точки з однаковим значенням атмосферного тиску).

Розглянемо на прикладі це означення: нехай $z = xy$. Тоді рівняння ліній рівня будуть мати вигляд: $x \cdot y = C$ або $y = \frac{C}{x}$ (рис.5).

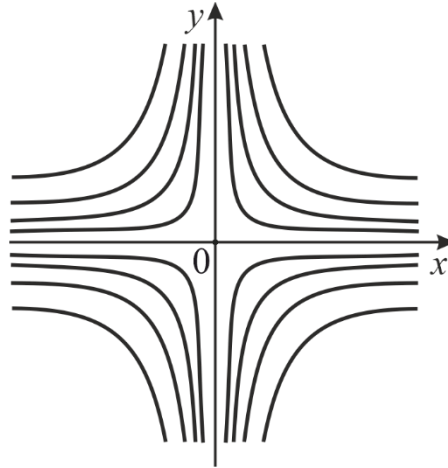


Рисунок 5. Лінії рівня функції $z = xy$

Для функцій трьох змінних $u = f(x, y, z)$ вводять поняття **поверхні рівня**. Отже рівняння виду $f(x, y, z) = C$ (C – стала) називається **поверхнею рівня** функції трьох змінних.

Питання для самоперевірки

1. Яка функція називається функцією двох змінних?
2. Як називають незалежні і рівноправні змінні x і y ?
3. Що є областю визначення функції двох змінних?
4. Яке зображення (взагалі) має область визначення функції двох змінних?
5. Що таке відкрита (замкнена) область?
6. Яке зображення (взагалі) має функція двох змінних?
7. Чи існує зображення функції трьох змінних?
8. Як записуються лінії рівня функції $z = f(x, y)$?
9. Як називають рівняння виду $f(x, y, z) = C$ (C – стала)?

Розв'язання прикладів

Приклад 1. Задана функція $z = \frac{2xy}{x - 4y + 1}$. Знайти значення функції в точці $M(6, 1)$.

Розв'язання.

Маємо функцію двох змінних. Підставимо координати точки M в функцію z : $z(M) = z(6,1) = \frac{12}{3} = 4$.

Приклад 2. Задана функція $u = \frac{2x^2 - y}{4 + \ln z}$. Знайти значення функції в точці $M(2, -3, 1)$.

Розв'язання.

Маємо функцію трьох змінних. Підставимо координати точки M в функцію u : $u(M) = u(2, -3, 1) = \frac{11}{4}$, нагадаємо, що $\ln 1 = 0$.

Приклад 3. Знайти область визначення функцій:

$$1) z = \sqrt{xy}; 2) z = \ln(x^2 - y); 3) z = \sqrt{y - x}; 4) u = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}, \quad z > 0.$$

Розв'язання.

1) $z = \sqrt{xy}$. Нагадаємо, що область визначення функції двох змінних x і y – це множина пар (x, y) , для яких можна обчислити функцію z . Отже, згадаємо, що підкореневий вираз не може бути від'ємним, тобто $xy \geq 0$. А тут можливі два варіанта: $\{x \geq 0, y \geq 0\}$. або $\{x \leq 0, y \leq 0\}$. Перший варіант – це перший квадрант разом із осями координат. Другий варіант – це третій квадрант разом із осями координат. Тоді область визначення функції – множина точок у першому і третьому квадрантах разом із осями координат. Дивимось рис. 6.

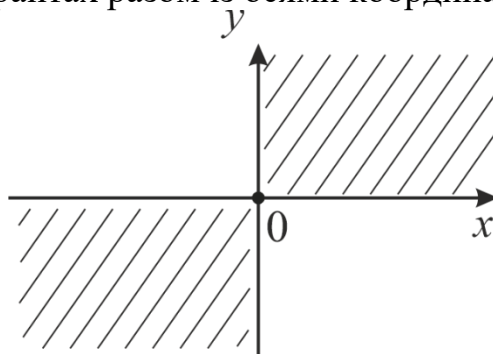


Рисунок 6.

2) $z = \ln(x^2 - y)$. Аргумент логарифмічної функції завжди додатний, тому: $x^2 - y > 0 \Rightarrow y < x^2$. Лінія $y = x^2$ – парабола (точки цієї лінії не належать області визначення функції). Дивимось рис. 7.

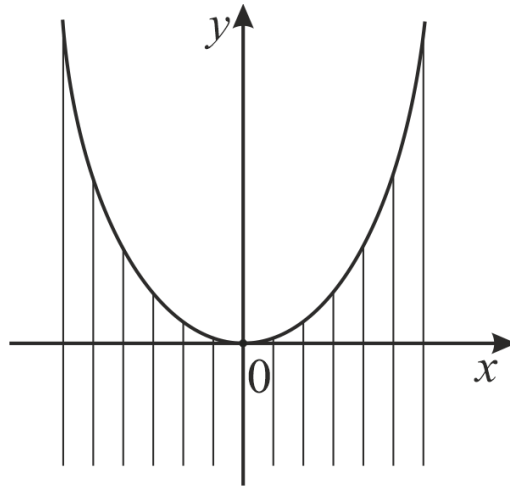


Рисунок 7.

3) $z = \sqrt{y-x}$. Як і в першому прикладі, підкореневий вираз невід'ємний: $y-x \geq 0 \Rightarrow y \geq x$. Лінія $y=x$ – пряма, яка проходить через початок координат (бісектриса першого і третього координатних кутів). Точки прямої належать області визначення функції. Дивимось рис. 8.

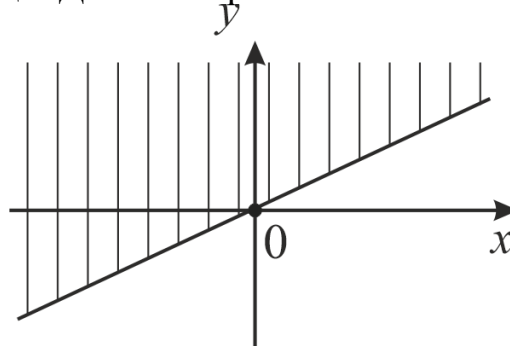


Рисунок 8.

4) $u = \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}}$. У перших трьох прикладах ми знаходили область визначення функцій двох змінних. Тут ми маємо функцію трьох змінних. Підкореневий вираз додатний, тобто: $9-x^2-y^2-z^2 > 0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 < 9$. Отже, область визначення функції це півкуля з центром на початку координат і радіусом $R=3$ (область відкрита). Дивимось рис. 9.

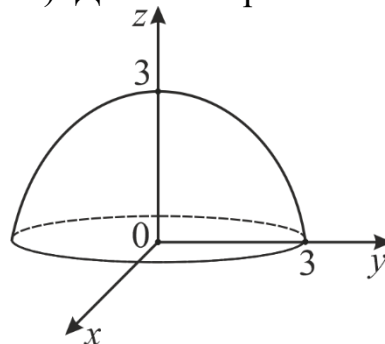


Рисунок 9.

Приклад 4. Знайти лінії рівня функції $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$, коли $C=1$, $C=4$, $C=16$.

Побудувати їх.

Розв'язання.

Лінії рівня цієї функції записують в загальному виді так: $C = \frac{1}{x^2 + y^2}$ Тут C – довільна стала.

Нехай $C=1$. Тоді $1 = \frac{1}{x^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ – маємо коло з центром на початку координат і радіусом $R=1$.

Аналогічно: $C=4$, тоді $4 = \frac{1}{x^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ – маємо коло з центром на початку координат і радіусом $R=\frac{1}{2}$.

$C=16$, тоді $16 = \frac{1}{x^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{16}$ – маємо коло з центром на початку координат і радіусом $R=\frac{1}{4}$. Дивимось рис.10.

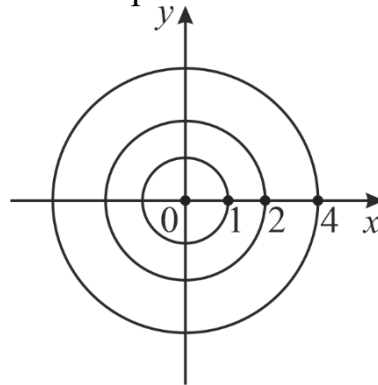


Рисунок 10.

1.4 Границя функції багатьох змінних

Почнемо з означення границі функції двох змінних.

Спочатку нагадаємо формулу відстані між двома точками $M(x, y)$ і $M_0(x_0, y_0)$: $d_{MM_0} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Якщо $d_{MM_0} < \delta$, де δ – деяке додатне число, то кажуть, що точка M міститься у δ -околі точки M_0 (тобто δ -окіл точки M_0 – це коло з центром в точці M_0 і радіусом δ , причому межі кола не враховуються, область відкрита).

Означення. Число A називається **границею функції** $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує додатне число δ (яке залежить від ε), що для **всіх** точок $M(x, y)$ із δ -околу точки $M_0(x_0, y_0)$ буде виконуватись нерівність:

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon, \text{ або рівність } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

Аналогічно можна сформулювати означення границі функції n змінних. Для спрощення, замість $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будемо писати $u = f(M)$, де

$M(x_1, x_2, \dots, x_n)$. δ -окіл точки $M_0 = M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ буде обчислюватись за формулою:

$$d_{MM_0} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2}.$$

Означення. Число A називається **границею функції** $u = f(M)$ в точці M_0 , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує δ (яке залежить від ε), що для **всіх** точок M із δ -околу точки M_0 виконується нерівність $|f(M) - A| < \varepsilon$, або рівність $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A$.

Більшість теорем про границі для функції однієї змінної аналогічні і для функцій багатьох змінних. Наведемо основні теореми:

Теорема 1. Нехай функції $f(M)$ і $\varphi(M)$ визначені на множині D і $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A$, $\lim_{M \rightarrow M_0} \varphi(M) = B$. A і B числа. Тоді:

- 1) $\lim_{M \rightarrow M_0} [f(M) \pm \varphi(M)] = A \pm B$.
- 2) $\lim_{M \rightarrow M_0} [f(M) \cdot \varphi(M)] = A \cdot B$.
- 3) $\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M)}{\varphi(M)} = \frac{A}{B}$, якщо $B \neq 0$.

Теорема 2. Якщо функція $u = f(M)$ має границю в точці M_0 , то ця границя єдина.

Означення. Область, усі точки M якої задовольняють нерівність $d(M, M_0) < R$, де $R > 0$ і M_0 – деяка точка області називається **обмеженою** областю.

Геометрично обмеженість області у двовимірному просторі означає, що її можна повністю помістити всередині круга з центром у точці M_0 і радіусом R .

Теорема 3. Якщо $f(M) \rightarrow A$, (тут A – деяке число), коли $M \rightarrow M_0$, то існує окіл точки M_0 , в якому функція $u = f(M)$ обмежена.

Але існує між границями функцій однієї змінної і багатьох змінних відмінність. Розглянемо функцію однієї змінної $y = f(x)$. Нехай $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. Це означає, що обидві односторонні границі $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ і $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ дорівнюють A .

Вірно і обернене твердження. І, головне, незалежна змінна x прямує до граничної точки x_0 по осі OX . Тепер розглянемо функцію багатьох змінних, для спрощення нехай $n=2$. Коли $f(x, y) \rightarrow A$, то точка $M(x, y)$ може наближатися до точки $M_0(x_0, y_0)$ нескінченною кількістю шляхів. Тому, щоб показати, що функція двох змінних у точці $M_0(x_0, y_0)$ не має границі, досить вказати два шляхи прямування точки $M(x, y)$ до точки $M_0(x_0, y_0)$, при яких будуть одержані різні границі (див. теорему 2).

Приклад. Довести, що функція $f(x, y) = \frac{\sin 2x}{y}$ не має границі при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$.

Розв'язання.

Нехай точка $M(x, y)$ прямує до точки $M_0(x_0, y_0)$ по прямій $y = x$. Тоді $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin 2x}{y} = \{y = x\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \{\text{застосуємо формулу } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1\} = 2$, а якщо по прямій $y = -x$, то $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin 2x}{y} = \{y = -x\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{-x} = -2$.

Це означає, що функція $f(x, y) = \frac{\sin 2x}{y}$ у точці $(0, 0)$ не має границі.

Приклад. Знайти границю функції $z = \frac{3\sin(x+4y)}{x+4y}$, коли $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$.

Розв'язання.

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3\sin(x+4y)}{x+4y} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \{\text{нехай } x+4y = t. \text{ Якщо } x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, \text{ тоді і } t \rightarrow 0\} =$
 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{3\sin t}{t} = \{\text{застосуємо формулу } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1\} = 3$.

1.5 Неперервність функції багатьох змінних

Означення. Функція $u = f(M)$ називається **неперервною в точці** M_0 , якщо:

1. функція $u = f(M)$ визначена в цій точці та її околі;
2. існує границя $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$;
3. ця границя дорівнює значенню функції в точці M_0 : $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$ (незалежно від способу прямування точки M до точки M_0).

При виконанні цих умов, точка M_0 називається **точкою неперервності**.

Точки, в яких хоча б одна з умов неперервності не виконується називаються **точками розриву** функції.

Функція $u = f(M)$ називається **неперервною в області** D , якщо в кожній точці області функція неперервна.

Нагадаємо, що область разом з її межею називається **замкненою** областю.

Сформулюємо основні **властивості неперервних функцій**.

1. Області визначення і неперервності функції співпадають.
2. Якщо функція неперервна в замкненій обмеженій області, то функція в цій області буде обмеженою: $|f(M)| < A$.
3. Якщо функція неперервна в замкненій обмеженій області, то функція в цій області буде набувати найбільшого і найменшого значень, тобто $m \leq f(M) \leq N$.

Питання для самоперевірки

1. Що є δ -окіл точки M_0 ?
2. Яке означення має границя функції двох змінних?
3. Яка область називається обмеженою?
4. Яким умовам повинна задовольняти функція $u = f(M)$, щоб бути неперервною в точці M_0 ?
5. Що таке точка розриву функції багатьох змінних?
6. Які основні властивості неперервних функцій?

Розв'язання прикладів

Приклад 1. Обчислити $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\operatorname{tg}(x^2 + y^2)}$.

Розв'язання.

Зробимо заміну: $x^2 + y^2 = t$. Якщо $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$ то і $t \rightarrow 0$. Тоді:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\operatorname{tg}(x^2 + y^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\operatorname{tg} t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t \cdot \cos t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \cos t = 1.$$

Приклад 2. Обчислити $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{4 + x^2 + y^2} - 2}$.

Розв'язання.

Зробимо заміну: $x^2 + y^2 = t \Rightarrow t \rightarrow 0$. Тоді:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{\sqrt{4 + t^2} - 2} \left\{ \text{домножимо чисельник і знаменник на } \sqrt{4 + t^2} + 2 \right\} =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot (\sqrt{4 + t^2} + 2)}{(\sqrt{4 + t^2} - 2) \cdot (\sqrt{4 + t^2} + 2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot (\sqrt{4 + t^2} + 2)}{4 + t^2 - 4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 (\sqrt{4 + t^2} + 2)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} (\sqrt{4 + t^2} + 2) = 4.$$

Приклад 3. Знайти точки розриву функції $z = \frac{1}{x^2 - 4y}$.

Розв'язання.

Нагадаємо, що області визначення і неперервності співпадають. Тому спочатку знайдемо область визначення цієї функції. Тут $x^2 - 4y \neq 0$ або $x^2 \neq 4y$ ($x^2 = 4y$ – рівняння параболи). Отже, область визначення функції – всі дійсні пари чисел (x, y) за виключенням точок (x, y) , які належать параболі. А тепер перейдемо до неперервності. Функція $z = \frac{1}{x^2 - 4y}$ буде неперервна для всіх дійсних пар чисел (x, y) за виключенням точок (x, y) , які належать параболі. Отже точки розриву функції це точки, які належать параболі $x^2 = 4y$.

Приклади для аудиторної роботи

Приклад 1. Задана функція $z = \frac{2xy}{3x + 7y}$. Знайти: $z(1, 3)$; $z(0, 1)$; $z(t, -5)$.

Приклад 2. Задана функція $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}$. Знайти: $u(1, 4, 9)$; $u(-2, 16, 0)$.

Приклад 3. Знайти область визначення функцій: 1) $z = \sqrt{y^2 - 8x}$; 2) $z = \frac{1}{\ln(36 - x^2 - y^2)}$; 3) $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}}$.

Приклад 4. Побудувати лінії рівня для функції $z = x^2 - 2y$ при $C = -2, 0, 2, 4$.

Приклад 5. Обчислити $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{25 + x^2 + y^2} - 5}{x^2 + y^2}$.

Приклад 6. Знайти точки розриву функції $z = 3^{\frac{1}{x^2 + y^2 - 25}}$.

Приклади для самостійного розв'язання

Приклад 1. Задана функція $z = y^2 \cos x$. Знайти: $z(0, 3)$; $z(\frac{\pi}{4}, -2)$; $z(\frac{\pi}{2}, 1)$.

Приклад 2. Задана функція $u = \ln \frac{y}{x} - x^3 + z^2$. Знайти: $u(2, 4, -1)$; $u(3, 3, 2)$; $u(\frac{1}{4}, 1, 0)$.

Приклад 3. Знайти область визначення функцій: 1) $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$; 2) $z = \ln(x^2 + y^2 - 36)$; 3) $z = \frac{1}{\sqrt{x-y}} + \frac{1}{\sqrt{x+y}}$; 4) $u = \sqrt{\ln(1 + z - x^2 - y^2)}$.

Приклад 4. Побудувати лінії рівня для функції $z = \frac{2}{x^2 + y^2}$ при $z = 2, 4, 8, 18$.

Приклад 5. Обчислити $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{\sqrt{2+xy} - \sqrt{2-xy}}$.

Приклад 6. Знайти точки розриву функції $z = \frac{1}{(x-y)^2}$.

Відповіді: **Приклад 1.** $z(0, 3) = 9$; $z(\frac{\pi}{4}, -2) = 2\sqrt{2}$; $z(\frac{\pi}{2}, 1) = 0$. **Приклад 2.** $u(2, 4, -1) = \ln 2 - 7$; $u(3, 3, 2) = -23$; $u(\frac{1}{4}, 1, 0) = \ln 4 - \frac{1}{64}$. **Приклад 3.** 1) Вся площина крім початку координат. 2) Зовнішність кола радіуса 6 з центром на початку координат без межі (тобто відкрита область). 3) $\{y > -x; y < x\} \Leftrightarrow |y| < x$; область, яка обмежена прямими $y = x, y = -x$, причому область відкрита. 4) Область, яка знаходиться всередині параболоїда $z = x^2 + y^2$ разом з границею (замкнена область). **Приклад 5.** $\sqrt{2}$. **Приклад 6.** $y = x$ — лінія розриву функції.

2. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

2.1. Частинні прирости і повний приріст функції багатьох змінних

Розглянемо спочатку випадок функції двох змінних $z = f(x, y)$. Зафіксуємо змінну y , а змінній x надамо приросту Δx і одержимо значення $f(x + \Delta x, y)$. Далі знайдемо різницю між одержаним і початковим значеннями функції. Цю різницю називають **частинним приростом** функції z по змінній x і позначають $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Аналогічно можна одержати і **частинний приріст** функції z по змінній y . Тут все навпаки: фіксуємо змінну x , а приріст надаємо змінній y :

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

А тепер надамо водночас прирости обом аргументам x і y ($\Delta x, \Delta y$), одержимо значення $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ і знайдемо різницю між одержаним і початковим значеннями функції:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Δz називають **повним приростом** функції $z = f(x, y)$.

Помітимо, що сума частинних приростів не завжди дорівнює повному приросту.

Тепер перейдемо до функції n змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Частинні прирости і повний приріст визначаються аналогічно як і для функції двох змінних. Наприклад, **частинний приріст** функції u по змінній x_3 буде мати вигляд:

$$\Delta_{x_3} u = f(x_1, x_2, x_3 + \Delta x, x_4, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n).$$

А повний приріст запишеться таким чином:

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

2.2. Частинні похідні першого порядку функцій багатьох змінних

Ця тема одна з найважливіших в розділі вищої математики «Функції багатьох змінних». Вміння знаходити частинні похідні лежить в основі подальшого засвоєння цього розділу.

Почнемо, як завжди, з функції двох змінних.

Нехай в області D задана функція $z = f(x, y)$. Візьмемо довільну точку $M(x, y)$ в області D і знайдемо значення функції $z = f(x, y)$ в цій точці. Далі знайдемо частинний приріст функції по змінній x . Як він знаходиться дивись у розділі 2.1.

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

Розділимо цей частинний приріст на Δx ($\Delta x \neq 0$). Відношення $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ виражає середню швидкість зміни функції z у напрямку осі OX . Далі перейдемо до границі цього відношення коли $\Delta x \rightarrow 0$.

Означення. Частинною похідною першого порядку по змінній x в точці $M(x, y)$ від функції $z = f(x, y)$ називають границю (якщо вона існує і скінченна) відношення частинного приросту $\Delta_x z$ до приросту Δx , коли Δx прямує до нуля:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Звертаємо вашу увагу на позначення частинної похідної. Крім такого позначення ми будемо користуватися ще і іншими: z'_x , $f'_x(x, y)$, $\frac{\partial f(M)}{\partial x}$.

Фізичичний зміст частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial x}$:

Частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$ обчислює **швидкість зміни функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$ у напрямку осі OX .**

Аналогічне означення можна сформулювати і для змінної y :

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Інші позначення частинної похідної по змінній y : z'_y , $f'_y(x, y)$, $\frac{\partial f(M)}{\partial y}$.

Фізичичний зміст частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial y}$:

Ця частинна похідна обчислює **швидкість зміни функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$ у напрямку осі OY .**

Перш ніж ми почнемо опановувати знаходження частинних похідних першого порядку, **декілька зауважень:**

1. Частинні похідні обчислюються за правилами і формулами диференціювання функцій **однієї** змінної. Тобто таблиця похідних та ж сама (і її потрібно згадати, або комусь і вивчити).

Наведемо таблицю похідних і основні правила диференціювання функцій:

Таблиця похідних

	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
1.	$y = x^\alpha$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}$
	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
	$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
2.	$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
	$y = e^x$	$y' = e^x$
3.	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
4.	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
5.	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
6.	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
7.	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
8.	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9.	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10.	$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
11.	$y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Основні правила диференціювання

1. $y = u \pm v, \quad y' = u' \pm v'$

2. $y = u \cdot v, \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Як наслідок цієї формули: $y = c \cdot u, \quad y' = c \cdot u'$

3. $y = \frac{u}{v}, \quad y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

I, нагадаємо, що похідна сталої дорівнює нулю: тобто, якщо $y = c$, то $y' = 0$.

2. Не можна знайти частинну похідну не вказавши по якій змінній вона обчислюється. Тобто умова: зайти частинну похідну від функції $z = f(x, y)$ **не вказавши по якій змінній** – некоректна.

На початку вивчення теми «Знаходження частинних похідних», зазвичай студенти плутаються в змінних із-за неувважності, або простого незнання правил диференціювання. Може наведені нижче приклади допоможуть уникнути помилок.

Згадаємо функцію однієї змінної. Розглянемо два найпростіших приклади:

1) $y = 3x^2$ і 2). $y = 3 + x^2$. Знайдемо похідні в цих прикладах. Спочатку зазначимо, що в першому прикладі маємо **добуток** числа на функцію, а в другому прикладі **суму** числа і функції. Тоді:

1) $y' = 3 \cdot 2x = 6x$, тут користуємося формулою: якщо $y = c \cdot f(x)$, то $y' = c \cdot f'(x)$. Тобто стала c переноситься із функції у похідну без змін.

2) $y' = 0 + 2x = 2x$. А тут ми користуємося теоремою, що похідна сталої (яка стоїть окремо, тобто не множиться на функцію) дорівнює нулю. Тобто, якщо $y = f(x) + c$, то $y' = f'(x) + 0 = f'(x)$.

Запам'ятайте ці два простих приклади і вони вам допоможуть навчитись вірно знаходити частинні похідні.

Приклад. Задана функція $z = x^4 - 2y^2 + 5x - 7$.

Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Розв'язання.

Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$. Для цього зафіксуємо змінну y (тобто будемо на неї дивитись, як на сталу: $y = c$). Тоді $2y^2$ така ж стала, як і 7.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 0 + 5 - 0 = 4x^3 + 5.$$

Тепер знайдемо $\frac{\partial z}{\partial y}$. Тут навпаки, зафіксуємо змінну x ($x = c$). Тоді x^4 і $5x$ будуть такими ж сталими, як і 7.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 - 2 \cdot 2y + 0 - 0 = -4y.$$

Приклад. Задана функція $z = \sin x \cdot y^5 - 2 \cos y + x$. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Розв'язання.

Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$. Для цього зафіксуємо змінну y (y^5 і $2 \cos y$ – сталі):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \cdot y^5 - 0 + 1 = \cos x \cdot y^5 + 1.$$

Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial y}$. Тут навпаки, зафіксуємо змінну x ($\sin x$ і x – сталі): $\frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cdot 5y^4 + 2 \sin y + 0 = 5y^4 \cdot \sin x + 2 \sin y$.

Тепер розглянемо функцію n змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Як знаходяться частинні похідні в цьому випадку? Виявляється, аналогічно функціям двох змінних. Наприклад, як знайти частинну похідну по змінній x_3 ? Для цього всі аргументи (крім x_3) $x_1, x_2, x_4, \dots, x_n$ фіксуємо і функція u стає функцією однієї змінної x_3 . Означення частинної похідної від функції u по змінній x_3

запишеться у вигляді: $\lim_{\Delta x_3 \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_3} u}{\Delta x_3} = \frac{\partial u}{\partial x_3}$.

Приклад. Задана функція $u = 5e^{3x} + \cos y - z^4 + \ln 2$. Знайти частинні похідні по аргументам x, y, z .

Розв'язання.

Знайдемо $\frac{\partial u}{\partial x}$. Зафіксуємо аргументи y і z . Одержимо функцію однієї змінної x . І, увага! Вираз $\cos y - z^4 + \ln 2$ буде сталою величиною, похідна якої дорівнює нулю: $\frac{\partial u}{\partial x} = 5e^{3x} \cdot 3 = 15e^{3x}$.

Тепер знайдемо $\frac{\partial u}{\partial y}$. Тут вже змінні x і z будуть сталими. Тоді $\frac{\partial u}{\partial y} = -\sin y$. І, нарешті, знайдемо $\frac{\partial u}{\partial z}$. Змінні x і y сталі. Тоді $\frac{\partial u}{\partial z} = -4z^3$.

Питання для самоперевірки

1. Яку різницю називають частинним приростом функції z по змінній x ?
2. Як записують Δz – повний приріст функції $z = f(x, y)$?
3. Яку границю називають частинною похідною першого порядку по змінній x в точці $M(x, y)$ від функції $z = f(x, y)$?
4. Як позначаються частинні похідні функції двох змінних?
5. Яку швидкість обчислює частинна похідна функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$ по змінній y ?

Зауваження. Перш ніж розглядати приклади, ще раз нагадаємо, що дуже важливо оволодіти технікою диференціювання функцій багатьох змінних, бо вміння знаходити частинні похідні - це інструмент за допомогою якого можна розв'язати практично всі задачі цього розділу математики. При знаходженні частинної похідної від функції **будь-якого** числа змінних ми все одно одержуємо функцію **однієї** змінної, від якої і знаходимо похідну. Звідси висновок:

потрібно повторити (або вивчити) таблицю похідних і основні правила диференціювання функції однієї змінної.

Розв'язання прикладів

Розділ 1(найпростіші приклади)

Приклад 1. Задана функція $z = f(x, y)$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$.

- 1) $z = x^3 + 2y^2 - 3x + 10$;
- 2) $z = 5x^4 \cdot y^3 - \sin y + 3^x$;
- 3) $z = \lg 8x \cdot \ln 4y$.

Розв'язання.

1) $z = x^3 + 2y^2 - 3x + 10$. Знайдемо частинну похідну по змінній x , тобто $\frac{\partial z}{\partial x}$ (або z'_x). Фіксуємо змінну y (вважатимемо, що y стала $y = c$, а тому $y' = 0$). Тоді, якщо ми уважно подивимося на умову прикладу, то побачимо, що другий і четвертий доданки сталі, похідна від яких дорівнює нулю. Отже:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left\{ \begin{array}{l} x - \text{змінна} \\ y - \text{стала} \end{array} \right\} = 3x^2 + 0 - 3 + 0 = 3x^2 - 3.$$

Знайдемо частинну похідну по змінній y , тобто $\frac{\partial z}{\partial y}$ (або z'_y). І тепер все навпаки: перший, третій і четвертий доданки будуть сталі:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left\{ \begin{array}{l} x - \text{стала} \\ y - \text{змінна} \end{array} \right\} = 0 + 4y - 0 + 0 = 4y.$$

2) $z = 5x^4 \cdot y^3 - \sin y + 3^x$. Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$ (або z'_x). Спочатку розглянемо вираз $5x^4 \cdot y^3$. Для частинної похідної по змінній x , $5y^3$ буде сталою величиною. Тоді:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left\{ \begin{array}{l} x - \text{змінна} \\ y - \text{стала} \end{array} \right\} = 5y^3 \cdot 4x^3 - 0 + 3^x \ln 3 = 20x^3 \cdot y^3 + 3^x \ln 3.$$

Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial y}$ (або z'_y). Для частинної похідної по змінній y тепер вираз $5x^4$ буде сталою величиною. Тоді:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left\{ \begin{array}{l} x - \text{стала} \\ y - \text{змінна} \end{array} \right\} = 5x^4 \cdot 3y^2 - \cos y + 0 = 15x^4 \cdot y^2 - \cos y.$$

3) $z = \operatorname{tg} 8x \cdot \ln 4y$. Тут ми маємо добуток двох функцій. Але кожна функція залежить від однієї змінної. Тому застосовувати формулу похідної добутку не потрібно.

$$z'_x = \{\ln 4y - \text{стала}\} = \ln 4y \cdot \frac{1}{\cos^2 8x} \cdot 8 = \frac{8 \ln 4y}{\cos^2 8x}.$$

$$z'_y = \{\operatorname{tg} 8x - \text{стала}\} = \operatorname{tg} 8x \cdot \frac{1}{4y} \cdot 4 = \frac{\operatorname{tg} 8x}{y}.$$

Приклад 2. Задана функція $z = f(x, y)$. Знайти z'_x і z'_y .

$$1) z = \frac{x^2}{y};$$

$$2) z = e^{2x^2-3y};$$

$$3) z = \ln(x^6 + 2x \cdot y^3).$$

Розв'язання.

1) $z = \frac{x^2}{y}$. Запишемо задану функцію дещо інакше: $z = x^2 \cdot \frac{1}{y}$. Тоді:

$$z'_x = \left\{ \frac{1}{y} - \text{стала} \right\} = 2x \cdot \frac{1}{y} = \frac{2x}{y}.$$

$$z'_y = \{x^2 - \text{стала}\} = x^2 \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{x^2}{y^2}.$$

2) $z = e^{2x^2-3y}$. Спробуємо не писати в дужках яка змінна стає сталою, зазвичай потрібно ці відомості держати в голові.

$$z'_x = e^{2x^2-3y} \cdot (4x - 0) = 4x \cdot e^{2x^2-3y}.$$

$$z'_y = e^{2x^2-3y} \cdot (0 - 3) = -3 \cdot e^{2x^2-3y}.$$

$$3) z = \ln(x^6 + 2x \cdot y^3).$$

$$z'_x = \frac{1}{x^6 + 2x \cdot y^3} \cdot (6x^5 + 2 \cdot y^3) = \frac{6x^5 + 2y^3}{x^6 + 2xy^3}.$$

$$z'_y = \frac{1}{x^6 + 2x \cdot y^3} \cdot (0 + 2x \cdot 3y^2) = \frac{6xy^2}{x^6 + 2xy^3} = \frac{6y^2}{x^5 + 2y^3}.$$

Приклад 3. Задана функція $u = 4x^3 \cdot y + x^2 \cdot z^4 - \cos 2z + 3$. Знайти частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

Розв'язання.

Маємо функцію u трьох змінних x, y, z . Але методика знаходження частинних похідних тут не змінюється. Якщо ми будемо знаходити частинну похідну по аргументу x , змінні y і z стануть сталими. І ми, увага!, одержимо функцію **однієї** змінної x . Аналогічна методика і для інших двох змінних:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left\{ \begin{array}{l} x - \text{змінна} \\ y - \text{стала} \\ z - \text{стала} \end{array} \right\} = 12x^2 \cdot y + 2x \cdot z^4 - 0 + 0 = 12x^2 y + 2xz^4 = 2x(6x \cdot y + z^4).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left\{ \begin{array}{l} x - \text{стала} \\ y - \text{змінна} \\ z - \text{стала} \end{array} \right\} = 4x^3 + 0 - 0 + 0 = 4x^3.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left\{ \begin{array}{l} x - \text{стала} \\ y - \text{стала} \\ z - \text{змінна} \end{array} \right\} = 0 + x^2 \cdot 4z^3 + \sin 2z \cdot 2 + 0 = 4x^2 z^3 + 2 \sin 2z = 2(2x^2 z^3 + \sin 2z).$$

Приклад 4. Задана функція $z = f(x, y)$. Знайти частинну похідну по вказаній змінній в заданій точці $M_0(x_0, y_0)$.

1) $z = 8x^4 \cdot y^5 + 4y^2, z'_x(M_0), M_0(1, -1);$

2) $z = \operatorname{tg} x \cdot y^3 - x^2, z'_y(M_0), M_0(\frac{\pi}{4}, 2);$

3) $z = e^{2x}(3 - 4y) + x \cdot y^2, z'_x(0, -3).$

Розв'язання.

В цьому прикладі ми спочатку знайдемо вказану частинну похідну, а вже потім підставимо координати заданої точки. В подальшому, якщо деякий доданок частинної похідної буде дорівнювати нулю-цей нуль писати не будемо.

1) $z = 8x^4 \cdot y^5 + 4y^2, z'_x(M_0), M_0(1, -1).$

$$z'_x = 32x^3 \cdot y^5, \quad z'_x(1, -1) = 32 \cdot 1 \cdot (-1) = -32.$$

2) $z = \operatorname{tg} x \cdot y^3 - x^2, z'_y(M_0), M_0(\frac{\pi}{4}, 2).$

$$z'_y = \operatorname{tg} x \cdot 3y^2 = 3 \operatorname{tg} x \cdot y^2, \quad z'_y(\frac{\pi}{4}, 2) = 3 \cdot 1 \cdot 4 = 12.$$

3) $z = e^{2x}(3 - 4y) + x \cdot y^2, z'_x(0, -3).$

$$z'_x = e^{2x} \cdot 2(3 - 4y) + y^2 = 2e^{2x}(3 - 4y) + y^2, \quad z'_x(0, -3) = 2 \cdot 1 \cdot 15 + 9 = 39.$$

Розділ 2

Приклад 1. Задана функція $z = f(x, y)$. Знайти z'_x і z'_y .

1) $z = \sqrt{x} \cdot \sin \frac{x}{y};$

$$2) \quad z = \frac{e^{3x-5y^2}}{y};$$

$$3) \quad z = \ln \frac{x}{y^3-2};$$

$$4) \quad z = y \cdot \arctg \sqrt{x+3y};$$

$$5) \quad z = x^y.$$

Розв'язання.

В цьому розділі приклади дещо складніші.

$$1) \quad z = \sqrt{x} \cdot \sin \frac{x}{y}. \text{ Функція } z \text{ складається із двох множників. Причому,}$$

якщо знаходиться частинна похідна по x , то потрібно користуватися формулою похідної добутку (змінна x присутня і в першому і в другому множниках). Для знаходження частинної похідної по y формула похідної добутку не потрібна (змінна y присутня тільки в другому множнику). Отже знайдемо z'_x . Нагадаємо формулу похідної добутку: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$. І ще

маємо на увазі, що: $\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{y}$, а $\left(\frac{x}{y}\right)'_y = -\frac{x}{y^2}$.

$$z'_x = (\sqrt{x})' \cdot \sin \frac{x}{y} + \sqrt{x} \cdot \left(\sin \frac{x}{y}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin \frac{x}{y} + \sqrt{x} \cdot \cos \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin \frac{x}{y} + \frac{\sqrt{x}}{y} \cdot \cos \frac{x}{y}.$$

$$z'_y = \sqrt{x} \cdot \cos \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x\sqrt{x}}{y^2} \cdot \cos \frac{x}{y}.$$

$$2) \quad z = \frac{e^{3x-5y^2}}{y}. \text{ А в цьому прикладі при знаходженні частинної похідної}$$

по y буде потрібна формула похідної від частки (змінна y присутня і в чисельнику і в знаменнику).

Перш ніж обчислювати частинну похідну по змінній x , запишемо задану функцію інакше: $z = \frac{1}{y} \cdot e^{3x-5y^2}$. Відразу видно, що множник $\frac{1}{y}$ є стала величина.

$$z'_x = \frac{1}{y} \cdot e^{3x-5y^2} \cdot 3 = \frac{3}{y} \cdot e^{3x-5y^2}.$$

Переходимо до знаходження частинної похідної по змінній y . Нагадаємо формулу похідної частки: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

$$z'_y = \frac{e^{3x-5y^2}(-10y) \cdot y - e^{3x-5y^2} \cdot 1}{y^2} = \frac{e^{3x-5y^2} [(-10y^2) - 1]}{y^2} = -e^{3x-5y^2} \frac{10y^2 + 1}{y^2}.$$

$$3) \quad z = \ln \frac{x}{y^3-2}. \text{ Знаходимо частинні похідні:}$$

$$z'_x = \frac{1}{\frac{x}{y^3-2}} \cdot \frac{1}{y^3-2} = \frac{y^3-2}{x} \cdot \frac{1}{y^3-2} = \frac{1}{x}.$$

$$z'_y = \frac{1}{\frac{x}{y^3-2}} \cdot \frac{0 \cdot (y^3-2) - x \cdot 3y^2}{(y^3-2)^2} = \frac{y^3-2}{x} \cdot \frac{-3xy^2}{(y^3-2)^2} = -\frac{3y^2}{y^3-2}.$$

При знаходженні z'_y була застосована формула похідної частки.

4) $z = y \cdot \arctg \sqrt{x+3y}$. При знаходженні z'_y буде застосована формула похідної добутку.

$$z'_x = y \cdot \frac{1}{1+x+3y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+3y}} = \frac{y}{2(1+x+3y)\sqrt{x+3y}}.$$

$$z'_y = 1 \cdot \arctg \sqrt{x+3y} + y \cdot \frac{1}{1+x+3y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+3y}} \cdot 3 = \arctg \sqrt{x+3y} + \frac{3y}{2(1+x+3y)\sqrt{x+3y}}.$$

5) $z = x^y$. З початку зауваження: якщо ми будемо знаходити частинну похідну по аргументу x , то функція $z = x^y$ перетвориться на степеневу функцію $y = x^\alpha$ з похідною $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$; якщо будемо знаходити частинну похідну по аргументу y , то функція $z = x^y$ перетвориться на показникову функцію $y = a^x$ з похідною $y' = a^x \cdot \ln a$. Будьте уважні!

$$z'_x = y \cdot x^{y-1}; \quad z'_y = x^y \cdot \ln x.$$

Приклад 2. Знайти вказані частинні похідні:

1) $z = \ln \frac{\sin x}{\cos y}$, знайти z'_x , z'_y ;

2) $u = e^{x^3 \cdot t} + \frac{t^2 \cdot z}{y} - \text{ctg} 3x$, знайти u'_x , u'_y , u'_z , u'_t ;

3) $F = \frac{a^2}{b} \cdot e^{-0,1t} + 2c^3 \cdot b$, знайти $\frac{\partial F}{\partial a} (F'_a)$; $\frac{\partial F}{\partial b} (F'_b)$; $\frac{\partial F}{\partial c} (F'_c)$; $\frac{\partial F}{\partial t} (F'_t)$.

Розв'язання.

1) $z = \ln \frac{\sin x}{\cos y}$. В цьому прикладі зверніть увагу на перетворення, які ідуть після знаходження частинних похідних.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos y}} \cdot \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{\cos y \cdot \cos x}{\sin x \cdot \cos y} = \frac{\cos x}{\sin x} = \text{ctg} x.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos y}} \cdot \frac{0 \cdot \cos y - \sin x \cdot (-\sin y)}{\cos^2 y} = \frac{\cos y}{\sin x} \cdot \frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos^2 y} = \frac{\sin y}{\cos y} = \text{tg} y.$$

2) $u = e^{x^3 \cdot t} + \frac{t^2 \cdot z}{y} - \text{ctg} 3x$, знайти u'_x , u'_y , u'_z , u'_t . Маємо функцію чотирьох

змінних. Ще раз нагадуємо, знаходячи частинну похідну, наприклад по аргументу z , усі інші аргументи (x, y, t) стають сталими. Отже, будьте уважні!

$$u'_x = e^{x^3 \cdot t} \cdot 3x^2 \cdot t - \left(-\frac{1}{\sin^2 3x} \cdot 3\right) = 3x^2 t e^{x^3 \cdot t} + \frac{3}{\sin^2 3x}.$$

$$u'_y = -\frac{t^2 \cdot z}{y^2}.$$

$$u'_z = \frac{t^2}{y}.$$

$$u'_t = e^{x^3 \cdot t} \cdot x^3 + \frac{2t \cdot z}{y}.$$

$$3) F = \frac{a^2}{b} \cdot e^{-0,1t} + 2c^3 \cdot b, \text{ знайти } \frac{\partial F}{\partial a} (F'_a); \frac{\partial F}{\partial b} (F'_b); \frac{\partial F}{\partial c} (F'_c); \frac{\partial F}{\partial t} (F'_t).$$

Цей приклад дещо відрізняється від попередніх тим, що потрібно буде знайти частинні похідні від «незвичайних» змінних (a, b, c) , але все залишається як і раніше. Якщо обчислюється частинна похідна по одній із змінних, останні змінні стають сталими. До речі такі позначення змінних можна зустріти, наприклад, в задачах пов'язаних з економікою.

$$\frac{\partial F}{\partial a} = F'_a = \left\{ \begin{array}{l} a - \text{змінна} \\ b, c, t - \text{сталі} \end{array} \right\} = \frac{2a}{b} \cdot e^{-0,1t}.$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = F'_b = \left\{ \begin{array}{l} b - \text{змінна} \\ a, c, t - \text{сталі} \end{array} \right\} = -\frac{a^2}{b^2} \cdot e^{-0,1t} + 2c^3.$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = F'_c = \left\{ \begin{array}{l} c - \text{змінна} \\ a, b, t - \text{сталі} \end{array} \right\} = 6c^2 \cdot b.$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = F'_t = \left\{ \begin{array}{l} t - \text{змінна} \\ a, b, c, - \text{сталі} \end{array} \right\} = \frac{a^2}{b} \cdot e^{-0,1t} \cdot (-0,1) = -\frac{a^2}{10b} e^{-0,1t}.$$

2.3 Повний диференціал функції багатьох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ неперервна в області D і має неперервні частинні похідні по обох аргументам в цій області. Тоді, нагадаємо, що повний приріст функції в точці $M(x, y)$ записується у вигляді: $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$. Можна довести (див. [1, с.338]), що після деяких перетворень Δz можна записати у вигляді:

$$\Delta z = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y,$$

де α і β нескінченно малі функції, коли $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta y \rightarrow 0$. Суму перших двох доданків називають головною частиною повного приросту, або повним диференціалом функції двох змінних і позначають dz . Можна довести (див. [2, с.143]), що $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$. Тоді, остаточно формула **повного диференціала** функції $z = f(x, y)$ запишеться у вигляді:

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy \quad (2.1)$$

До речі, частинні диференціали по змінним x і y записують таким чином:

$$d_x z = z'_x \cdot dx \text{ і } d_y z = z'_y \cdot dy.$$

Отже, щоб знайти повний диференціал функції $z = f(x, y)$ потрібно знайти частинні похідні по аргументам x і y і скористатися формулою (2.1).

Для функції n змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ повний диференціал записують у вигляді, аналогічному формулі (2.1):

$$du = u'_{x_1} dx_1 + u'_{x_2} dx_2 + \dots + u'_{x_n} dx_n. \quad (2.2)$$

Означення. Функція багатьох змінних називається **диференційованою** в точці M , якщо в цій точці існує повний диференціал цієї функції.

При достатньо малих приростах аргументів повний приріст функції можна з невеликою похибкою замінити повним диференціалом: $\Delta u \approx du$. Цю наближену рівність застосовують у наближених обчисленнях. Більш докладніше див. у [1, с.345].

Питання для самоперевірки

1. Як записується повний приріст функції двох змінних?
2. Як записується повний диференціал функції багатьох змінних?
3. За якої умови функція багатьох змінних називається диференційованою?
4. Де застосовують наближену рівність $\Delta u \approx du$?

Приклад. Знайти повний диференціал функцій:

1) $z = 5x \cdot y^2 + 4x^3 \cdot y^4$.

2) $u = e^{x^2-y^3} \cdot z$, в точці $M(1,1,2)$.

Розв'язання.

1) $z = 5x \cdot y^2 + 4x^3 \cdot y^4$. Спочатку знайдемо частинні похідні z'_x і z'_y , а потім застосуємо формулу (2.1): $z'_x = 5y^2 + 12x^2 y^4$, $z'_y = 10x \cdot y + 16x^3 \cdot y^3$. А тепер за формулою (2.1):

$$dz = (5y^2 + 12x^2 y^4)dx + (10x \cdot y + 16x^3 \cdot y^3)dy = y^2(5 + 12x^2 \cdot y^2)dx + 2x \cdot y(5 + 8x^2 \cdot y^2)dy.$$

2) $u = e^{x^2-y^3} \cdot z$, в точці $M(1,1,2)$. Тут маємо функцію трьох змінних і будемо користуватись формулою (2.2), коли $n=3$. Ясно, що замість змінних x_1, x_2, x_3 у формулі будуть змінні x, y, z . Тобто $du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz$. Знайдемо частинні похідні:

$$u'_x = e^{x^2-y^3} \cdot 2x \cdot z = 2x \cdot z \cdot e^{x^2-y^3}.$$

$$u'_y = e^{x^2-y^3} \cdot (-3y^2) \cdot z = -3y^2 \cdot z \cdot e^{x^2-y^3}.$$

$$u'_z = e^{x^2-y^3}.$$

Тепер звернемо увагу на те, що диференціал функції потрібно знайти в точці $M(1,1,2)$. Підставляємо координати точки в частинні похідні: $u'_x(M) = u'_x(1,1,2) = 4$, $u'_y(M) = u'_y(1,1,2) = -6$, $u'_z(M) = u'_z(1,1,2) = 1$. Тоді повний диференціал функції запишеться у вигляді: $du(M) = du(1,1,2) = 4dx - 6dy + dz$.

Приклади для аудиторної роботи

Приклад 1. Для функції $z = 6x^2 + 2x \cdot y^4$ знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Приклад 2. Для функції $z = x^2 \cdot \cos y$ знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Приклад 3. Для функції $z = \sqrt{2x^4 + 3y^3}$ знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Приклад 4. Для функції $z = \frac{y^2 - 1}{x^2 + 1}$ знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Приклад 5. Для функції $z = e^{x+3y^2}$ знайти частинну похідну $\frac{\partial u}{\partial y}$ в точці $M(0,1)$.

Приклад 6. Для функції $u = 2x^3 \cdot z^2 - y^2 \cdot x + \sin 2z - 5$ знайти частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

Приклад 7. Для функції $f = 3a^2 \cdot c^3 - \ln(y-z) + \frac{z}{c}$ знайти частинні похідні f'_a , f'_c , f'_y , f'_z .

Приклад 8. Знайти повний диференціал функції $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Приклади для самостійної роботи

Приклад 1. Для функції $z = x^2 \cdot \sin y + y^3 - 5x$ знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Приклад 2. Для функції $z = \frac{\sqrt{x}}{y}$ знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Приклад 3. Для функції $z = 3^{4x+\sqrt{y}}$ знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Приклад 4. Для функції $z = \operatorname{ctg}(x - 3x \cdot y^4)$ знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Приклад 5. Для функції $z = z(t, u) = \sqrt{2t + u^3}$ знайти частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial u}$ в точці $M(-1, 2)$.

Приклад 6. Для функції $u = \arcsin(x \cdot y) + e^{2x+3z} - \sqrt{z}$ знайти частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

Приклад 7. Для функції $f = 5a^2 \cdot b^3 - \ln c + \frac{z}{c}$ знайти частинні похідні f'_a , f'_c , f'_z .

Приклад 8. Знайти повний диференціал функції $z = \cos(x + 2x \cdot y^3)$.

Відповіді: Приклад 1. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cdot \sin y - 5$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot \cos y + 3y^2$. **Приклад 2.**

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\sqrt{x}}{y^2}$. **Приклад 3.** $\frac{\partial z}{\partial x} = 4 \cdot 3^{4x+\sqrt{y}} \cdot \ln 3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3^{4x+\sqrt{y}} \ln 3}{2\sqrt{y}}$. **Приклад 4.**

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1-3y^4}{\sin^2(x-3x \cdot y^4)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{12x \cdot y^3}{\sin^2(x-3x \cdot y^4)}$. **Приклад 5.** $\frac{\partial z}{\partial u}(M) = \frac{\partial z}{\partial u}(-1, 2) = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$.

Приклад 6. $u'_x = \frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} + 2e^{2x+3z}$, $u'_y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}$, $u'_z = 3e^{2x+3z} - \frac{1}{2\sqrt{z}}$. **Приклад 7.**

$f'_a = 10ab^3$, $f'_c = -(\frac{1}{c} + \frac{z}{c^2})$, $f'_z = \frac{1}{c}$. **Приклад 8.** $dz = -\sin(x+2x \cdot y^3)[(1+2y^3)dx + 6xy^2dy]$.

Зауваження. Всі наступні теми, які ми будемо розглядати базуються на умінні знаходити частинні похідні. Якщо ви ще не оволоділи цим умінням – до наступних тем рекомендуємо не переходити, а краще розглянути попередній матеріал – розділ 2.2. Частинні похідні першого порядку функцій багатьох змінних.

3. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Нехай функція $z = f(x, y)$ має частинні похідні z'_x і z'_y . В загальному випадку ці похідні є знову функціями двох змінних x і y . Тому від z'_x і z'_y можна знову знаходити частинні похідні (за тими ж самими правилами).

Частинні похідні від частинних похідних першого порядку називають **частинними похідними другого порядку** і позначають так:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} \text{ — функція } z = f(x, y) \text{ двічі диференціюється по змінній } x.$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} \text{ — функція } z = f(x, y) \text{ двічі диференціюється по змінній } y.$$

$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}$ — функція $z = f(x, y)$ спочатку диференціюється по змінній x , а потім по змінній y .

$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx}$ — функція $z = f(x, y)$ спочатку диференціюється по змінній y , а потім по змінній x .

Похідні z''_{xy} і z''_{yx} називають **мішаними** похідними.

Має місце **теорема Шварца**: якщо функція $z = f(x, y)$ та її частинні похідні до другого порядку включно неперервні в точці $M(x, y)$ і в деякому її околі, то в цій точці $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Виходить, що функція $z = f(x, y)$ має не чотири, а три частинних похідних другого порядку.

Приклад. Для функції $z = 3x^2y^5 + \sin 2x - y^2$ знайти частинні похідні другого порядку.

Розв'язання.

Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy^5 + 2 \cos 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 15x^2y^4 - 2y.$$

А тепер знайдемо частинні похідні другого порядку: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y^5 - 4 \sin 2x$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 60x^2y^3 - 2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 30xy^4$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 30xy^4$. Як бачимо, мішані похідні однакові, тобто порядок диференціювання не має значення при обчисленні мішаних похідних. Тому, в подальшому будемо обчислювати якусь одну з них.

Аналогічно визначаються частинні похідні вищого порядку ніж другий.

Наприклад $\frac{\partial^3 z}{\partial^2 x \partial y} = z'''_{xxy}$ — перша і друга похідні обчислюються по змінній x , а третя похідна по змінній y .

Взагалі, частинна похідна n -го порядку по деякій змінній — це перша

похідна від похідної $(n-1)$ -го порядку по тій же змінній.

До речі, теорема Шварца має місце і для мішаних похідних більш високого порядку. Наприклад: $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x}$.

Питання для самоперевірки

1. Що таке частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$?
2. Які частинні похідні другого порядку називаються мішаними?
3. Як формулюється теорема про мішані похідні другого порядку?
4. Як знаходиться похідна $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$?

Розв'язання прикладів

Розділ 1(найпростіші приклади)

Приклад 1. Знайти частинні похідні другого порядку від функцій:

1) $z = x^2 - 2xy + y^3 + 3x - 8y$.

2) $z = 2x^3 \cdot \sqrt{y}$.

Розв'язання.

1) $z = x^2 - 2xy + y^3 + 3x - 8y$. $z'_x = 2x - 2y + 3$, $z''_{xx} = 2$, $z'_y = -2x + 3y^2 - 8$, $z''_{yy} = 6y$, $z''_{xy} = -2$, $z''_{yx} = -2$. Ще раз переконалися, що мішані частинні похідні однакові.

2) $z = 2x^3 \cdot \sqrt{y}$. $z'_x = 6x^2 \cdot \sqrt{y}$, $z''_{xx} = 12x \cdot \sqrt{y}$; $z'_y = 2x^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{x^3}{\sqrt{y}}$. Перш, ніж будемо обчислювати частинну похідну z''_{yy} , перетворимо z'_y (щоб не користуватися формулою похідної частки): $z'_y = x^3 \cdot y^{-\frac{1}{2}}$. Тоді $z''_{yy} = x^3 \cdot (-\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}}) = -\frac{x^3}{2y^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x^3}{2\sqrt{y^3}}$. $z''_{xy} = 6x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{3x^2}{\sqrt{y}}$.

Приклад 2. Для функції $z = \cos 3x \cdot y - x^3 + x \cdot e^{2y} - 4x$ знайти частинну похідну z''_{xy} в точці $M(0, \frac{1}{2})$.

Розв'язання.

Знаходимо частинну похідну по аргументу x , а потім по аргументу y (пам'ятаєте, що можна і навпаки).

$z'_x = -3\sin 3x \cdot y - 3x^2 + e^{2y} - 4$, $z''_{xy} = -3\sin 3x + 2e^{2y}$. В одержану похідну підставляємо координати заданої точки: $z''_{xy}(M) = z''_{xy}(0, \frac{1}{2}) = 2e$.

Розділ 2

Приклад 1. Перевірити, чи задовольняє вказане рівняння функція $u(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u = \sin^2(x-y).$$

Розв'язання.

Можна сформулювати умови прикладу інакше: перевірити, чи буде функція $u(x, y)$ розв'язком даного рівняння. Отже, потрібно знайти частинні похідні другого порядку від функції $u(x, y)$ і підставити в рівняння. Якщо функція $u(x, y)$ буде розв'язком рівняння, то ми повинні одержати тотожність.

$$u'_x = 2 \sin(x-y) \cdot \cos(x-y) \cdot 1 = \sin 2(x-y). \quad \text{Тут ми застосували формулу: } 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

$$u''_{xx} = 2 \cos 2(x-y).$$

$$u'_y = 2 \sin(x-y) \cdot \cos(x-y) \cdot (-1) = -\sin 2(x-y),$$

$$u''_{yy} = -2 \cos 2(x-y) \cdot (-1) = 2 \cos 2(x-y).$$

Отже бачимо, що $u''_{xx} = u''_{yy}$ і функція $u(x, y)$ є розв'язком рівняння.

Приклад 2. Перевірити, чи задовольняє вказане рівняння функція $z(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + y \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad z = e^{\frac{x}{y}}.$$

Розв'язання.

Аналогічно першому прикладу:

$$z'_x = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}.$$

$$z'_y = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}.$$

$$z''_{xy} = \begin{cases} \text{застосуємо} \\ \text{похідну} \\ \text{добутку:} \\ u \cdot v = u'v + uv' \end{cases} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \cdot \frac{1}{y} + e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^3} e^{\frac{x}{y}} - \frac{1}{y^2} e^{\frac{x}{y}}.$$

Тепер знайдені похідні підставляємо у задане рівняння:

$$e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2} \cdot e^{\frac{x}{y}} + y \left(-\frac{x}{y^3} e^{\frac{x}{y}} - \frac{1}{y^2} e^{\frac{x}{y}}\right) = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2} \cdot e^{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} - \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} = 0.$$

Дійсно, функція $z(x, y)$ задовольняє рівнянню. Іншими словами функція $z(x, y)$ є рішенням цього рівняння.

Приклади для аудиторної роботи

Приклад 1. Для функції $z = \cos(x-4y)$ знайти частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Приклад 2. Для функції $z = 5x^4 - 2xy^2 - 7y^3 + e^{2x-5y}$ знайти частинну похідну $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

Приклад 3. Перевірити, чи задовольняє вказане рівняння функція $z(x, y)$:

$$x \cdot z_{xy}'' - z_y' = 0, \quad z = \frac{x}{y}.$$

Приклади для самостійної роботи

Приклад 1. Для функції $z = \cos y + (y - x) \sin y$ знайти частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Приклад 2. Для функції $z = x^4 - 2x^2 \cdot y + y^2 - 3x \cdot y - x + 3y + 5$ знайти частинні похідні $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

Приклад 3. Перевірити, чи задовольняє вказане рівняння функція $z(t, \omega)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0, \quad z = \sin(t + 2\omega).$$

Відповіді: Приклад 1. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\cos y$.

Приклад 2. $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -4$. **Приклад 3.** Так, задовольняє.

4. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ НЕЯВНО ЗАДАНИХ ФУНКЦІЙ

Спочатку нагадаємо саме поняття неявної функції. Почнемо з неявної функції однієї змінної:

$y = f(x)$ – функція задана в **явному** виді. $F(x, y) = 0$ – функція задана в **неявному** виді. Наприклад $x^2 + y^2 = R^2$ – рівняння кола записано в неявному виді. Помітимо, що не обов'язково, щоб права частина функції в неявному виді дорівнювала нулю (хоча такий вид можна завжди одержати: $x^2 + y^2 - R^2 = 0$). Просто в класичному вигляді неявну функцію записують так: $F(x, y) = 0$.

Аналогічно, для функції двох змінних:

$z = f(x, y)$ – функція задана в **явному** виді. $F(x, y, z) = 0$ – функція задана в **неявному** виді. І взагалі: змінна u є **неявною** функцією незалежних змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, якщо вона задана рівнянням $F(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$. Помітимо, що яку завгодно функцію, задану в явному виді, можна записати в неявному виді. Але не завжди можливий обернений хід. Наприклад, $z = x^2y + 2xy$ – функція задана в явному виді. Запишемо її в неявному виді: $x^2y + 2xy - z = 0$. Тепер розглянемо функцію, задану в неявному виді: $\sin \frac{z}{x+y} - e^{z^2x} = 0$. Привести її до явного виду достатньо складно (а може і неможливо).

А як же знаходяться похідні від функцій, заданих у неявному виді? Почнемо з функції однієї змінної $F(x, y) = 0$.

Теорема. Нехай:

1. функція $y = f(x)$ задається в області D рівнянням $F(x, y) = 0$, (де $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ – неперервні функції в області D);
2. координати точки (x, y) задовольняють рівнянню $F(x, y) = 0$;
3. нехай в цій точці $F'_y(x, y) \neq 0$.

Тоді похідна в точці (x, y) функції $F(x, y) = 0$ обчислюється за формулою:

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \quad (4.1)$$

Зауваження. Формула (4.1) доведена за умови, що y є функцією x . Але якщо розглянути функцію $x = \varphi(y)$, то одержимо наступну формулу:

$$x'_y = -\frac{F'_y(x, y)}{F'_x(x, y)}.$$

В подальшому, за замовчуванням, будемо рахувати, що y є функцією x і користуватися формулою (4.1).

Приклад. Обчислити похідну функції $5x^2y^4 - \cos y + \sin x = 0$.

Розв'язання.

Ясно, що $F(x, y) = 5x^2y^4 - \cos y + \sin x$. Знайдемо частинні похідні:

$$F'_x(x, y) = 10x \cdot y^4 + \cos x, \quad F'_y(x, y) = 20x^2y^3 + \sin y.$$

Далі користуємося формулою (4.1):

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{10x \cdot y^4 + \cos x}{20x^2 y^3 + \sin y}.$$

Зауважимо, що цю похідну можна було б знайти і без формули (4.1), але набагато складніше. Отже, процес знаходження похідної неявної функції однієї змінної значно спростився з використанням формули (4.1).

Перейдемо до функції $z = f(x, y)$, яка задана в неявному виді: $F(x, y, z) = 0$. Існує відповідна теорема і для цього випадку. Повністю формулювати її не будемо, а запишемо в скороченому варіанті:

Якщо $F(x, y, z)$ – диференційована функція трьох змінних x, y, z і $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то частинні похідні неявної функції $F(x, y, z) = 0$ знаходяться за формулами:

$$z'_x = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad z'_y = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad F'_z \neq 0. \quad (4.2)$$

$$\text{Або в скороченому варіанті: } z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Приклад. Функція $z = z(x, y)$ задана в неявному виді: $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 12x + 4z = 0$. Знайти z'_x, z'_y .

Розв'язання.

Маємо на увазі, що $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 12x + 4z$. Знайдемо складові формули (4.2): F'_x, F'_y, F'_z .

$$F'_x = 2x - 12, \quad F'_y = -4y, \quad F'_z = 6z + 4. \text{ А тепер, за формулою (4.2):}$$

$$z'_x = -\frac{2x - 12}{6z + 4} = -\frac{x - 6}{3z + 2}, \quad z'_y = -\frac{-4y}{6z + 4} = \frac{2y}{3z + 2}.$$

5. СКЛАДНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Не вдаючись до теоретичних подробиць в цьому розділі, запишемо наступне: нехай $z = f(x, y)$ диференційована функція аргументів x і y , а x і y , в свою чергу, є диференційованими функціями аргументу t . Тоді **складна** функція $z = z(t) = f[x(t), y(t)]$ також диференційована, а її похідна знаходиться за формулою:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \quad (5.1)$$

Помітимо, що формулу (5.1) краще запам'ятати, користуючись такою схемою (рис.11):

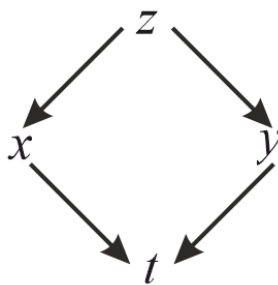


Рисунок 11.

Дивимося на схему: щоб одержати похідну $\frac{dz}{dt}$ нам потрібно пройти два "шляхи". Від z до t через x . І від z до t через y .

І важливе зауваження: уважний студент напевно помітив, що в формулі (5.1) присутні різні позначення похідних ($\frac{dz}{dt}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ і т.д.). Тут помилки немає, бо виконується, як завжди, правило: якщо на даному етапі ми обчислюємо похідну від функції двох і більше змінних, то пишемо $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$. Якщо маємо функцію однієї змінної, то пишемо $\frac{dz}{dt}$. Дійсно, подивимось на праву частину формули (5.1) і на схему: $\frac{\partial z}{\partial x}$ – **частинна** похідна від функції $z = f(x, y)$ по змінній x . А далі $\frac{dx}{dt}$ – похідна від функції $x = x(t)$ по змінній t . Далі додається аналогічний добуток $\frac{\partial z}{\partial y}$ – **частинна** похідна від функції $z = f(x, y)$ по змінній y , $\frac{dy}{dt}$ – похідна від функції $y = y(t)$ по змінній t . В лівій частині формули (5.1) стоїть позначення похідної від однієї змінної, чому так? Тому що зрештою, $z = f[x(t), y(t)]$ є функцією однієї змінної t . Таку похідну називають **повною** похідною. Спробуємо розібратися на прикладі.

Приклад. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = \sin 2x + \cos 4y$, $x = 3t^3 - 2t$, $y = \sqrt{t} + 5t$.

Розв'язання.

За формулою (5.1) нам потрібно знайти: $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cos 2x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -4 \sin 4y; \quad \frac{dx}{dt} = 9t^2 - 2; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 5. \quad \text{Тоді:}$$

$$\frac{dz}{dt} = 2 \cos 2x(9t^2 - 2) + (-4 \sin 4y) \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} + 5 \right) = 2 \cos 2x(9t^2 - 2) - 4 \sin 4y \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} + 5 \right).$$

Але остаточну відповідь ми одержимо, коли замість x і y ми підставимо їх аналітичні вирази з умови прикладу: $x = 3t^3 - 2t$, $y = \sqrt{t} + 5t$. Таким чином:

$$\frac{dz}{dt} = 2 \cos 2x(9t^2 - 2) - 4 \sin 4y \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} + 5 \right) = 2(9t^2 - 2) \cos 2(3t^3 - 2t) - 4 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} + 5 \right) \sin 4(\sqrt{t} + 5t).$$

Розглянемо ще один варіант складної функції. Нехай $z = f(x, y)$ диференційована функція аргументів x і y , а x і y , в свою чергу, є диференційованими функціями від аргументів u і v , тобто $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Тоді частинні похідні складної функції $z = z(u, v) = f[x(u, v), y(u, v)]$ будуть обчислюватися за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (5.2)$$

Помітимо, що в цих формулах всі похідні частинні.

Формули краще запам'ятати за допомогою наступної схеми (рис.12):

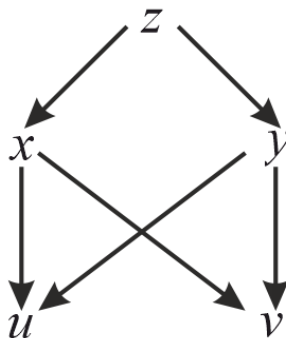


Рисунок 12.

Уважно роздивившись схему, ми бачимо, що z є по суті функцією двох змінних u і v . Розглянемо, наприклад, знаходження частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial u}$. Від z до u можна потрапити двома "шляхами", через x і через y . Ці шляхи і описані у формулі (5.2).

Приклад. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$ і $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = e^{x+3y} - \sin 4x + \cos 2y$, $x = 2u^2 - 5v$, $y = u^4 + 2\sqrt{v}$.

Розв'язання.

Спочатку знайдемо складові формули (5.2), а потім скористуємося цими формулами.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+3y} - 4 \cos 4x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3e^{x+3y} - 2 \sin 2y, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 4u, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 4u^3, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -5, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{v}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (e^{x+3y} - 4\cos 4x)4u + (3e^{x+3y} - 2\sin 2y)4u^3.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = (e^{x+3y} - 4\cos 4x)(-5) + (3e^{x+3y} - 2\sin 2y)\frac{1}{\sqrt{v}}.$$

А тепер, як і в попередньому прикладі, остаточну відповідь одержимо коли замість x і y підставимо їх значення з умови прикладу: $x = 2u^2 - 5v$, $y = u^4 + 2\sqrt{v}$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 4u \left[e^{3u^4+2u^2-5v+6\sqrt{v}} - 4\cos 4(2u^2 - 5v) \right] + 4u^3 \left[3e^{3u^4+2u^2-5v+6\sqrt{v}} - 2\sin 2(u^4 + 2\sqrt{v}) \right];$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -5 \left[e^{3u^4+2u^2-5v+6\sqrt{v}} - 4\cos 4(2u^2 - 5v) \right] + \frac{1}{\sqrt{v}} \left[3e^{3u^4+2u^2-5v+6\sqrt{v}} - 2\sin 2(u^4 + 2\sqrt{v}) \right].$$

Питання для самоперевірки

1. Яка форма запису неявної функції однієї змінної (двох змінних)?
2. За якою формулою обчислюється похідна неявної функції однієї змінної?
3. За якими формулами обчислюються похідні неявної функції двох змінних?
4. Що таке повна похідна від складної функції?

Розв'язання прикладів

Розділ 2

Приклад 1. Знайти похідні від функцій, заданих в неявному виді:

- 1) $xe^{3y} + y \cdot \ln x = 0$;
- 2) $x^2y^2 - x \cdot y^4 + x \cdot z = y \cdot z + 2$;
- 3) $x \cdot \cos y + y \cdot \sin z + z \cdot \sin x = 5y$;
- 4) $\frac{y}{z} = \ln \frac{x}{y}$.

Розв'язання.

1) $xe^{3y} + y \cdot \ln x = 0$. Маємо функцію однієї змінної. За замовчуванням тут y функція, а x аргумент. Тобто функція $y = f(x)$ задана в неявному виді

$F(x, y) = 0$. Нагадаємо формулу (4.1) обчислення похідної: $y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$. Ясно,

що, $F(x, y) = x \cdot e^{3y} + y \cdot \ln x$. Отже обчислюємо $F'_x(x, y)$ і $F'_y(x, y)$ і користуємося формулою (4.1).

$$F'_x(x, y) = e^{3y} + \frac{y}{x}, \quad F'_y(x, y) = 3xe^{3y} + \ln x.$$

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{e^{3y} + \frac{y}{x}}{3xe^{3y} + \ln x}.$$

2) $x^2y^2 - x \cdot y^4 + x \cdot z = y \cdot z + 2$. Тут ми маємо неявну функцію від двох змінних. За замовчуванням тут z функція, а x і y аргументи.

Перенесемо два доданки $y \cdot z + 2$ в ліву частину рівності, щоб одержати класичний вид неявної функції $F(x, y, z) = 0$: $x^2 y^2 - x \cdot y^4 + x \cdot z - y \cdot z - 2 = 0$.

Застосуємо формули (4.2): $z'_x = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$, $z'_y = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$.

$F'_x(x, y, z) = 2x \cdot y^2 - y^4 + z$, $F'_y(x, y, z) = 2x^2 \cdot y - 4x \cdot y^3 - z$, $F'_z(x, y, z) = x - y$. Тоді

$$z'_x = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{2x \cdot y^2 - y^4 + z}{x - y}, \quad z'_y = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{2x^2 \cdot y - 4x \cdot y^3 - z}{x - y}.$$

3) $x \cdot \cos y + y \cdot \sin z + z \cdot \sin x = 5y$. Цей приклад аналогічний попередньому, теж маємо неявну функцію двох змінних. По перше перенесемо у ліву частину $5y$. Одержимо функцію виду $F(x, y, z) = 0$. $x \cdot \cos y + y \cdot \sin z + z \cdot \sin x - 5y = 0$. Далі знайдемо частинні похідні F'_x , F'_y , F'_z і застосуємо формули (4.2).

$$F'_x = \cos y + z \cdot \cos x, \quad F'_y = -x \cdot \sin y + \sin z - 5, \quad F'_z = y \cdot \cos z + \sin x.$$

$$z'_x = -\frac{\cos y + z \cdot \cos x}{y \cdot \cos z + \sin x}, \quad z'_y = -\frac{-x \cdot \sin y + \sin z - 5}{y \cdot \cos z + \sin x} = \frac{x \cdot \sin y - \sin z + 5}{y \cdot \cos z + \sin x}.$$

4) $\frac{y}{z} = \ln \frac{x}{y}$. Ще один аналогічний приклад. Тому взагалі розв'язання не коментуємо.

$$\frac{y}{z} - \ln \frac{x}{y} = 0, \quad F'_x = -\frac{y}{x} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{1}{x}, \quad F'_y = \frac{1}{z} - \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{y}, \quad F'_z = -\frac{y}{z^2}.$$

$$z'_x = -\frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{y}{z^2}} = -\frac{z^2}{x \cdot y}, \quad z'_y = -\frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{y}}{-\frac{y}{z^2}} = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{y}}{\frac{y}{z^2}} = \frac{(y+z) \cdot z^2}{y^2 \cdot z} = \frac{(y+z) \cdot z}{y^2}.$$

Приклад 2. Знайти похідні від складних функцій:

1) $z = e^{\frac{x}{y}}$, $x = \cos 2t$, $y = \sin 2t$;

2) $z = u^2 + \ln(u \cdot v)$, $u = \operatorname{tg} 3x \cdot y$, $v = x^3 + 2y^2$.

Розв'язання.

1) $z = e^{\frac{x}{y}}$, $x = \cos 2t$, $y = \sin 2t$. Функція z залежить від змінних x і y , які, в свою чергу, є функціями від змінної t . Тому будемо використовувати формулу (5.1): $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$. Нагадаємо, що цю формулу можна самостійно сконструювати користуючись наступною схемою (рис.13).

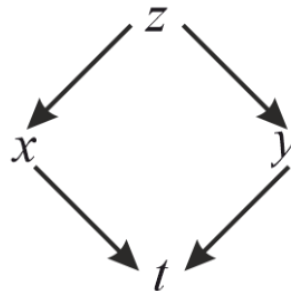


Рисунок 13.

Знайдемо потрібні частинні і звичайні похідні.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}, \quad \frac{dx}{dt} = -2 \sin 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 2 \cos 2t.$$

Застосуємо формулу (5.1):

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} \cdot (-2 \sin 2t) - \frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} \cdot 2 \cos 2t = -\frac{2}{y} e^{\frac{x}{y}} \left(\sin 2t + \frac{x}{y} \cos 2t \right). \quad \text{Але} \quad \text{остаточну}$$

відповідь одержимо, коли замість x і y ми підставимо їх аналітичні вирази з умови прикладу: $x = \cos 2t$, $y = \sin 2t$.

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{2}{\sin 2t} e^{\frac{\cos 2t}{\sin 2t}} \left(\sin 2t + \frac{\cos 2t}{\sin 2t} \cos 2t \right) = \{ \text{можна залишити відповідь в такому виді, а можна застосувати деякі тригонометричні формули і одержати спрощену відповідь} \} = -\frac{2}{\sin 2t} e^{\operatorname{ctg} 2t} \left(\frac{\sin^2 2t + \cos^2 2t}{\sin 2t} \right) = -\frac{2}{\sin 2t} e^{\operatorname{ctg} 2t} \cdot \frac{1}{\sin 2t} = -\frac{2}{\sin^2 2t} e^{\operatorname{ctg} 2t}.$$

2) $z = u^2 + \ln(u \cdot v)$, $u = \operatorname{tg} 3x \cdot y$, $v = x^3 + 2y^2$. Тут функція z залежить від змінних u і v , а вони, в свою чергу, залежать від змінних x і y . Користуватись будемо формулами (5.2), але скорегуємо їх відповідно до умов прикладу. Застосуємо схему (рис.14):

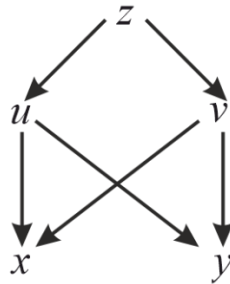


Рисунок 14.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2u + \frac{1}{u \cdot v} \cdot v = 2u + \frac{1}{u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u \cdot v} \cdot u = \frac{1}{v}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3y}{\cos^2 3x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{tg} 3x,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 4y.$$

Отже, частинні похідні знайдені, і тепер підставляємо їх у відповідні формули:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \left(2u + \frac{1}{u}\right) \cdot \frac{3y}{\cos^2 3x} + \frac{1}{v} \cdot 3x^2 = \{ \text{проведемо деякі алгебраїчні перетворення} \} = \\ &= \frac{3(2u^2 + 1) \cdot y}{u \cdot \cos^2 3x} + \frac{3x^2}{v} = \{ \text{замість } u \text{ і } v \text{ підставимо їх аналітичні вирази} \} = \\ &= \frac{3(2y^2 \cdot \operatorname{tg}^2 3x + 1) \cdot y}{\operatorname{tg} 3x \cdot \cos^2 3x \cdot y} + \frac{3x^2}{x^3 + 2y^2} = \frac{3(2y^2 \cdot \operatorname{tg}^2 3x + 1)}{\sin 3x \cdot \cos 3x} + \frac{3x^2}{x^3 + 2y^2}. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \left(2u + \frac{1}{u}\right) \cdot \operatorname{tg} 3x + \frac{1}{v} \cdot 4y = \{ \text{проведемо деякі алгебраїчні}$$

$$\text{перетворення} \} = \frac{(2u^2+1) \cdot \operatorname{tg} 3x}{u} + \frac{4y}{v} = \{ \text{замість } u \text{ і } v \text{ підставимо їх аналітичні вирази} \} = \frac{(2y^2 \cdot \operatorname{tg}^2 3x + 1) \cdot \operatorname{tg} 3x}{y \cdot \operatorname{tg} 3x} + \frac{4y}{x^3 + 2y^2} = \frac{2y^2 \cdot \operatorname{tg}^2 3x + 1}{y} + \frac{4y}{x^3 + 2y^2}.$$

Приклади для аудиторної роботи

Приклад 1. Знайти похідні від функцій заданих в неявному виді:

1) $x \cdot y^2 - 2 \sin x \cdot \cos 3y + 5x^4 = 0, \quad y'_x = ?$

2) $z \cdot e^{2y} + \ln \frac{z}{x} - x + 5y = 1, \quad z'_x = ?, \quad z'_y = ?$

Приклад 2. Знайти похідні від складних функцій:

1) $z = \frac{\sqrt{x}}{y+5}, \quad x = (2+3t)^2, \quad y = e^{4t}, \quad \frac{dz}{dt} = ?$

2) $z = x^2 \cdot y - 2y^3 + \ln \frac{y}{x}, \quad x = u^2 - 2v, \quad y = \sin u + \cos 3v, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = ?, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = ?$

Приклади для самостійної роботи

Приклад 1. Знайти похідні від функцій заданих в неявному виді:

1) $3^{2x} \cdot y^2 - 2x^3 \cdot y + \sin 4x = 0, \quad y'_x = ?$

2) $\frac{x^2}{y} + e^{2z-x} - x + z = 3y, \quad z'_x = ?, \quad z'_y = ?$

Приклад 2. Знайти похідні від складних функцій:

1) $z = \sqrt{x^2 - y + 1}, \quad x = t^2, \quad y = \ln t, \quad \frac{dz}{dt} = ?$

2) $z = x^2 + y^2, \quad x = \sqrt{u \cdot v}, \quad y = \frac{v}{u}, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = ?, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = ?$

Відповіді: Приклад 1. 1) $y'_x = -\frac{2 \cdot 3^{2x} \cdot \ln 3 \cdot y^2 - 6x^2 \cdot y + 4 \cos 4x}{2 \cdot 3^{2x} \cdot y - 2x^3} = -\frac{3^{2x} \cdot \ln 3 \cdot y^2 - 3x^2 \cdot y + 2 \cos 4x}{3^{2x} \cdot y - x^3}.$

2) $z'_x = -\frac{\frac{2x}{y} - e^{2z-x} - 1}{2e^{2z-x} + 1} = -\frac{2x - e^{2z-x} \cdot y - y}{y(2e^{2z-x} + 1)}; \quad z'_y = \frac{\frac{x^2}{y^2} + 3}{2e^{2z-x} + 1} = \frac{x^2 + 3y^2}{y^2(2e^{2z-x} + 1)}.$

Приклад 2. 1) $z'_t = \frac{1}{\sqrt{t^4 - \ln t + 1}} \left(2t^3 - \frac{1}{2t} \right) = \frac{4t^4 - 1}{2t\sqrt{t^4 - \ln t + 1}};$

2) $z'_u = v - \frac{2v^2}{u^3} = \frac{u^3 \cdot v - 2v^2}{u^3}; \quad z'_v = u + \frac{2v}{u^2} = \frac{u^3 + 2v}{u^2}.$

Зауваження. Ми закінчили вивчення основних розділів теми "Функції багатьох змінних". Тепер перейдемо до вивчення розділів цієї теми, де будемо розглядати **застосування** функцій багатьох змінних.

5. ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ (ЛОКАЛЬНИЙ МАКСИМУМ І МІНІМУМ ФУНКЦІЇ)

Почнемо із прикладів застосування цієї теми:

- знаходження точок рівноваги, де потенційна енергія мінімальна;
- визначення положення тіл, де тиск (або температура) максимальний (мінімальний);
- знаходження мінімальних затрат, або максимального прибутку при залежності від двох змінних (наприклад від об'єму виробництва і вартості сировини).

А тепер перейдемо до вивчення цієї теми.

Нехай функція $z = f(x, y)$ неперервна в точці $M_0(x_0, y_0)$ і в деякому околі цієї точки.

Означення. Функція $z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$ **максимум** (локальний максимум), якщо для довільної точки M із деякого околу точки M_0 виконується нерівність $f(M_0) > f(M)$. Точка M_0 називається **точкою максимуму** (локального максимуму).

Аналогічне означення можна сформулювати і для мінімуму (локального мінімуму) функції. Ясно, що нерівність змінить знак на протилежний $f(M_0) < f(M)$.

Взагалі максимуми і мінімуми називають **екстремумами** (локальними екстремумами) функції.

Як і для функції однієї змінної, існують дві теореми (з необхідними і достатніми умовами).

Теорема (необхідні умови існування екстремуму). Якщо функція $z = f(x, y)$ має екстремум в точці $M_0(x_0, y_0)$, то в цій точці частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ дорівнюють нулю, або не існують.

Доведення теореми дивись у [1, с.403].

Означення. Точки в яких частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ дорівнюють нулю, або не існують називаються **стаціонарними** (критичними) точками, або точками підозрілими на екстремум.

Теорема (достатні умови існування екстремуму). Нехай функція $z = f(x, y)$ в деякому околі стаціонарної точки M_0 має неперервні частинні похідні до третього порядку включно і:

$$\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2} = A, \quad \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x \partial y} = B, \quad \frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2} = C.$$

Тоді, якщо :

- 1) $AC - B^2 > 0$ і $A < 0$ (або $C < 0$), то M_0 є точка максимуму;
- 2) $AC - B^2 > 0$ і $A > 0$ (або $C > 0$), то M_0 є точка мінімуму;

3) $AC - B^2 < 0$, в точці M_0 екстремуму немає;

4) $AC - B^2 = 0$, в точці M_0 екстремум може існувати, а може і не існувати (потрібно додаткове дослідження).

Доведення теореми дивись у [2, с. 153].

Зауваження. Розкриємо зміст 4): що означає додаткове дослідження? Нехай $z(x_0, y_0)$ - значення функції в стаціонарній точці (x_0, y_0) , а $z(x, y)$ - значення функції в деякому околі стаціонарної точки. Знаходимо декілька значень $z(x, y)$ функції. Якщо $z(x_0, y_0) < z(x, y)$, то в точці (x_0, y_0) - маємо мінімум. Якщо $z(x_0, y_0) > z(x, y)$ - маємо максимум. Якщо значення $z(x, y)$ різні за знаком, то в стаціонарній точці екстремуму немає.

Складемо алгоритм дослідження функції $z = f(x, y)$ на екстремум.

1. Знаходимо область визначення функції.

2. Знаходимо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3. Знаходимо точки, в яких частинні похідні дорівнюють нулю, або не існують (нагадуємо, що такі точки називаються стаціонарними точками).

4. Знаходимо частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

5. Із усіх стаціонарних точок відбираємо ті, що лежать всередині області визначення функції. З ними в подальшому і працюємо. Кожну таку точку досліджуємо окремо. Нехай це буде точка M_0 . Знаходимо $\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2} = A$, $\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x \partial y} = B$, $\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2} = C$. Обчислюємо вираз $AC - B^2$. Далі користуємося теоремою (достатні умови існування екстремуму). Відповідно до того яке число ми одержимо робимо висновок, чи є екстремум в цій точці, чи його немає чи потрібне додаткове дослідження.

6. Якщо екстремум існує в цій точці, знаходимо координати екстремума.

Зауваження. Для класифікації критичних точок можна використовувати так звану матрицю Гессе:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Розглядається визначник цієї матриці: $\Delta_H = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$. А далі формулюється критерій (для кожної стаціонарної точки):

Якщо: $\Delta_H > 0$ і f_{xx} (або f_{yy}) < 0 – то маємо максимум;

$\Delta_H > 0$ і f_{xx} (або f_{yy}) > 0 – то маємо мінімум;

$\Delta_H < 0$ – екстремуму немає;

$\Delta_H = 0$ – відповіді немає (потрібно додаткове дослідження).

Приклад. Дослідити функцію $z = x^3 + 3x \cdot y^2 - 51x - 24y$ на екстремум.

Розв'язання.

Користуємося алгоритмом:

1. Область визначення функції - всі дійсні значення змінних x і y . Тобто:
 $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$.

2. Знаходимо частинні похідні першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 51, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = 6x \cdot y - 24.$$

3. Прирівнюємо частинні похідні нулю і складаємо систему (розв'язавши систему ми знайдемо точки, в яких частинні похідні дорівнюють нулю. Точок, в яких вони не існують в цьому прикладі немає).

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 51 = 0, \\ 6xy - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 17 = 0, \\ xy = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 17 = 0, \\ y = \frac{4}{x} \end{cases},$$

$x^2 + \frac{16}{x^2} - 17 = 0 \Rightarrow x^4 - 17x^2 + 16 = 0$. Позначимо $x^2 = t$ і одержимо квадратне рівняння: $t^2 - 17t + 16 = 0$. Розв'яжемо його і одержимо корені: $t_1 = 16, t_2 = 1$. Повернемося до змінної x .

$$x^2 = 16 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 4 \Rightarrow y_{1,2} = \pm 1; \quad x^2 = 1 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 1 \Rightarrow y_{3,4} = \pm 4.$$

Одержали чотири точки: $M_1(4,1), M_2(-4,-1), M_3(1,4), M_4(-1,-4)$. Нагадаємо, що вони називаються стаціонарними (критичними) точками.

Всі вони належать області визначення функції, тому кожному з них будемо досліджувати на екстремум.

4. Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x.$$

5. Дослідимо точку $M_1(4,1)$: $\frac{\partial^2 z(M_1)}{\partial x^2} = A = 24$; $\frac{\partial^2 z(M_1)}{\partial x \partial y} = B = 6$; $\frac{\partial^2 z(M_1)}{\partial y^2} = C = 24$.

Обчислимо $AC - B^2 = 576 - 36 = 540 > 0$. За твердженням теореми (достатні умови існування екстремуму), якщо $AC - B^2 > 0$, то в точці $M_1(4,1)$ маємо екстремум. Але який? Максимум чи мінімум? Дивимося, що $A > 0$ (або $C > 0$), то в точці $M_1(4,1)$ маємо мінімум.

Тепер на черзі точка $M_2(-4,-1)$: $A = -24$; $B = -6$; $C = -24$. $AC - B^2 = 576 - 36 = 540 > 0$, але $A < 0$. Маємо в точці $M_2(-4,-1)$ максимум.

Точка $M_3(1,4)$: $A = 6$; $B = 24$; $C = 6$. $AC - B^2 = 36 - 576 = -540 < 0$, екстремуму немає.

Точка $M_4(-1,-4)$: $A = -6$; $B = -24$; $C = -6$. $AC - B^2 = 36 - 576 = -540 < 0$, екстремуму немає.

6. Знайдемо значення функції в точці $M_1(4,1)$:
 $z(M_1) = z(4,1) = 4^3 + 3 \cdot 4 - 51 \cdot 4 - 24 = -152$.

Знайдемо значення функції в точці $M_2(-4,-1)$.

$$z(M_2) = z(-4,-1) = -64 - 12 + 51 \cdot 4 + 24 = 152.$$

Отже, в точці $M_1(4,1)$ маємо мінімум $z(M_1) = z(4,1) = -152$, а в точці $M_2(-4,-1)$ маємо максимум $z(M_2) = z(-4,-1) = 152$.

6. НАЙБІЛЬШЕ І НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ В ЗАМКНЕНІЙ ОБЛАСТІ (ГЛОБАЛЬНИЙ МАКСИМУМ І МІНІМУМ ФУНКЦІЇ)

Почнемо із прикладів застосування цієї теми:

- визначення найвищої і найнижчої температур у заданій області;
- знаходження точки на мембрані, де амплітуда коливань найбільша, або найменша;
- знаходження комбінації об'ємів виробництва двох продуктів для найбільшого прибутку;
- мінімізація витрат матеріалу при заданій міцності деталі.

А тепер перейдемо до вивчення цієї теми.

Спочатку нагадаємо як знайти найбільше і найменше значення функції однієї змінної $y = f(x)$ на заданому відрізку $[a, b]$. До речі, не слід плутати найбільше і найменше значення функції на відрізку з максимумом або мінімумом функції в деякій точці M_0 (які є найбільшим або найменшим значенням функції тільки у порівнянні з її значеннями у деякому, може бути, достатньо малому околі цієї точки).

Розглянемо приклад.

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = 3x^2 + 6x$ на відрізку $[-2, 1]$.

Розв'язання.

Область визначення знаходити не потрібно, тому що заданий відрізок завжди повинен знаходитись в цій області. Обчислимо похідну функції: $y' = 6x + 6$. Далі знайдемо стаціонарні точки похідної (для цього прирівняємо похідну нулю і розв'яжемо одержане рівняння). $6x + 6 = 0$, звідси $x = -1$. Перевіряємо, чи належить точка $x = -1$ до заданого відрізка. Належить (якщо ж стаціонарні точки не лежать всередині заданого відрізка, то ми їх в подальшому не розглядаємо).

Далі знаходимо значення функції в стаціонарній точці і на кінцях відрізка.

$y(-1) = -3$, $y(-2) = 0$, $y(1) = 9$. Із одержаних чисел вибираємо найбільше і найменше.

Найбільшого значення на відрізку $[-2, 1]$ функція досягає, коли $x = 1$, тобто $y(1) = 9$. А найменшого функція досягає, коли $x = -1$, тобто $y(-1) = -3$.

Тепер перейдемо до функції двох змінних.

Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень буде схожим (але більш довгим).

Нехай в замкненій області D задана неперервна функція $z = f(x, y)$. Тоді обов'язково в цій області функція буде досягати свого найбільшого і найменшого значень. Ці значення досягаються або в стаціонарних точках (які лежать всередині області), або в точках, які лежать на межах області.

Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції двох змінних, яка задана в замкненій області D :

1. Знаходимо стаціонарні точки (відкидаємо ті, які не належать заданій області, або лежать на границях області, тобто залишаємо тільки ті, які лежать всередині області) і обчислюємо значення функції в цих точках.

2. Знаходимо найбільше і найменше значення функції на всіх межах області.

3. Серед одержаних чисел вибираємо найбільше число - найбільше значення функції в області D і найменше число - найменше значення функції в області D .

1. і 3. пункти виконуються достатньо швидко, чого не скажеш про пункт 2.

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 2x \cdot y - y^2 - 4x$ в області D , яка задана лініями: $x - y + 1 = 0$, $y = 0$, $x = 3$.

Розв'язання.

Спочатку зробимо рисунок заданої області.

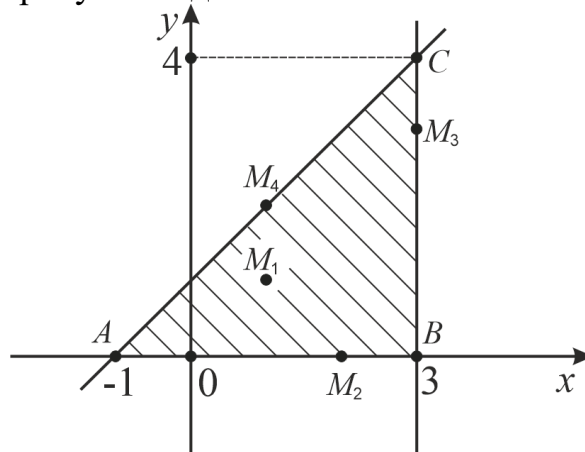


Рисунок 15

1. Знайдемо частинні похідні функції: $z'_x = 2x + 2y - 4$, $z'_y = 2x - 2y$. Для знаходження стаціонарних точок прирівняємо їх нулю. Одержимо систему двох рівнянь з двома невідомими.

$$\begin{cases} 2x + 2y - 4 = 0, \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2, \\ x = y \end{cases}$$

Звідси $x=1$, $y=1$. Отже одержали стаціонарну точку $M_1(1,1)$. Вона лежить всередині заданої області, тому знайдемо значення функції в цій точці: $z(1,1) = z(M_1) = -2$.

2. Тепер дослідимо функцію на межах області D . Вона обмежена трьома лініями (трьома межами). Будемо досліджувати функцію на кожній межі. Помітимо, що функція двох змінних на кожній межі перетворюється на функцію однієї змінної. Почнемо з межі AB , вона задана рівнянням $y=0$. У функцію $z = x^2 + 2x \cdot y - y^2 - 4x$ замість y підставляємо $y=0$. І, увага!, одержуємо функцію однієї змінної x : $z = x^2 - 4x$. Дивимось рисунок 15.

Формулюємо задачу: знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 - 4x$ на відрізку $[-1, 3]$.

Знайдемо похідну: $z'_x = 2x - 4$. Прирівняємо її нулю $2x - 4 = 0$ і розв'яжемо рівняння: $x = 2$. Одержали стаціонарну точку $x = 2$, яка належить відрізку $[-1, 3]$. Знайдемо значення функції $z = x^2 - 4x$ на кінцях відрізку і в точці $x = 2$.

$z(-1) = 5$, $z(2) = -4$, $z(3) = -3$. Але помітимо, що ці значення ми знайшли за умови $y = 0$. Тому перевизначимо знайдені значення функції.

$$z(-1, 0) = z(A) = 5, \quad z(2, 0) = z(M_2) = -4, \quad z(3, 0) = z(B) = -3.$$

Тепер перейдемо до сторони BC . Дивимось рисунок 15. Координати точки C знайдемо, розв'язавши систему рівнянь:
$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow C(3, 4).$$

Проведемо аналогічне дослідження. Рівняння BC : $x = 3$. Підставимо в функцію $z = x^2 + 2x \cdot y - y^2 - 4x$ замість x його значення $x = 3$: $z = -y^2 + 6y - 3$ і одержимо функцію однієї змінної y .

Формулюємо задачу: знайти найбільше і найменше значення функції $z = -y^2 + 6y - 3$ на відрізку $[0, 4]$. Знайдемо похідну: $z'_y = -2y + 6$, прирівняємо її нулю і знайдемо стаціонарну точку: $-2y + 6 = 0 \Rightarrow y = 3$. Вона належить відрізку $[0, 4]$. Далі обчислимо значення функції $z = -y^2 + 6y - 3$ на кінцях відрізку BC і в точці $y = 3$. Але в точці B значення функції вже знайдено. Тому, $z(3) = 6$, $z(4) = 5$. Ці значення ми знайшли за умови $y = 3$. Тому перевизначимо знайдені значення функції.

$$z(3, 3) = z(M_3) = 6, \quad z(3, 4) = z(C) = 5.$$

І, нарешті, остання сторона (межа) AC . Дивимось рисунок 15. Її рівняння $x - y + 1 = 0$, або $y = x + 1$. Можна було б перейти до рівняння $x = y - 1$. Але це не має значення. Підставимо в задану функцію $y = x + 1$. $z = x^2 + 2x(x + 1) - (x + 1)^2 - 4x = 2x^2 - 4x - 1$. Одержимо функцію однієї змінної x .

Формулюємо задачу: знайти найбільше і найменше значення функції $z = 2x^2 - 4x - 1$ на відрізку $[-1, 3]$. До речі, якби ми перейшли тут до змінної y , то знаходили б найбільше і найменше значення функції (яка б вже залежала від y) на відрізку $[0, 4]$. Знайдемо похідну: $z'_x = 4x - 4$, прирівняємо її нулю і обчислимо стаціонарну точку: $4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$. Вона належить відрізку $[-1, 3]$. Далі обчислимо значення функції $z = 2x^2 - 4x - 1$ на кінцях відрізку $[-1, 3]$ і в точці $x = 1$: $z(-1) = 5$, $z(1) = -3$, $z(3) = 5$. Ці значення ми знайшли за умови, що $y = x + 1$. Тому перевизначимо знайдені значення функції. Щоб не робити зайвої роботи помітимо, що кінці відрізку це точки A і B , в яких значення функції вже знайдені. Тому залишилось перевизначити знайдене значення функції в стаціонарній точці $x = 1$.

$$\text{Якщо } y = x + 1, \text{ то } y = 2. \quad z(1, 2) = z(M_4) = -3.$$

А тепер із усіх знайдених чисел вибираємо найбільше і найменше. Помітимо, що не обов'язково, щоб найбільше значення було єдиним, може бути, наприклад, два найбільших значення. Так само і з найменшим значенням. Отже: $z(1,1) = z(M_1) = -2$, $z(2,0) = z(M_2) = -4$, $z(3,3) = z(M_3) = 6$, $z(1,2) = z(M_4) = -3$, $z(-1,0) = z(A) = 5$, $z(3,0) = z(B) = -3$, $z(3,4) = z(C) = 5$.

Висновок: найбільшого значення функція досягає в точці $M_3(3,3)$, тобто $z(3,3) = 6$, а найменшого значення в точці $M_2(2,0)$, тобто $z(2,0) = -4$.

Питання для самоперевірки

1. Що таке максимум функції двох змінних?
2. Що таке стаціонарна точка?
3. Як формулюється теорема про необхідні умови існування екстремуму
4. Що таке A, B і C ?
5. Якщо в деякій точці $M(x_0, y_0)$ $AC - B^2 > 0$ і $A > 0$, то $M(x_0, y_0)$, точка ...?
6. Чим відрізняється максимум (мінімум) функції від найбільшого (найменшого) значень функції?
7. Як формулюється алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції двох змінних?

Розв'язання прикладів

Розділ 2

Приклад 1. Дослідити функцію $z = x^2 + x \cdot y + y^2 - 3x - 6y$ на екстремум.

Розв'язання.

Користуємося алгоритмом:

1. Область визначення функції - всі дійсні значення змінних x і y . Тобто: $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$.

2. Знаходимо частинні похідні першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6.$$

3. Прирівнюємо частинні похідні нулю і складаємо систему (розв'язавши систему ми знайдемо точки, в яких частинні похідні дорівнюють нулю. Точок, в яких вони не існують в цьому прикладі немає).

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 3. \text{ Одержали одну стаціонарну точку } M(0,3).$$

4. Знайдемо частинні похідні другого порядку: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$.

5. Дослідимо точку $M(0,3)$. В цьому прикладі ми одержали другі похідні у вигляді чисел. Тобто, підставляти координати точки $M(0,3)$ начебто і нікуди. Але алгоритм дослідження функції на екстремум діє і в цьому випадку.

$$\frac{\partial^2 z(M)}{\partial x^2} = A = 2, \quad \frac{\partial^2 z(M)}{\partial x \partial y} = B = 1, \quad \frac{\partial^2 z(M)}{\partial y^2} = C = 2. \text{ Обчислюємо } AC - B^2 = 3 > 0,$$

$A > 0$. За твердженням теореми (достатні умови існування екстремуму), в точці $M(0,3)$ маємо мінімум.

6. Знайдемо значення функції в цій точці.

$z(M) = z(0,3) = 9 - 18 = -9$. Отже функція $z = x^2 + x \cdot y + y^2 - 3x - 6y$ має в точці $M(0,3)$ мінімум, який дорівнює -9 .

Приклад 2. Дослідити функцію $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4x \cdot y - 2y^2$ на екстремум.

Розв'язання.

Користуємося алгоритмом:

1. Область визначення функції - всі дійсні значення змінних x і y . Тобто:
 $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$.

2. Знаходимо частинні похідні першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + 4x - 4y.$$

3. Прирівнюємо частинні похідні нулю і складаємо систему:

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow (\text{складемо ліві і праві частини рівнянь і одержимо})$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow x^3 = -y^3 \Rightarrow y = -x.$$

Підставляємо одержану рівність $y = -x$ в перше рівняння системи:
 $x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0$. Одержуємо корені рівняння: $x = 0, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$. Тоді
 $y = 0, y = -\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$. Маємо три стаціонарні точки: $M_1(0,0), M_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), M_3(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

4. Знайдемо частинні похідні другого порядку: $z_{xx}'' = 12x^2 - 4, z_{xy}'' = 4, z_{yy}'' = 12y^2 - 4$.

5. Досліджуємо точку $M_1(0,0)$: $z_{xx}''(M_1) = A = -4, z_{xy}''(M_1) = B = 4, z_{yy}''(M_1) = C = -4$.

Обчислюємо $AC - B^2 = 16 - 16 = 0$. За твердженням теореми (достатні умови існування екстремуму), в точці $M_1(0,0)$ може існувати, а може і не існувати екстремум (потрібно додаткове дослідження). Значення функції $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4x \cdot y - 2y^2$ в точці $M_1(0,0)$ дорівнює нулю. Якщо обчислити декілька значень функції в невеликому околі точки $M_1(0,0)$, то одержимо як додатні, так і від'ємні числа. Тобто екстремуму в цій точці немає.

Досліджуємо точку $M_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$: $z_{xx}''(M_2) = A = 20, z_{xy}''(M_2) = B = 4, z_{yy}''(M_2) = C = 20$. Обчислюємо $AC - B^2 = 400 - 16 = 384 > 0, A > 0$. В точці $M_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ маємо мінімум.

Досліджуємо точку $M_3(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$: $z_{xx}''(M_3) = A = 20$, $z_{xy}''(M_3) = B = 4$, $z_{yy}''(M_3) = C = 20$. Обчислюємо $AC - B^2 = 400 - 16 = 384 > 0$, $A > 0$. В точці $M_3(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ знову маємо мінімум.

6. Знайдемо значення функції $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4x \cdot y - 2y^2$ в точках мінімуму.

$$z(M_2) = z(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8, \quad z(M_3) = z(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8.$$

Приклад 3. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 3x \cdot y$ в області D , яка задана нерівностями: $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 2$.

Розв'язання.

Спочатку зробимо рисунок заданої області D .

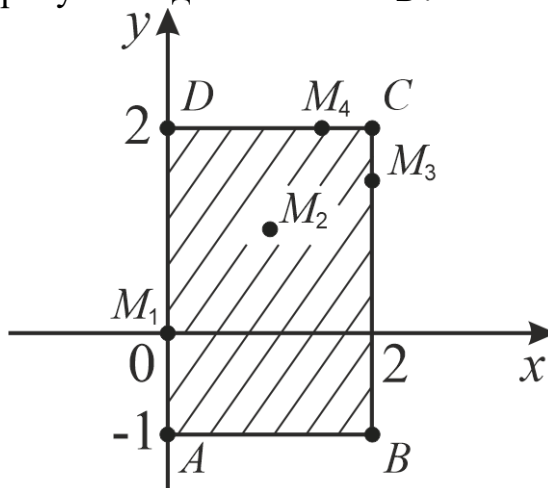


Рисунок 16

Будемо користуватися алгоритмом знаходження найбільшого і найменшого значень функції двох змінних, яка задана в замкненій області D .

1. Знайдемо частинні похідні функції: $z'_x = 3x^2 - 3y$, $z'_y = 3y^2 - 3x$. Для знаходження стаціонарних точок прирівняємо їх нулю. Одержимо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y, \\ y^2 = x \end{cases}$$

$$\text{Звідси } \begin{cases} x^4 = y^2, \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \text{ і корені одержаного}$$

рівняння $x = 0$, $x = 1$. Тоді $y = 0$, $y = 1$. Одержали дві стаціонарні точки: $M_1(0,0)$, $M_2(1,1)$. Якщо подивитися на область D , то точка $M_1(0,0)$ лежить на границі області і ми її зараз розглядати не будемо, тому що ця точка зустрінеться пізніше, коли будуть досліджуватися границі (межі) області. А точка $M_2(1,1)$ лежить всередині області. Тому знайдемо значення функції в точці $M_2(1,1)$: $z(1,1) = z(M_2) = -1$.

2. Тепер дослідимо функцію на межах області D . Вона обмежена чотирма лініями (межами): $x = 0$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 2$. Будемо досліджувати функцію на

кожній межі. Помітимо, що функція двох змінних на кожній межі перетворюється на функцію однієї змінної.

Почнемо з границі AB . Дивимось рис. 16. Рівняння лінії AB $y = -1$. Підставимо це значення в рівняння функції: $z = x^3 + y^3 - 3x \cdot y$. Одержимо $z = x^3 + 3x - 1$. Як бачимо, це функція однієї змінної x і можна сформулювати таку задачу: знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^3 + 3x - 1$, яка задана на відрізку $[0, 2]$. Знайдемо похідну $z' = 3x^2 + 3$. Прирівняємо її нулю (для знаходження стаціонарних точок): $3x^2 + 3 = 0$, або $x^2 + 1 = 0$. Це рівняння розв'язку не має ($x^2 \neq -1$). Тому стаціонарних точок на цьому відрізку немає.

Залишається знайти значення функції на кінцях цього відрізка: $z(0) = -1$, $z(2) = 13$. Але ці значення ми знайшли за умови, що $y = -1$. Тобто повертаємося до функції двох змінних і перевизначаємо знайдені значення функції: $z(0, -1) = z(A) = -1$, $z(2, -1) = z(B) = 13$. Тепер, в подальшому, коли нам траплятимуться точки A і B , обчислювати значення функції в цих точках не будемо.

Переходимо до границі BC . Дивимось рис. 16. Рівняння лінії $x = 2$. Підставимо це значення в рівняння функції: $z = x^3 + y^3 - 3x \cdot y$. Одержимо $z = y^3 - 6y + 8$. Як бачимо, це функція однієї змінної y і можна сформулювати таку задачу: знайти найбільше і найменше значення функції $z = y^3 - 6y + 8$, яка задана на відрізку $[-1, 2]$. Знайдемо похідну $z' = 3y^2 - 6$. Прирівняємо її нулю (для знаходження стаціонарних точок):

$3y^2 - 6 = 0 \Rightarrow y^2 - 2 = 0 \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$. Одержали дві стаціонарні точки: $y = \sqrt{2}$ і $y = -\sqrt{2}$. Точка $y = -\sqrt{2}$ не входить у відрізок $[-1, 2]$ тому її не розглядаємо. Далі знаходимо значення функції $z = y^3 - 6y + 8$ в стаціонарній точці $y = \sqrt{2}$ і на кінцях відрізка, тобто в точках B і C . Але значення функції в точці B у нас вже знайдено. Тому: $z(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 8 = 8 - 4\sqrt{2} \approx 2,34$, $z(2) = 4$. Ці значення ми знайшли за умови, що $x = 2$. Тобто повертаємося до функції двох змінних і перевизначаємо знайдені значення функції: $z(2, \sqrt{2}) = z(M_3) = 8 - 4\sqrt{2} \approx 2,34$, $z(2, 2) = z(C) = 4$.

Переходимо до границі DC . Дивимось рис. 16. Рівняння лінії $y = 2$. Підставимо це значення в рівняння функції: $z = x^3 + y^3 - 3x \cdot y$. Одержимо $z = x^3 - 6x + 8$. Формулюємо задачу: знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^3 - 6x + 8$, яка задана на відрізку $[0, 2]$. Знайдемо похідну $z' = 3x^2 - 6$. Прирівняємо її нулю (для знаходження стаціонарних точок): $3x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Одержали дві стаціонарні точки: $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$. Точка $x = -\sqrt{2}$ не входить у відрізок $[0, 2]$. Далі знаходимо значення функції $z = x^3 - 6x + 8$ в стаціонарній точці $x = \sqrt{2}$ і на кінцях відрізка, тобто в точках D і C . Але значення функції в точці C у нас вже знайдено. Тому: $z(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 8 = 8 - 4\sqrt{2} \approx 2,34$, $z(0) = 8$. Ці значення ми знайшли за умови,

що $y=2$. Тобто повертаємося до функції двох змінних і перевизначаємо знайдені значення функції: $z(\sqrt{2}, 2) = z(M_4) = 8 - 2\sqrt{2} \approx 2,34$, $z(0, 2) = z(D) = 8$.

I, нарешті, границя AD . Дивимось рис. 16. Все аналогічно. Рівняння границі AD : $x=0$. Рівняння функції $z=y^3$. Формулюємо задачу: знайти найбільше і найменше значення функції $z=y^3$ на відрізку $[-1, 2]$. Похідна $z'=3y^2$, стаціонарна точка $y=0$, яка лежить всередині відрізка $[-1, 2]$. Знаходимо значення функції $z=y^3$ в стаціонарній точці і на кінцях відрізка, тобто в точках A і D . Але в цих точках значення функції вже знайдені. Тоді $z(0)=0$. Повертаємося до функції двох змінних і перевизначаємо знайдене значення функції: $z(0, 0) = z(M_1) = 0$. Нагадаємо, що точка $M_1(0, 0)$ зустрічалась нам на початку розв'язання прикладу. Отже прийшла і її черга.

3. Тепер випишемо усі знайдені значення функції.

$$\begin{aligned} z(0, 0) = z(M_1) = 0, & \quad z(1, 1) = z(M_2) = -1, & \quad z(2, \sqrt{2}) = z(M_3) = 8 - 4\sqrt{2} \approx 2,34, \\ z(\sqrt{2}, 2) = z(M_4) = 8 - 2\sqrt{2} \approx 2,34, & \quad z(0, -1) = z(A) = -1, & \quad z(2, -1) = z(B) = 13, \\ z(2, 2) = z(C) = 4, & \quad z(0, 2) = z(D) = 8. \end{aligned}$$

З одержаних чисел знаходимо найбільше і найменше.

Найбільшого значення в області D функція досягає в точці $B(2, -1)$ і воно дорівнює 13. $z(2, -1) = z(B) = 13$

Найменшого значення в області D функція досягає в точках $M_2(1, 1)$ і $A(0, -1)$ і воно дорівнює -1. $z(1, 1) = z(M_2) = -1$, $z(0, -1) = z(A) = -1$.

Приклад 4. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 2x^2 + 2x \cdot y - \frac{1}{2}y^2 - 4x$ в області D , яка обмежена лініями: $y = 2x$, $y = 2$, $x = 0$.

Розв'язання.

Спочатку зробимо рисунок заданої області D .

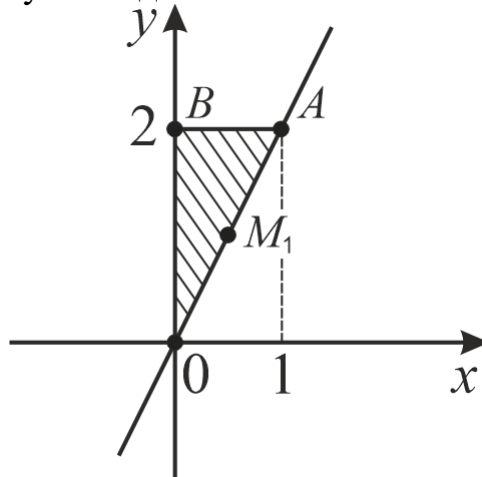


Рисунок 17

А тепер будемо користуватися алгоритмом знаходження найбільшого і найменшого значень функції двох змінних, яка задана в замкненій області D .

1. Знайдемо частинні похідні функції: $z'_x = 4x + 2y - 4$, $z'_y = 2x - y$. Для знаходження стаціонарних точок прирівнюємо їх нулю. Одержимо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} 4x + 2y - 4 = 0, \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2, \\ y = 2x \end{cases}$$

Звідси $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$. Одержали стаціонарну точку: $M_1(\frac{1}{2}, 1)$ – вона належить лінії OA , тому ми її зараз розглядати не будемо, тому що ця точка зустрінеться пізніше, коли будуть досліджуватися границі області. Виходить, що стаціонарних точок всередині області D немає, тому переходимо до дослідження функції на лініях, які обмежують задану область.

2. Почнемо з лінії OA . Дивимося рис. 17. Рівняння лінії OA $y = 2x$. Підставимо це значення в рівняння функції: $z = 2x^2 + 2x \cdot y - \frac{1}{2}y^2 - 4x$ і одержимо: $z = 4x^2 - 4x$. Як бачимо це функція однієї змінної x і можна сформулювати таку задачу: знайти найбільше і найменше значення функції $z = 4x^2 - 4x$, яка задана на відрізку $[0, 1]$. Пояснимо, чому такий відрізок. Якщо подивитись на рисунок 17, то видно, що коли змінна точка прямує вздовж лінії $y = 2x$ від точки O до точки A , то x змінюється від 0 до 1. До речі, якщо б лінію OA ми записали у вигляді $x = \frac{1}{2}y$, тобто перейшли до змінної y , то відрізок був би $[0, 2]$.

Повертаємося до функції $z = 4x^2 - 4x$, яка задана на відрізку $[0, 1]$. Знайдемо похідну, потім стаціонарні точки: $z' = 8x - 4$, $x = \frac{1}{2}$ – стаціонарна точка (лежить всередині відрізка $[0, 1]$). Знайдемо значення функції $z = 4x^2 - 4x$ в стаціонарній точці і на кінцях відрізка, тобто в точках O і A . $z(\frac{1}{2}) = -1$, $z(0) = 0$, $z(1) = 0$. Але ці значення ми знайшли за умови, що $y = 2x$. Тобто повертаємося до функції двох змінних і перевизначаємо знайдені значення функції: $z(\frac{1}{2}, 1) = z(M_1) = -1$, $z(0, 0) = z(O) = 0$, $z(1, 2) = z(A) = 0$.

Переходимо до границі BA . Дивимося рис. 17. Рівняння лінії BA $y = 2$. Підставимо це значення в рівняння функції і одержимо: $z = 2x^2 - 2$. Формулюємо таку задачу: знайти найбільше і найменше значення функції $z = 2x^2 - 2$, яка задана на відрізку $[0, 1]$. А далі, як завжди: похідна $z' = 4x$, стаціонарна точка $x = 0$. Вона співпадає з лівою границею відрізка $[0, 1]$. Тому знайдемо значення функції $z = 2x^2 - 2$ на кінцях цього відрізка, тобто в точці B (помітимо, що в точці A значення функції вже відомо). $z(0) = -2$. Але це значення ми знайшли за умови, що $y = 2$. Повертаємося до функції двох змінних і перевизначаємо знайдене значення функції: $z(0, 2) = z(B) = -2$.

Нарешті переходимо до границі OB . Дивимось рис. 17. Рівняння лінії OB $x=0$. Підставимо це значення в рівняння функції і одержимо: $z = -\frac{1}{2}y^2$. Формулюємо задачу: знайти найбільше і найменше значення функції $z = -\frac{1}{2}y^2$, яка задана на відрізку $[0, 2]$.

Похідна $z' = -y$, стаціонарна точка $y=0$. Вона співпадає з лівою границею відрізка $[0, 2]$. Тепер потрібно знайти значення функції $z = -\frac{1}{2}y^2$ на кінцях відрізка, тобто в точках O і B . Але ці значення вже знайдені в попередніх обчисленнях.

Отже, збираємо всю інформацію: Була одержана одна стаціонарна точка $M_1(\frac{1}{2}, 1)$, але вона належить границі OA і за алгоритмом в пункті 1. ми її не розглядали.

3. Випишуємо значення функції $z = 2x^2 + 2x \cdot y - \frac{1}{2}y^2 - 4x$ в точках O , M_1 , A і B :

$$z(0,0) = z(O) = 0, \quad z(\frac{1}{2}, 1) = z(M_1) = -1, \quad z(1, 2) = z(A) = 0, \quad z(0, 2) = z(B) = -2.$$

З одержаних чисел знаходимо найбільше і найменше.

Найбільшого значення в області D функція досягає в точках $O(0,0)$ і $A(1, 2)$ і воно дорівнює 0. $z(0,0) = z(O) = 0$, $z(1, 2) = z(A) = 0$.

Найменшого значення в області D функція досягає в точці $B(0, 2)$ і воно дорівнює -2 . $z(0, 2) = z(B) = -2$.

Приклад 5. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 2x \cdot y - 10$ в області D , яка обмежена лініями: $y=0$, $y = x^2 - 4$.

Розв'язання.

Спочатку зробимо рисунок заданої області.

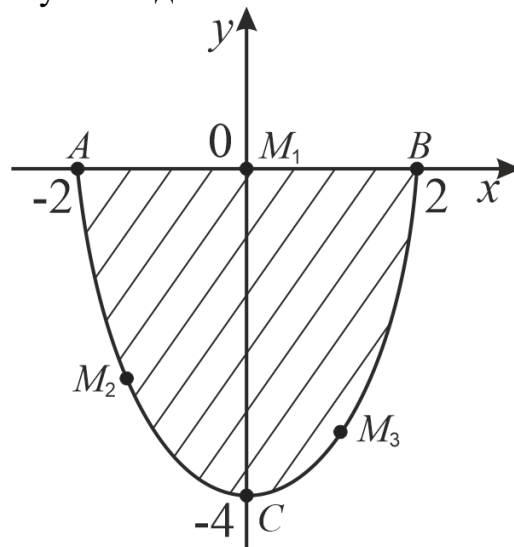


Рисунок 18

1. Знайдемо частинні похідні функції: $z'_x = 2x + 2y$, $z'_y = 2x$. Для

знаходження стаціонарних точок прирівнюємо їх нулю. Одержимо систему двох рівнянь з двома невідомими: $\begin{cases} 2x+2y=0, \\ 2x=0 \end{cases}$ звідси $x=0$, $y=0$. Одержали

стаціонарну точку: $M_1(0,0)$ – вона належить лінії AB (тобто не лежить всередині області D) і розглядати її зараз ми не будемо. Переходимо до дослідження функції на лініях, які обмежують задану область.

2. Почнемо з лінії AB . Дивимось рис. 18. Рівняння лінії $y=0$. Підставимо це значення в рівняння функції $z=x^2+2x\cdot y-10$ і одержимо: $z=x^2-10$. Формулюємо задачу: знайти найбільше і найменше значення функції $z=x^2-10$, яка задана на відрізку $[-2,2]$.

Знайдемо похідну $z=2x$, прирівнюємо її нулю і одержимо стаціонарну точку $x=0$. Вона лежить всередині відрізка $[-2,2]$. Тому знайдемо значення функції $z=x^2-10$ в цій точці і на кінцях відрізка: $z(-2)=-6$, $z(0)=-10$, $z(2)=-6$. Тепер, як завжди, помічаємо, що ці значення були знайдені за умови $y=0$. Тому повертаємося до функції двох змінних і перевизначаємо знайдені значення функції: $z(-2,0)=z(A)=-6$, $z(0,0)=z(M_1)=-10$, $z(2,0)=z(B)=-6$. До речі, знайдено значення функції в точці M_1 , яку ми в пункті 1. не розглядали.

Далі перейдемо до лінії ACB . Дивимось рис. 18. Рівняння лінії $y=x^2-4$. Підставимо в рівняння функції $z=x^2+2x\cdot y-10$ замість y вираз x^2-4 і одержимо функцію $z=x^2+2x(x^2-4)-10 \Rightarrow z=2x^3+x^2-8x-10$. Можна було б перейти до змінної y , але функція z була б більш складною. Формулюємо задачу: знайти найбільше і найменше значення функції $z=2x^3+x^2-8x-10$, яка задана на відрізку $[-2,2]$. А далі, як завжди: $z'=6x^2+2x-8$, прирівнюємо її нулю

$6x^2+2x-8=0 \Rightarrow 3x^2+x-4=0$, знаходимо стаціонарні точки: $x=-\frac{4}{3}$, $x=1$. Обидві точки лежать всередині відрізка $[-2,2]$. Тому знаходимо значення функції

$z=2x^3+x^2-8x-10$ в цих точках і на кінцях відрізка. Але в точках A і B (тобто на кінцях відрізка) значення функції вже знайдені. Тому знаходимо значення функції тільки в стаціонарних точках. $z(-\frac{4}{3})=2(-\frac{4}{3})^3+(-\frac{4}{3})^2-8(-\frac{4}{3})-10=-\frac{62}{27}$,

$z(1)=-15$. Далі, як завжди, помічаємо, що ці значення були знайдені за умови $y=x^2-4$. Тому повертаємося до функції двох змінних і перевизначаємо

знайдені значення: якщо $x=-\frac{4}{3}$, то $y=x^2-4=(-\frac{4}{3})^2-4=-\frac{20}{9}$. Тоді

$z(-\frac{4}{3},-\frac{20}{9})=z(M_2)=-\frac{62}{27}$; якщо $x=1$, то $y=x^2-4=-3$. Тоді $z(1,-3)=z(M_3)=-15$.

3. Випишуємо значення функції $z=x^2+2x\cdot y-10$ в точках A , B , M_1 , M_2 , M_3

$z(-2,0)=z(A)=-6$, $z(2,0)=z(B)=-6$, $z(0,0)=z(M_1)=-10$, $z(-\frac{4}{3},-\frac{20}{9})=z(M_2)=-\frac{62}{27}$,

$z(1,-3)=z(M_3)=-15$.

З одержаних чисел знаходимо найбільше і найменше.

Найбільшого значення функція досягає в точці M_2 : $z(-\frac{4}{3}, -\frac{20}{9}) = z(M_2) = -\frac{62}{27}$.

Найменшого значення функція досягає в точці M_3 : $z(1, -3) = z(M_3) = -15$.

Приклади для аудиторної роботи

Приклад 1. Дослідити функцію $z = 2x^2 + 3y^3 - x \cdot y$ на екстремум.

Приклад 2. Дослідити функцію $z = \sqrt{x} \cdot y - x - y^2 + 6y$ на екстремум.

Приклад 3. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 4x^2 - 2x \cdot y + y^2 + 1$ в області D , яка задана лініями $x + y - 4 = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

Приклад 4. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 - y^2 + 2x - 3y$ в області D , яка задана лініями $y = -3$, $y = 2$, $x = 1$, $x = 4$.

Приклади для самостійної роботи

Приклад 1. Дослідити функцію $z = x^2 + y^2 + x \cdot y - 2x - y$ на екстремум.

Приклад 2. Дослідити функцію $z = 2x \cdot y - 3x - 2y^2 + 10$ на екстремум.

Приклад 3. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в області D , яка задана лініями $y = -3x$, $y = 0$, $x = -1$.

Відповіді: **Приклад 1.** $z(1, 0) = -1$ – мінімум. **Приклад 2.** В точці $(3, \frac{3}{2})$ екстремуму немає. **Приклад 3.** Найбільше значення $z(-1, 3) = 24$; найменше значення $z(-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}) = -\frac{1}{3}$.

7. УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Почнемо із прикладів застосування цієї теми:

- оптимізація конструкції при обмеженні на об'єм і масу;
- визначення найкоротшого шляху з урахуванням обмежень (наприклад з урахуванням рельєфу);
- максимізація прибутку при фіксованих ресурсах (обмеження на бюджет, або на матеріали).

А тепер перейдемо до вивчення цієї теми.

Означення. Екстремум функції двох змінних $z = f(x, y)$, який досягається за умови, що змінні x і y зв'язані рівнянням $\varphi(x, y) = 0$ називається **умовним екстремумом** функції $z = f(x, y)$.

Рівняння $\varphi(x, y) = 0$ називається **рівнянням зв'язку**.

Розглянемо метод відшукування умовного екстремуму за допомогою множників Лагранжа, або його ще називають **методом Лагранжа**.

1. Складемо функцію виду $u(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$, яку називають функцією Лагранжа, де λ – множник Лагранжа.

2. Знайдемо стаціонарні точки функції Лагранжа із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \quad (7.1)$$

3. Перевіримо виконання достатніх умов існування екстремуму в кожній стаціонарній точці M за допомогою визначника третього порядку $\Delta(M)$:

$$\Delta(M) = \begin{vmatrix} 1 & \varphi'_x(M) & \varphi'_y(M) \\ \varphi'_x(M) & u''_{xx}(M) & u''_{xy}(M) \\ \varphi'_y(M) & u''_{xy}(M) & u''_{yy}(M) \end{vmatrix} \quad (7.2)$$

Якщо визначник $\Delta(M) > 0$, то точка M є точкою **умовного максимуму** функції $z = f(x, y)$.

Якщо визначник $\Delta(M) < 0$, то точка M є точкою **умовного мінімуму** функції $z = f(x, y)$.

Зауваження. Відшукування умовного екстремуму можна проводити і іншим методом, а саме досліджуючи знак другого диференціала функції Лагранжа:

$$d^2L = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^2 L. \text{ Докладніше див. [1, с.425].}$$

Приклад 1. Знайти екстремум функції $z = x \cdot y$ за умови, що змінні x і y зв'язані рівнянням $2x + 3y - 5 = 0$.

Розв'язання.

1. Складаємо функцію Лагранжа $u(x, y, \lambda) = x \cdot y + \lambda(2x + 3y - 5)$.

2. Знаходимо стаціонарні точки функції Лагранжа (для цього складаємо систему (7.1)):

$$\begin{cases} u'_x = y + 2\lambda = 0, \\ u'_y = x + 3\lambda = 0, \\ 2x + 3y - 5 = 0. \end{cases} \text{ звідси знаходимо: } x = \frac{5}{4}, y = \frac{5}{6}, \lambda = -\frac{5}{12}.$$

Тобто, точка $M(\frac{5}{4}, \frac{5}{6})$ є стаціонарною точкою функції $z = x \cdot y$.

3. Перевіряємо виконання достатніх умов існування екстремуму в точці M за допомогою визначника третього порядку $\Delta(M)$ (7.2). Для цього обчислимо елементи визначника (нагадаємо, що рівняння $\varphi(x, y) = 0$ називають рівнянням зв'язку). У прикладі $\varphi(x, y) = 2x + 3y - 5$: тоді $\varphi'_x(M) = 2$, $\varphi'_y(M) = 3$.

$$u''_{xx} = 0 = u''_{xx}(M) = 0, u''_{xy} = 1 = u''_{xy}(M) = 1, u''_{yy} = 0 = u''_{yy}(M) = 0.$$

$$\Delta(M) = \begin{vmatrix} 1 & \varphi'_x(M) & \varphi'_y(M) \\ \varphi'_x(M) & u''_{xx}(M) & u''_{xy}(M) \\ \varphi'_y(M) & u''_{xy}(M) & u''_{yy}(M) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 11 > 0$$

Оскільки $\Delta(M) > 0$, то точка M є точкою умовного максимуму, причому

$$z(M) = z(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}) = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{24}.$$

Приклад 2. На площині xOy задана фігура, яка обмежена осями координат і параболою $y = 3 - x^2$, ($0 \leq x \leq \sqrt{3}$). Необхідно вписати в цю фігуру прямокутник зі сторонами паралельними осям координат, одна з вершин якого знаходиться на цій параболі так, щоб площа прямокутника була найбільшою.

Розв'язання.

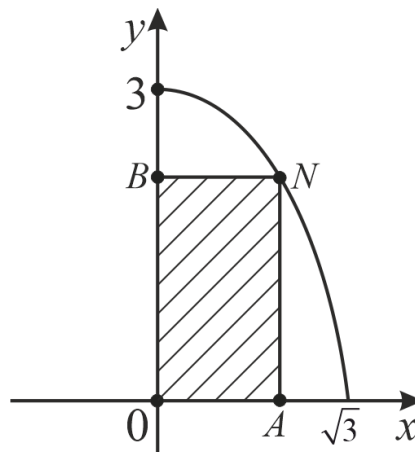


Рисунок 16

Площу прямокутника запишемо у вигляді: $S = x \cdot y$. Точку прямокутника, яка належить параболі позначимо $N(x, y)$. Координати цієї точки повинні задовольняти рівнянню $y = 3 - x^2$. Отже формулюємо задачу. Дослідити на

умовний екстремум функцію $S = x \cdot y$ за наявності рівняння зв'язку $y = 3 - x^2$. Запишемо це рівняння інакше $x^2 + y - 3 = 0$. Далі складемо функцію Лагранжа:

$u(x, y, \lambda) = x \cdot y - \lambda(x^2 + y - 3)$ і знайдемо частинні похідні по змінним x, y, λ .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y - 2\lambda \cdot x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x - \lambda, \quad \frac{\partial u}{\partial \lambda} = -(x^2 + y - 3). \text{ Прирівняємо їх нулю і}$$

розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y - 2\lambda \cdot x = 0, \\ x - \lambda = 0, \\ x^2 + y - 3 = 0 \end{cases}$$

Не будемо тут приводити розв'язання цієї системи, а запишемо відповідь: $x=1, y=2, \lambda=1$. Одержали одну стаціонарну точку $M(1, 2)$. Перевіримо виконання достатніх умов існування екстремуму в цій точці за допомогою визначника (7.1).

$$\Delta(M) = \begin{vmatrix} 1 & \varphi'_x(M) & \varphi'_y(M) \\ \varphi'_x(M) & u''_{xx}(M) & u''_{xy}(M) \\ \varphi'_y(M) & u''_{xy}(M) & u''_{yy}(M) \end{vmatrix}$$

Нагадаємо, що рівняння $\varphi(x, y) = 0$ називають рівнянням зв'язку. У прикладі $\varphi(x, y) = y^2 + x - 3$. Знайдемо складові визначника.

$$\varphi'_x(M) = 1, \quad \varphi'_y(M) = 4, \quad u''_{xx}(M) = -2, \quad u''_{xy}(M) = 1, \quad u''_{yy}(M) = 0.$$

Обчислимо визначник:

$$\Delta(M) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 39$$

Таким чином, функція $S = x \cdot y$ має в точці $M(1, 2)$ умовний максимум. І серед усіх вписаних прямокутників найбільшу площу буде мати прямокутник зі сторонами $OA=1, OB=2$.

Зауваження.

Ми розглянули три важливі теми: знаходження екстремуму (локального) функції; знаходження найбільшого і найменшого значень функції (глобального екстремуму); знаходження умовного екстремуму функції. Взагалі ці теми чимось схожі. Але, зрозуміло, різниця існує. Давайте розберемо цей аспект докладніше.

Локальний екстремум

Точка (x_0, y_0) — точка локального максимуму, якщо існує окіл, в якому виконується нерівність $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$.

Точка (x_0, y_0) — точка локального мінімуму, якщо існує окіл, в якому виконується нерівність $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$.

Інакше: функція приймає найбільше, або найменше значення тільки в

деякому, може бути, достатньо малому околі точки (x_0, y_0) .

Приклад. Функція $f(x, y) = x^2 + y^2$ має мінімум (локальний) в точці $(0, 0)$. Максимуму немає.

Глобальний екстремум

Точка (x_0, y_0) – точка глобального максимуму, якщо $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ для усіх значень (x, y) в заданій області.

Точка (x_0, y_0) – точка глобального мінімуму, якщо $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ для усіх значень (x, y) в заданій області.

Інакше: функція приймає найбільше і найменше значення в заданій області.

Приклад. Функція $f(x, y) = x^2 + y^2$ задана в області $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$, має глобальний мінімум в точці $(0, 0)$, а глобальний максимум в точці $(1, 2)$.

Умовний екстремум

Екстремум функції $f(x, y)$, знайдений при виконанні додаткової умови(обмеження) $\varphi(x, y) = 0$.

Інакше: шукаємо екстремум не на всій області, а тільки на лінії, яка задається рівнянням $\varphi(x, y) = 0$.

Приклад. Знайти екстремум функції $f(x, y) = x^2 + y^2$ за умови $x + y = 1$. Маємо умовний мінімум в точці $(0, 5; 0, 5)$.

8. ДОТИЧНА ПЛОЩИНА І НОРМАЛЬ ДО ПОВЕРХНІ

Нехай задана поверхня $z = f(x, y)$ (в неявному виді: $F(x, y, z) = 0$) (рис.19).

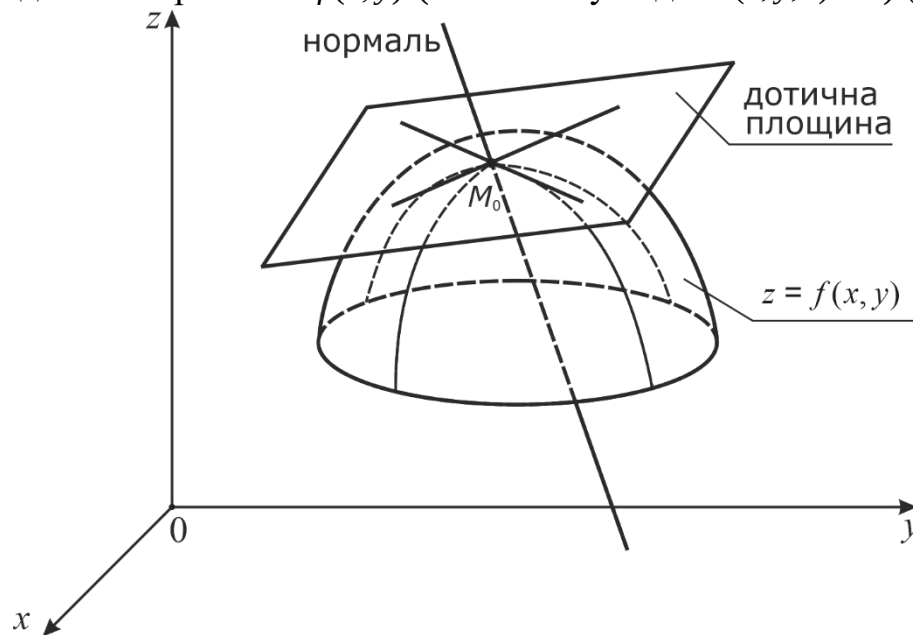


Рисунок 19.

Означення. Пряма лінія називається **дотичною** до поверхні $F(x, y, z) = 0$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, якщо вона є дотичною до деякої кривої, яка належить поверхні і проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Але через точку M_0 проходить нескінченна кількість кривих, які належать поверхні тому і дотичних буде нескінченна кількість.

Означення. Якщо в точці M_0 поверхні $F(x, y, z) = 0$ всі три похідні F'_x, F'_y, F'_z дорівнюють нулю, або хоча б одна з них не існує, то M_0 називається **особливою точкою** поверхні (наприклад, вершина конуса).

Означення. Якщо в точці M_0 всі три похідні F'_x, F'_y, F'_z існують і неперервні і хоча б одна з них не дорівнює нулю, то точка M_0 називається **звичайною точкою** поверхні.

Теорема. Якщо M_0 звичайна точка поверхні $F(x, y, z) = 0$, то **всі** дотичні прямі до цієї поверхні в т. M_0 лежать в одній площині.

Означення. Площина, в якій розміщені всі дотичні прямі до поверхні $F(x, y, z) = 0$ в т. M_0 називається **дотичною площиною**.

Означення. Пряма, яка проходить через т. M_0 поверхні $F(x, y, z) = 0$ перпендикулярно до дотичної площини називається **нормаллю до поверхні** в т. M_0 .

За якими формулами можна знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні?

Якщо рівняння поверхні має вид $F(x, y, z) = 0$, то: **рівняння дотичної площини:**

$$F'_x(M_0)(x-x_0) + F'_y(M_0)(y-y_0) + F'_z(M_0)(z-z_0) = 0 \quad (8.1)$$

рівняння нормалі:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(M_0)} \quad (8.2)$$

Якщо рівняння поверхні має вид $z = f(x, y)$, то **рівняння дотичної площини:**

$$z - z_0 = f'_x(M_0)(x - x_0) + f'_y(M_0)(y - y_0) \quad (8.3)$$

рівняння нормалі:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{-1} \quad (8.4).$$

Декілька зауважень: від рівняння поверхні у виді $z = f(x, y)$ можна легко перейти до рівняння $F(x, y, z) = 0$. Дійсно $z = f(x, y) \Rightarrow z - f(x, y) = 0$. Тобто не обов'язково запам'ятовувати дві пари формул: (8.1), (8.2) і (8.3), (8.4). І ще: на перший погляд формули достатньо громіздкі, але якщо уважно роздивитись їх, то можна зробити висновок, що потрібно тільки знайти частинні похідні в точці M_0 і підставити одержані числа у відповідні формули.

Запишемо всі формули розділу 8 у табл.8.1.

Таблиця 8.1

рівняння поверхні $F(x, y, z) = 0$	рівняння дотичної площини	$F'_x(M_0)(x-x_0) + F'_y(M_0)(y-y_0) + F'_z(M_0)(z-z_0) = 0$
	рівняння нормалі	$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$
рівняння поверхні $z = f(x, y)$	рівняння дотичної площини	$z - z_0 = f'_x(M_0)(x - x_0) + f'_y(M_0)(y - y_0)$
	рівняння нормалі	$\frac{x-x_0}{f'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$

Питання для самоперевірки

1. Що таке особлива і звичайна точки поверхні?
2. Що таке нормаль до поверхні?
3. Який вид має рівняння дотичної площини, якщо поверхня задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$?
4. Який вид має рівняння нормалі, якщо поверхня задана у виді $z = f(x, y)$?

Розв'язання прикладів

Розділ 1(найпростіші приклади)

Приклад 1. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні

$x^3 + 4y^3 - 2z^2 + 5 = 0$ в точці $M_0(-1, 1, 2)$.

Розв'язання.

Тут потрібно користуватися формулами (8.1), (8.2).

$F(x, y, z) = x^3 + 4y^3 - 2z^2 + 5$. Знайдемо частинні похідні від функції $F(x, y, z)$ по змінним x, y, z . А потім обчислимо їх в заданій точці.

$$F'_x = 3x^2, F'_y = 12y^2, F'_z = -4z.$$

$$F'_x(M_0) = F'_x(-1, 1, 2) = 3,$$

$$F'_y(M_0) = F'_y(-1, 1, 2) = 12,$$

$$F'_z(M_0) = F'_z(-1, 1, 2) = -8.$$

Підставляємо знайдені числа у формулу (8.1):

$3(x+1) + 12(y-1) - 8(z-2) = 0$. Розкриваємо дужки і записуємо рівняння площини в загальному виді.

$$3x + 3 + 12y - 12 - 8z + 16 = 0 \Rightarrow 3x + 12y - 8z + 7 = 0.$$

Отже, $3x + 12y - 8z + 7 = 0$ – рівняння дотичної площини до поверхні $x^3 + 4y^3 - 2z^2 - 6 = 0$ в точці $M_0(-1, 1, 2)$.

Рівняння нормалі одержуємо зразу за формулою (8.2):

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{12} = \frac{z-2}{-8}.$$

Приклад 2. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = 2x^3 - y^2 + 3x \cdot y - 5e^{3y} - 11$ в точці $M_0(2, 0, 3)$.

Розв'язання.

В цьому прикладі рівняння площини задано у виді $z = f(x, y)$ і користуватися потрібно формулами (8.3), (8.4). Але можна легко перейти до виду поверхні $F(x, y, z) = 0$ ($2x^3 - y^2 + 3x \cdot y - 5e^{3y} - 11 - z = 0$) і користуватися формулами (8.1), (8.2). Повернемося до формул (8.3), (8.4). Позначимо $f(x, y) = 2x^3 - y^2 + 3x \cdot y - 5e^{3y} - 11$ і знайдемо частинні похідні по змінним x і y , а потім обчислимо їх значення в точці M_0 .

$$f'_x = 6x^2 + 3y, f'_y = -2y + 3x - 15e^{3y}.$$

$$f'_x(M_0) = f'_x(2, 0, 3) = 24, f'_y(M_0) = f'_y(2, 0, 3) = -9.$$

Далі застосовуємо формулу (8.3): $z - z_0 = f'_x(M_0)(x - x_0) + f'_y(M_0)(y - y_0)$

$z - 3 = 24(x - 2) - 9(y - 0)$. Розкриваємо дужки і записуємо рівняння площини в загальному виді. $24x - 9y - z - 45 = 0$.

Рівняння нормалі одержуємо зразу за формулою (8.4):

$$\frac{x - x_0}{f'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$
$$\frac{x - 2}{24} = \frac{y}{9} = \frac{z - 3}{-1}.$$

Приклади для аудиторної роботи

Приклад 1. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^2 + 3y^3 - 2z^2 + y \cdot z + 30 = 0$ в точці $M_0(3, -1, 4)$.

Приклад 2. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = e^{2x+y} - x^2 \cdot y + \sqrt{y} + 13$ в точці $M_0(-2, 4, 0)$.

Приклад 3. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = \ln \frac{y}{x^2} + 3$ в точці $M_0(-1, 1, 3)$.

Приклади для самостійної роботи

Приклад 1. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $3x^3 - 2y^2 + 7x^2 \cdot y + 2z^2 + 6 = 0$ в точці $M_0(0, 2, -1)$.

Приклад 2. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = x^2 + 2y^3 - 4x \cdot y - 19$ в точці $M_0(3, -1, 0)$.

Відповіді: Приклад 1. $2y + z - 3 = 0$ – рівняння площини, $\frac{x}{0} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z+1}{-4}$ або $\frac{x}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$ – рівняння нормалі. Зауваження до рівняння нормалі: нагадаємо,

що канонічне рівняння прямої у просторі має такий вид: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$,

де (x_0, y_0, z_0) координати точки, яка належить прямій, $\{m, n, p\}$ – проекції напрямного вектора. А m це проекція вектора на вісь OX . Отже те, що вона дорівнює нулю означає, що вектор перпендикулярний цій осі.

Приклад 2. $10x - 6y - z - 36 = 0$ – рівняння площини, $\frac{x-3}{10} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z}{-1}$ – рівняння нормалі.

9. СКАЛЯРНЕ ПОЛЕ. ПОХІДНА ЗА НАПРЯМОМ. ГРАДІЄНТ

9.1 Скалярне поле

Почнемо із прикладів застосування цієї теми:

- визначення напрямку максимальної швидкості зростання температури, тиску;
- спрямування найбільшого ухилу рельєфу;
- визначення напрямку, в якому прибуток збільшується найшвидше.

А тепер перейдемо до вивчення цієї теми.

Розглянемо область D . Якщо кожній точці $M(x, y, z)$ із області D можна поставити у відповідність значення деякої скалярної величини $u(M)$, то кажуть, що в області D задано **скалярне поле** $u(M)$. Зразу зауважимо, що $u(M)$ це просто функція трьох змінних $u = u(x, y, z)$. Тобто в різних розділах математики вона називається по-різному. В розділі "Теорія поля", цю функцію називають скалярним полем. І далі, в цьому розділі, ми іноді будемо застосовувати класичне означення функції $u = u(x, y, z)$ (тобто функція трьох змінних) а іноді будемо називати її скалярним полем.

Наприклад, якщо в області D $u(M) = u(x, y, z)$ визначає температуру t^0 в точці $M(x, y, z)$, то кажуть, що в області D задано скалярне поле температур.

Прикладами скалярних полів є поле атмосферного тиску, поле потенціалів електростатичного поля, поле температури тіла.

Якщо область D знаходиться в площині XOY (або YOZ , XOZ) то скалярне поле буде характеризуватися функцією двох змінних.

Скалярне поле, яке змінюється з часом називається **нестационарним**. Якщо поле не залежить від часу його називають **стационарним**.

Розглянемо точки області D в яких функція $u = u(x, y, z)$ має стале значення C .

Означення. Поверхнею рівня скалярного поля називається геометричне місце точок, в яких функція $u(M) = u(x, y, z)$ приймає стале значення, тобто $u(x, y, z) = C$.

Якщо скалярна функція залежить від двох змінних, тобто $u(M) = u(x, y)$, то $u(x, y) = C$ – це **лінія рівня**.

Різними значеннями $C_1, C_2, \dots$ відповідають різні поверхні (лінії) рівня. Взагалі це можна записати так: $u(M) = C_i, i = 1, 2, 3, \dots$. Через кожну точку скалярного поля проходить тільки одна поверхня (лінія) рівня. Вони заповнюють всю область D і не перетинаються.

Помітимо, що на початку посібника ми розглядали поняття поверхонь і ліній рівня в загальному виді.

Для характеристики швидкості зміни скалярного поля застосовують похідну за напрямом.

9.2 Похідна за напрямом

Спочатку нагадаємо деякий теоретичний матеріал, яким будемо користуватися в цьому розділі.

У тривимірному просторі вектор $\vec{a}$ можна записати у виді:

$$\vec{a}\{a_x; a_y; a_z\}, \text{ або } \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

де a_x, a_y, a_z – проекції вектора на відповідні осі координат.

Модуль вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Напрямні косинуси вектору:

$$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma,$$

де α – кут між додатнім напрямом осі OX і вектором $\vec{a}$; β – кут між додатнім напрямом осі OY і вектором $\vec{a}$; γ – кут між додатнім напрямом осі OZ і вектором $\vec{a}$.

Напрямні косинуси обчислюються за формулами:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Якщо вектор $\vec{a}$ розглядається у двовимірному просторі, то, зрозуміло, що проекція a_z і кут γ будуть відсутні.

Нехай в області D задана функція $z = f(x, y)$, неперервна разом із своїми частинними похідними.

Розглянемо в області D точку $M(x, y)$. Проведемо із цієї точки вектор $\vec{s}$, напрямні косинуси якого $\cos \alpha, \cos \beta$. На векторі $\vec{s}$ розглянемо точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Позначимо $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Повний приріст функції $z = f(x, y)$ буде мати вид: $\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \varepsilon$, де $\varepsilon \rightarrow 0$ коли $\Delta s \rightarrow 0$. Розділимо цю рівність на Δs і отримаємо: $\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\varepsilon}{\Delta s}$.

Означення. Границя відношення $\frac{\Delta z}{\Delta s}$, коли $\Delta s \rightarrow 0$ називається похідною від функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$ за напрямом вектору $\vec{s}$ (**похідною за напрямом**) яка обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial z(M)}{\partial s} = \frac{\partial z(M)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z(M)}{\partial y} \cos \beta \quad (9.1)$$

Помітимо, що частинні похідні від функції $z = f(x, y)$ є частинними випадками похідної за напрямом. Наприклад, якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$ а $\beta = 0$ ($\cos \alpha = \cos \frac{\pi}{2} = 0, \cos \beta = \cos 0 = 1$), то $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\partial z}{\partial y} \cos 0 = \frac{\partial z}{\partial y}$. Тут вектор $\vec{s}$ паралельний додатному напрямку осі OY .

Якщо розглядається функція трьох змінних $u = f(x, y, z)$ і вектор $\vec{s}$ має три напрямних косинуса $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, то **похідна за напрямом** вектора $\vec{s}$ в точці $M(x, y, z)$ буде обчислюватись за формулою:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial s} = \frac{\partial u(M)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(M)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u(M)}{\partial z} \cos \gamma \quad (9.2)$$

Якщо похідну за напрямом будемо знаходити в довільній точці, то іноді цю формулу будемо записувати без літери M . Це стосується і формули (9.1).

Абсолютна величина похідної за напрямом $\left| \frac{\partial u}{\partial \vec{s}} \right|$ визначає швидкість зміни скалярного поля $u(M)$ в точці M за напрямом вектора $\vec{s}$. А знак похідної за напрямом визначає характер її зміни (зростає чи спадає).

В кожній точці області D , де функція $u(M) = u(x, y, z)$ диференційована, вона має похідну по якому завгодно напрямку.

Мають місце наступні **твердження**:

Похідна за напрямом, дотичним до лінії рівня поверхні $z = f(x, y)$ дорівнює нулю.

Похідна за напрямом, дотичним до поверхні рівня функції $u = f(x, y, z)$ дорівнює нулю.

Точки в яких похідна за яким завгодно напрямом дорівнює нулю називаються **стаціонарними** точками.

Приклад. Знайти похідну скалярного поля $z = x^2 y - x \cdot y$ в точці $M_0(3, 1)$ за напрямом вектора $\vec{s} \{2, -3\}$.

Розв'язання.

Застосуємо формулу (9.1): $\frac{\partial z(M)}{\partial s} = \frac{\partial z(M)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z(M)}{\partial y} \cos \beta$. За умовою прикладу похідну за напрямом потрібно знайти в заданій точці $M_0(3, 1)$ тому формулу (9.1) запишемо так: $\frac{\partial z(M_0)}{\partial s} = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} \cos \beta$.

Знайдемо частинні похідні z'_x і z'_y в точці $M_0(3, 1)$.

$$z'_x = 2x \cdot y - y, \quad z'_x(M) = z'_x(3, 1) = 5. \quad z'_y = x^2 - x, \quad z'_y(M) = z'_y(3, 1) = 6.$$

Переходимо до знаходження напрямних косинусів $\cos \alpha$ і $\cos \beta$ вектора $\vec{s} \{2, -3\}$. Спочатку знайдемо модуль (довжину) вектора $\vec{s} \{2, -3\}$ за формулою $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$: $|\vec{s}| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$.

Тоді $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos \beta = -\frac{3}{\sqrt{13}}$. Збираємо всі знайдені значення і підставляємо їх у формулу (9.1): $\frac{\partial z(M_0)}{\partial s} = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} \cos \beta = 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} + 6 \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{10 - 18}{\sqrt{13}} = -\frac{8}{\sqrt{13}}$.

9.3 Градієнт

Розглянемо функцію (скалярне поле) $u = f(x, y, z)$, неперервну разом із своїми частинними похідними першого порядку в області D .

Означення. Градієнтом скалярного поля $u = f(x, y, z)$ в точці M називається вектор, у якого проєкції на осі координат це частинні похідні функції $u = f(x, y, z)$ в цій точці.

Позначається градієнт таким чином: $\overrightarrow{gradu}$ і обчислюється за формулою:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{gradu}(M) &= \frac{\partial u(M)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z} \vec{k}, \\ &\text{або} \\ \overrightarrow{gradu}(M) &= \left\{ \frac{\partial u(M)}{\partial x}; \frac{\partial u(M)}{\partial y}; \frac{\partial u(M)}{\partial z} \right\}.\end{aligned}\tag{9.3}$$

Ясно, що для функції $z = f(x, y)$ формула буде дещо коротшою:

$$\overrightarrow{gradz}(M) = \frac{\partial z(M)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z(M)}{\partial y} \vec{j}.\tag{9.4}$$

Напрямок вектора $\overrightarrow{gradu}$ в точці M співпадає з напрямом нормалі до поверхні рівня, (яка проходить через точку M) в бік зростання функції $u = f(x, y, z)$. Якщо скалярне поле визначається функцією $z = f(x, y)$, то напрям вектора $\overrightarrow{gradz}$ в точці M співпадає з напрямом нормалі до лінії рівня (яка проходить через точку M) в бік зростання функції $z = f(x, y)$.

Приклад. Знайти: 1) градієнт функції $u = z^3 y + x^3 z^2 + 2y$ в довільній точці $M(x, y, z)$; 2) градієнт тієї ж функції в точці $M_0(1, 0, 1)$.

Розв'язання.

Знаходження градієнта зводиться до знаходження частинних похідних.

$$1) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = z^3 + 2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 y + 2x^3 z. \quad \text{За формулою (9.3)}$$

$$\overrightarrow{gradu}(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z} \vec{k}. \quad \text{Отже } \overrightarrow{gradu} = 3x^2 z^2 \vec{i} + (z^3 + 2) \vec{j} + (3z^2 y + 2x^3 z) \vec{k}.$$

$$2) \quad \text{Знайдемо значення частинних похідних в точці } M_0(1, 0, 1): \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} = 3, \\ \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} = 3, \quad \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} = 2.$$

$$\text{Тоді } \overrightarrow{gradz}(M_0) \text{ буде дорівнювати: } \overrightarrow{gradu}(M_0) = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Похідна за напрямом функції $u = f(x, y, z)$ і градієнт тієї ж функції зв'язані теоремою:

Теорема. Похідна функції $u = f(x, y, z)$ за напрямом вектора $\vec{s}$ в точці $M(x, y, z)$ дорівнює проєкції вектора $\overrightarrow{gradu}$ на вектор $\vec{s}$. Тобто

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \text{пр}_{\vec{s}} \overrightarrow{gradu}, \quad \text{або} \quad \frac{\partial u}{\partial s} = |\overrightarrow{gradu}| \cdot \cos \varphi,\tag{9.5}$$

де φ – кут між векторами $\overrightarrow{gradu}$ і $\vec{s}$ (рис. 20).

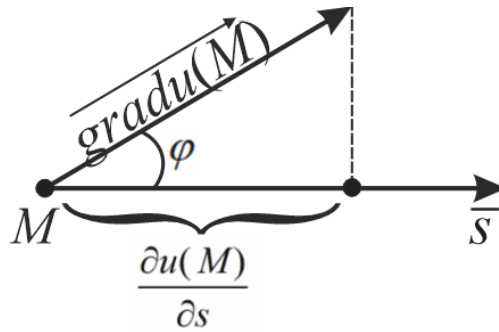


Рисунок 20

З формули (9.5) маємо два важливі наслідки:

1. Нехай $\varphi = 0$, тоді $\cos \varphi = \cos 0 = 1$ і $\frac{\partial u}{\partial s} = |\overrightarrow{\text{grad} u}|$ – це найбільше значення похідної за напрямом в точці M . Ми його одержуємо коли напрям вектора градієнта співпадає з напрямом вектора $\vec{s}$.

2. Нехай $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тоді $\cos \varphi = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ і $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$. Тобто похідна за напрямом вектора $\vec{s}$, перпендикулярного до вектора градієнта завжди дорівнює нулю.

Питання для самоперевірки

1. Що таке скалярне поле?
2. За якою формулою обчислюється похідна за напрямом?
3. Яка величина характеризує швидкість зміни скалярного поля?
4. В якому випадку похідна за напрямом дорівнює нулю?
5. Які точки похідної за напрямом називаються стаціонарними?
6. За якою формулою обчислюється градієнт функції?
7. Як зв'язана похідна за напрямом і градієнт?

Розв'язання прикладів

Розділ 1(найпростіші приклади)

Приклад 1. Знайти похідну функції $z = x^2 + x \cdot y - y^3$ в точці $M_0(3, 2)$ за напрямом вектора $\vec{s}\{4, -1\}$.

Розв'язання.

Застосуємо формулу (9.1): $\frac{\partial z(M)}{\partial s} = \frac{\partial z(M)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z(M)}{\partial y} \cos \beta$.

Знайдемо частинні похідні функції: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x - 3y^2$ і підставимо координати точки $M_0(3, 2)$. $\frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = \frac{\partial z(3, 2)}{\partial x} = 8$, $\frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = \frac{\partial z(3, 2)}{\partial y} = -9$.

Далі знайдемо напрямні косинуси вектора $\vec{s}\{4, -1\}$. Для цього спочатку знайдемо модуль (довжину) вектора: $|\vec{s}| = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$.

А далі користуємося формулами: $\cos \alpha = \frac{s_x}{|\vec{s}|} = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $\cos \beta = \frac{s_y}{|\vec{s}|} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

Збираємо всі знайдені значення і записуємо відповідь:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial s} = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} \cos \beta = 8 \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} - 9 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \frac{41}{\sqrt{17}}.$$

Приклад 2. Знайти градієнт функції $z = 2x^3y^2 - 3x^2 + 5y$ в точці $M_0(2, 4)$.

Розв'язання.

Застосуємо формулу (9.4): $\overrightarrow{\text{grad}z}(M_0) = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} \vec{j}$. Знайдемо

частинні похідні: $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2y^2 - 6x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 4x^3y + 5$.

Далі обчислимо ці похідні в заданій точці: $\frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = \frac{\partial z(2, 4)}{\partial x} = 372$,

$\frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = \frac{\partial z(2, 4)}{\partial y} = 133$ і одержимо результат:

$$\overrightarrow{\text{grad}z}(M_0) = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} \vec{j} = 372\vec{i} + 133\vec{j}.$$

Розділ 2

Приклад 1. Знайти похідну скалярного поля $u = x^3 + \sqrt{2y^2 + z^2}$, в точці $M_0(2, -1, 3)$ за напрямом вектора $\vec{s} = \vec{i} - 2\vec{k}$.

Розв'язання.

Знайдемо частинні похідні заданої функції:

$$u'_x = 3x^2, \quad u'_y = \frac{1}{2\sqrt{2y^2 + z^2}} \cdot 4y = \frac{2y}{\sqrt{2y^2 + z^2}}, \quad u'_z = \frac{z}{\sqrt{2y^2 + z^2}}.$$

Тепер знайдемо значення цих похідних в заданій точці $M_0(2, -1, 3)$:

$$u'_x(M_0) = 12, \quad u'_y(M_0) = -\frac{2}{\sqrt{11}}, \quad u'_z(M_0) = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

Далі обчислимо напрямні косинуси вектора $\vec{s} = \vec{i} - 2\vec{k}$, його ще можна записати так: $\vec{s} \{1, 0, -2\}$. Модуль вектора: $|\vec{s}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Застосуємо формулу (9.2): $\frac{\partial u(M_0)}{\partial s} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \cos \gamma$.

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial s} = 12 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \left(-\frac{2}{\sqrt{11}}\right) \cdot 0 + \frac{3}{\sqrt{11}} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{12}{\sqrt{5}} - \frac{6}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{11}} = \frac{12\sqrt{11} - 6}{\sqrt{55}}.$$

Приклад 2. Знайти похідну скалярного поля $u = x^3 \cdot z + 3x^2 \cdot y \cdot z^3 - 2y$ в точці $M_0(1, 3, -2)$ за напрямом вектора $\vec{s}$, який утворює з координатними осями гострі

кути α, β, γ , причому $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}$. Знайти швидкість скалярного поля в точці $M_0(1, 3, -2)$ і встановити характер зміни поля у даному напрямку.

Розв'язання.

За умови прикладу $\cos \alpha = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \cos \beta = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. За формулою $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ знайдемо $\cos \gamma$ (за умови кут гострий).
 $\cos \gamma = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$. Отже $\cos \gamma = \frac{1}{2}$.

Далі знайдемо частинні похідні, та їх числові значення в заданій точці.

$$u'_x = 3x^2 \cdot z + 6x \cdot y \cdot z^3, \quad u'_x(M_0) = -6 - 144 = -150.$$

$$u'_y = 3x^2 \cdot z^3 - 2, \quad u'_y(M_0) = -24 - 2 = -26.$$

$$u'_z = x^3 + 9x^2 \cdot y \cdot z^2, \quad u'_z(M_0) = 1 + 108 = 109.$$

За формулою (9.2) маємо:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial s} = -150 \cdot \frac{1}{2} - 26 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 109 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{41 + 26\sqrt{2}}{2}.$$

Нагадаємо, що абсолютна величина похідної за напрямом $\left| \frac{\partial u}{\partial s} \right|$ визначає швидкість зміни скалярного поля $u(M)$ в точці M за напрямом вектора $\vec{s}$.

В цьому прикладі швидкість зміни скалярного поля дорівнює $\left| \frac{41 + 26\sqrt{2}}{2} \right|$.

Бачимо, що $\frac{\partial u(M)}{\partial s} < 0$, тобто скалярне поле в даному напрямі спадає.

Приклад 3. Знайти точки, в яких скалярне поле $u = x^3 + y^3 + 3x \cdot y$ стаціонарне.

Розв'язання.

Точки, в яких похідна за яким завгодно напрямом дорівнює нулю, називаються стаціонарними. Тобто, потрібно щоб всі частинні похідні дорівнювали нулю.

$u'_x = 3x^2 + 3y, u'_y = 3y^2 + 3x$, складаємо систему:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y = 0, \\ 3y^2 + 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -y, \\ y^2 = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 = y^2, \\ y^4 = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^4 + x = 0 \Rightarrow x(x^3 + 1) = 0. \text{ Звідси}$$

$x_1 = 0, x_2 = -1$ і $y_1 = 0, y_2 = -1$. Отже маємо дві точки в яких скалярне поле буде стаціонарним: $M_1(0, 0), M_2(-1, -1)$.

Приклад 4. Задано скалярне поле $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ і точка $M_0(2, 1, 1)$. Знайти:

- 1) $\overrightarrow{gradu}$ в довільній точці $M(x, y, z)$;
- 2) $\overrightarrow{gradu}(M_0)$;

3) величину (модуль) $\overrightarrow{gradu}(M_0)$;

4) точки, в яких $\overrightarrow{gradu}$ перпендикулярний до осі OZ .

Розв'язання.

1) Знайдемо частинні похідні: $u'_x = 3x^2 - 3yz$, $u'_y = 3y^2 - 3xz$, $u'_z = 3z^2 - 3xy$ і застосуємо формулу (9.3):

$$\overrightarrow{gradu} = (3x^2 - 3yz)\vec{i} + (3y^2 - 3xz)\vec{j} + (3z^2 - 3xy)\vec{k}.$$

2) Тепер в одержаний вираз підставимо координати заданої точки $M_0(2,1,1)$: $\overrightarrow{gradu}(M_0) = 9\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}$.

3) Нагадаємо, що модуль вектора обчислюється за формулою: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Отже $|\overrightarrow{gradu}(M_0)| = \sqrt{81 + 9 + 9} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}$.

4) Якщо вектор перпендикулярний до деякої осі, то кут між вектором і цією віссю дорівнює 90° і проекція вектора на цю вісь дорівнює нулю. За умовою прикладу потрібно визначити в яких точках $\overrightarrow{gradu}$ перпендикулярний до осі OZ , тому $u'_z = 3z^2 - 3xy$ повинна дорівнювати нулю. $3z^2 - 3xy = 0 \Rightarrow z^2 = xy$. Отже $\overrightarrow{gradu}$ буде перпендикулярний осі OZ в точках, які належать поверхні $z^2 = xy$.

Приклад 5. Знайти найбільшу швидкість зміни скалярного поля $z = \ln(x^2 + 4y^2)$ в точці $M_0(6,4)$.

Розв'язання.

Напрямок, в якому скалярне поле має найбільшу швидкість зміни співпадає з напрямом вектора градієнта. Тобто напрям вектора $\vec{s}$ повинен співпадати з напрямом вектора $\overrightarrow{gradz}$. Знайдемо частинні похідні функції $z = \ln(x^2 + 4y^2)$ в точці $M_0(6,4)$.

$$z'_x = \frac{2x}{x^2 + 4y^2}, \quad z'_y = \frac{8y}{x^2 + 4y^2}, \quad z'_x(M_0) = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}, \quad z'_y(M_0) = \frac{32}{100} = \frac{8}{25}.$$

Тоді $\overrightarrow{gradz}(M_0) = \frac{3}{25}\vec{i} + \frac{8}{25}\vec{j}$. Далі знайдемо напрямні косинуси $\overrightarrow{gradz}(M_0)$.

$$|\overrightarrow{gradz}(M_0)| = \sqrt{\frac{9}{625} + \frac{64}{625}} = \frac{\sqrt{73}}{25}, \quad \cos \alpha = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{\sqrt{73}}{25}} = \frac{3}{\sqrt{73}}, \quad \cos \beta = \frac{8}{\sqrt{73}}.$$

І тепер за формулою (9.1) будемо мати:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial s} = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} \cos \beta = \frac{3}{25} \cdot \frac{3}{\sqrt{73}} + \frac{8}{25} \cdot \frac{8}{\sqrt{73}} = \frac{9+64}{25\sqrt{73}} = \frac{73}{25\sqrt{73}} = \frac{\sqrt{73}}{25}.$$

Отже, найбільша швидкість зміни скалярного поля $z = \ln(x^2 + 4y^2)$ в точці $M_0(6,4)$ дорівнює $\frac{\sqrt{73}}{25}$.

Приклади для аудиторної роботи

Приклад 1. Знайти похідну скалярного поля $u = 3z^2y + 2y^3x - 5x + z$ в точці $M_0(2, -1, 3)$ за напрямом вектора $\vec{s} = \{3, -1, 4\}$.

Приклад 2. Знайти похідну скалярного поля $u = x \cdot y^3 + \sqrt{y \cdot z} - 2x$ в точці $M_0(0, 2, 2)$ за напрямом вектора $\vec{s} = \overrightarrow{MN}$, $N(1, -2, 4)$.

Приклад 3. Знайти градієнт функції $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ в точці $M_0(4, -2)$.

Приклад 4. Задано скалярне поле $u = z^4 + x \cdot y - y \cdot z + x^2$ і точка $M_0(-2, 3, 1)$.
Знайти:

$\overrightarrow{\operatorname{grad} u}$ в довільній точці $M(x, y, z)$;

$\overrightarrow{\operatorname{grad} u}(M_0)$;

модуль $\overrightarrow{\operatorname{grad} u}(M_0)$;

похідну скалярного поля $u = 3z^2y + 2y^3x - 5x + z$ за напрямом вектора $\overrightarrow{\operatorname{grad} u}(M_0)$.

Приклади для самостійної роботи

Приклад 1. Знайти похідну скалярного поля $u = x^3 + 2x \cdot y^2 - y \cdot z + z^2$ в довільній точці і в точці $M_0(-1, 2, 1)$ за напрямом вектора $\vec{s} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$.

Приклад 2. Знайти точки, в яких скалярне поле $u = 2x^2 \cdot y + 3x \cdot y^2$ стаціонарне.

Приклад 3. Знайти градієнт функції $u = \ln(x^2 + 2x \cdot y - z^2)$ в точці $M_0(1, -1, -2)$.

Приклад 4. Задано скалярне поле $u = x^2 \cdot e^{2y} + y \cdot z^3 - 2x$ і точка $M_0(2, 0, -1)$.

Знайти:

1) $\overrightarrow{\operatorname{grad} u}(M_0)$;

2) модуль $\overrightarrow{\operatorname{grad} u}(M_0)$;

3) найбільшу швидкість зміни скалярного поля $u = x^2 \cdot z + y \cdot z^3 - 3x$ в заданій точці $M_0(2, 0, -1)$.

Відповіді: **Приклад1.** $\frac{\partial u}{\partial s} = (3x^2 + 2y^2) \frac{1}{\sqrt{14}} + (4x \cdot y - z) \frac{3}{\sqrt{14}} + (y - 2z) \frac{2}{\sqrt{14}}$;
 $\frac{\partial u(M_0)}{\partial s} = 11 \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} - 9 \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} - 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} = -\frac{16}{\sqrt{14}}$. **Приклад2.** $(0, 0)$. **Приклад3.**
 $\overrightarrow{\operatorname{grad} u}(M_0) = -\frac{2}{5}\vec{j} - \frac{4}{5}\vec{k}$. **Приклад4.** 1) $\overrightarrow{\operatorname{grad} u}(M_0) = 2\vec{i} + 7\vec{j}$; 2) $|\overrightarrow{\operatorname{grad} u}(M_0)| = \sqrt{53}$; 3)
 $\sqrt{66}$.

10. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ У MAPLE

Перед початком розв'язання задач у Maple необхідно виконати наступні кроки:

1. Обрати режим роботи (Worksheet або Document). Радимо обирати Worksheet (скріншоти саме з цього режиму ми наводимо у даному розділі).

2. Ввести першу команду:

> *restart*

Зауваження. Якщо в командному рядку декілька команд, то їх потрібно обов'язково розділяти розділювачем (крапка з комою або двокрапка), якщо лише одна команда в рядку – після неї нічого ставити не потрібно.

3. Для розв'язання задач, пов'язаних з функціями багатьох змінних, в середовищі Maple потрібно підключити декілька бібліотек.

Для побудови 3D-графіків

> *with(plots)*

Для роботи з векторами:

> *with(VectorCalculus)*

Рекомендуємо на початку робочого листа у Maple перед розв'язанням прикладів ввести *restart* та підключити всі необхідні бібліотеки. Тоді не потрібно буде окремо ту чи іншу бібліотеку підключати перед кожним прикладом, який потребує відповідних бібліотечних команд.

Розглянемо приклади. **Варіанти індивідуальних завдань з Maple аналогічні прикладам, які будуть розв'язані нижче.**

Приклад 1. Задана функція $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 4x \cdot y + 2y - 5$.

1) Побудувати 3-D графік функції в області $R \{ x \in [-10, 5], y \in [-5, 15] \}$;

2) побудувати три лінії рівня $f(x, y) = c$ в області R . Значення c вибрати так, щоб лінії рівня відображали форму поверхні.

Розв'язання.

Для розв'язання цього прикладу повинна бути підключена бібліотека для роботи з графікою *plots*:

> *with(plots)*

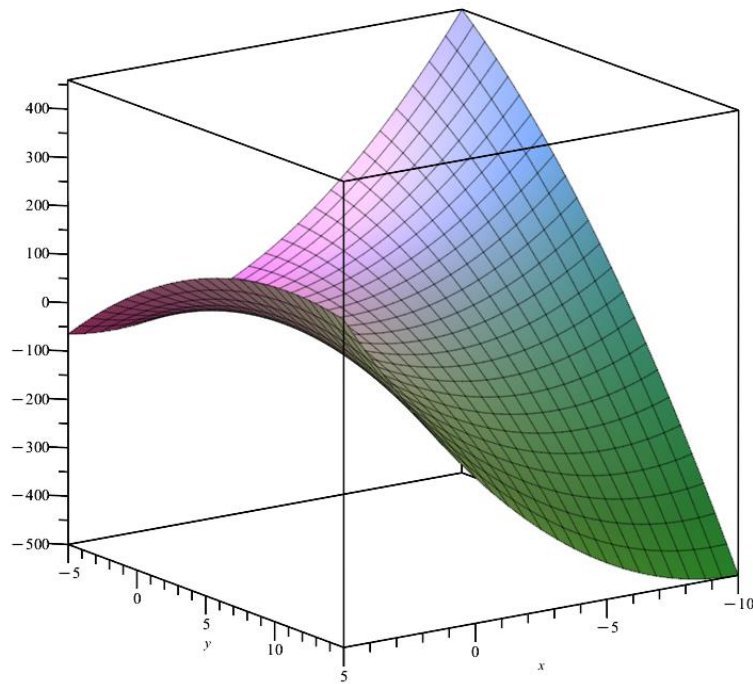
1) Задаємо функцію:

> $f := 3x^2 - y^2 + 4xy + 2y - 5$

$$f := 3x^2 + 4xy - y^2 + 2y - 5$$

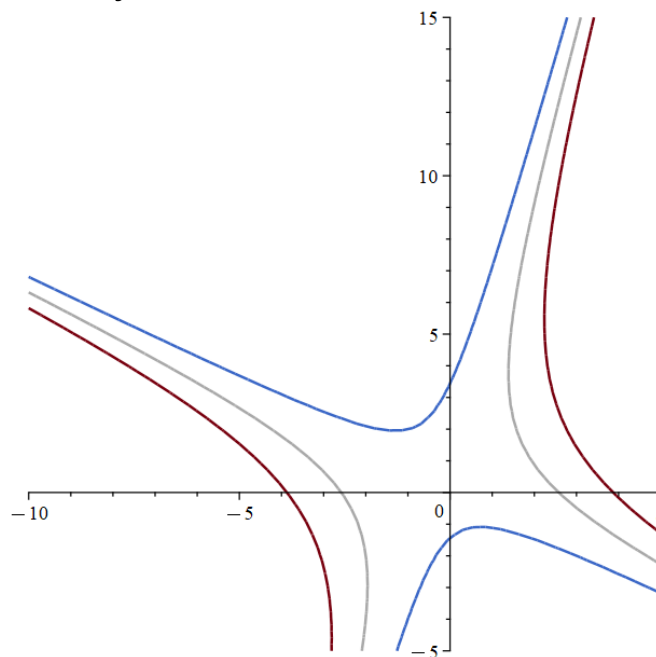
Будуємо графік:

> *plot3d(f, x = -10 .. 5, y = -5 .. 15)*

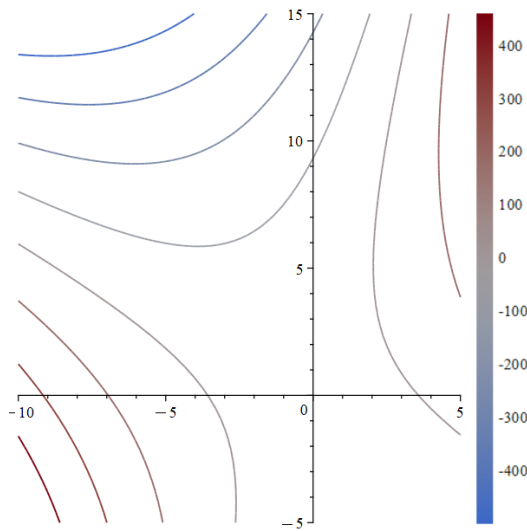


2) Будуємо лінії рівня:

> `contourplot(f, x = -10 .. 5, y = -5 .. 15, thickness = 2, contours = [-10, 15, 40])`



Зауваження. Команда `contourplot` без додаткових параметрів намалює загальний вигляд ліній рівня на заданій частині площини (див.рис.нижче). Якщо потрібно будувати конкретну кількість ліній рівня, то необхідно додавати параметр `contours = [c1, c2, ...]`, в квадратних дужках якого через кому записати значення відповідних $f(x, y) = c$, які потрібно обрати самостійно. Тому для кращої візуалізації саме трьох ліній рівня, про які йдеться мова у прикладі, рекомендуємо спочатку побудувати загальний вигляд ліній рівня, а потім модифікувати цей графік, методом перебору підбираючи значення c_1, c_2, c_3 .



Приклад 2. Задана функція $f(x, y) = \left(x^2 \cdot y - \sqrt{x \cdot y} + \frac{1}{x} \right)^2$.

1) Знайти частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$;

2) знайти $f'_y(M)$, якщо $M(1, 4)$.

Розв'язання.

1) Задаємо функцію:

$$\begin{aligned} > f := \left(x^2 \cdot y - \sqrt{x \cdot y} + \frac{1}{x} \right)^2 \\ & \quad f := \left(x^2 y - \sqrt{x y} + \frac{1}{x} \right)^2 \end{aligned}$$

Знаходимо частинні похідні за допомогою шаблону  з панелі *Calculus* (*Математичний аналіз*) (в старих версіях Maple цей шаблон знаходиться на панелі *Expression*):

$$> \frac{\partial}{\partial x}(f)$$

$$2 \left(x^2 y - \sqrt{x y} + \frac{1}{x} \right) \left(2 x y - \frac{y}{2 \sqrt{x y}} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$> \frac{\partial}{\partial y}(f)$$

$$2 \left(x^2 y - \sqrt{x y} + \frac{1}{x} \right) \left(x^2 - \frac{x}{2 \sqrt{x y}} \right)$$

Зауваження. Частинні похідні можна також знаходити в Maple за допомогою команди $\text{diff}(f, x)$. Перший параметр f – функція багатьох змінних; другий параметр x – ім'я змінної, по якій відбувається диференціювання.

2) Задаємо точку:

> $M := [1, 4];$

$$M := [1, 4]$$

Підставляємо першу і другу координати точки M у частинну похідну:

> $subs\left([x = M[1], y = M[2]], \frac{\partial}{\partial y}(f)\right)$

$$2(5 - \sqrt{4})\left(1 - \frac{\sqrt{4}}{8}\right)$$

Бачимо, що отриманий результат можна спростити. Виконуємо спрощення (копіюємо попередню команду і вставляємо її як єдиний параметр команди *simplify*):

> $simplify\left(subs\left([x = M[1], y = M[2]], \frac{\partial}{\partial y}(f)\right)\right)$

$$\frac{9}{2}$$

Приклад 3. Задана функція $f(x, y) = (x^2 \cdot y - \sqrt{x \cdot y} + \frac{1}{x})^2$.

1) знайти похідну за напрямом вектора $\vec{s} = \{-3, 7\}$ в точці $M_0(1, 4)$;

2) знайти градієнт функції;

3) знайти градієнт функції в точці $M_0(1, 4)$.

Розв'язання.

Для розв'язання цього прикладу повинна бути підключена бібліотека *VectorCalculus*:

> *with(VectorCalculus)*

1) Задаємо функцію:

> $f := \left(x^2 \cdot y - \sqrt{x \cdot y} + \frac{1}{x}\right)^2$

$$f := \left(x^2 y - \sqrt{x y} + \frac{1}{x}\right)^2$$

Задаємо точку M та вектор s :

> $M := [1, 4]; s := \langle -3, 7 \rangle;$

$$M := [1, 4]$$

$$s := (-3)e_x + (7)e_y$$

Знаходимо норму (модуль) вектора s :

> *Norm(s);*

$$\sqrt{58}$$

Нормалізуємо вектор s :

$$> s_norm := s / Norm(s)$$

$$s_norm := \left(-\frac{3\sqrt{58}}{58} \right) e_x + \left(\frac{7\sqrt{58}}{58} \right) e_y$$

Знаходимо градієнт функції:

$$> Gradient(f, [x, y])$$

$$\begin{aligned} & \left(2 \left(x^2 y - \sqrt{xy} + \frac{1}{x} \right) \left(2xy - \frac{y}{2\sqrt{xy}} - \frac{1}{x^2} \right) \right) \bar{e}_x \\ & + \left(2 \left(x^2 y - \sqrt{xy} + \frac{1}{x} \right) \left(x^2 - \frac{x}{2\sqrt{xy}} \right) \right) \bar{e}_y \end{aligned}$$

Знаходимо похідну функції за напрямом (як скалярний добуток градієнту функції на нормалізований вектор s):

$$> eval(DotProduct(Gradient(f, [x, y]) , s_norm), [x = M[1], y = M[2]])$$

$$\begin{aligned} & -\frac{3(5 - \sqrt{4}) \left(7 - \frac{\sqrt{4}}{2} \right) \sqrt{58}}{29} \\ & + \frac{7(5 - \sqrt{4}) \left(1 - \frac{\sqrt{4}}{8} \right) \sqrt{58}}{29} \end{aligned}$$

Спростуємо отриманий результат за допомогою команди *simplify*:

$$> D_s_f := simplify(eval(DotProduct(Gradient(f, [x, y]) , s_norm), [x = M[1], y = M[2]]))$$

$$D_s_f := -\frac{153\sqrt{58}}{116}$$

2) Помітимо, що градієнт функції вже був знайдений у попередньому пункті, як один з кроків для знаходження похідної за напрямом

$$> Gradient(f, [x, y])$$

$$\left(2 \left(x^2 y - \sqrt{xy} + \frac{1}{x} \right) \left(2xy - \frac{y}{2\sqrt{xy}} - \frac{1}{x^2} \right) \right) \bar{e}_x \\ + \left(2 \left(x^2 y - \sqrt{xy} + \frac{1}{x} \right) \left(x^2 - \frac{x}{2\sqrt{xy}} \right) \right) \bar{e}_y$$

3) Для знаходження градієнту функції в точці $M_0(1,4)$ виконуємо наступні кроки.

Задаємо точку M :

> $M := [1, 4];$

$$M := [1, 4]$$

Знаходимо градієнт функції:

> $\text{Gradient}(f, [x, y])$

$$\left(2 \left(x^2 y - \sqrt{xy} + \frac{1}{x} \right) \left(2xy - \frac{y}{2\sqrt{xy}} - \frac{1}{x^2} \right) \right) \bar{e}_x + \left(2 \left(x^2 y - \sqrt{xy} + \frac{1}{x} \right) \left(x^2 - \frac{x}{2\sqrt{xy}} \right) \right) \bar{e}_y$$

Підставляємо координати точки M в знайдений градієнт:

> $\text{subs}([x=1, y=4], \text{Gradient}(f, [x, y]))$

$$\left(2(5 - \sqrt{4}) \left(7 - \frac{\sqrt{4}}{2} \right) \right) \bar{e}_x + \left(2(5 - \sqrt{4}) \left(1 - \frac{\sqrt{4}}{8} \right) \right) \bar{e}_y$$

Спростуємо отриманий результат:

> $\text{simplify}(\text{subs}([x=1, y=4], \text{Gradient}(f, [x, y])))$

$$(36) \bar{e}_x + \left(\frac{9}{2} \right) \bar{e}_y$$

Приклад 4. Задана функція $f(x, y) = (x^2 \cdot y - \sqrt{x \cdot y} + \frac{1}{x})^2$.

1) побудувати векторне поле градієнта в області $x \in [-15, 5], y \in [-10, 5];$

2) знайти напрям найшвидшого зростання функції в точці $M_0(1,4)$.

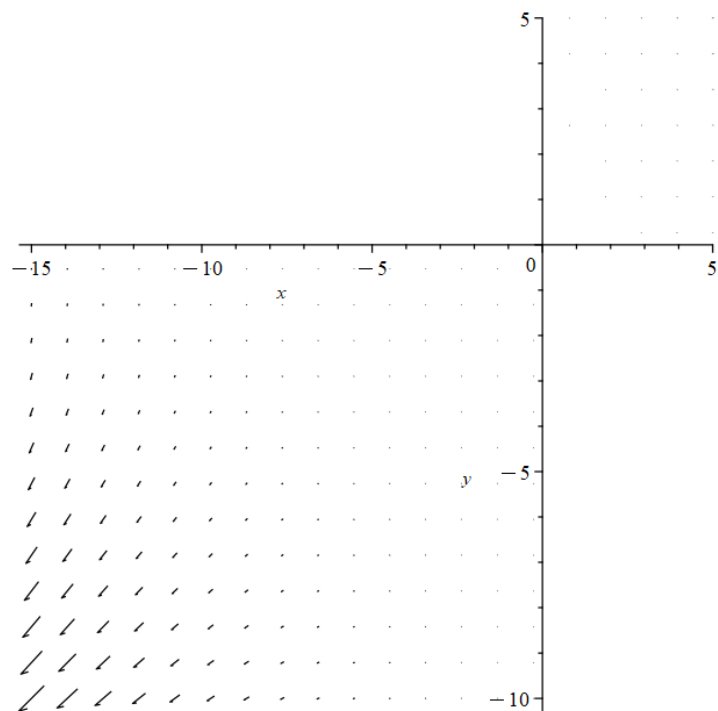
Розв'язання.

Для розв'язання цього прикладу повинні бути підключені дві бібліотеки: для роботи з графікою *plots* та векторних обчислень *VectorCalculus*.

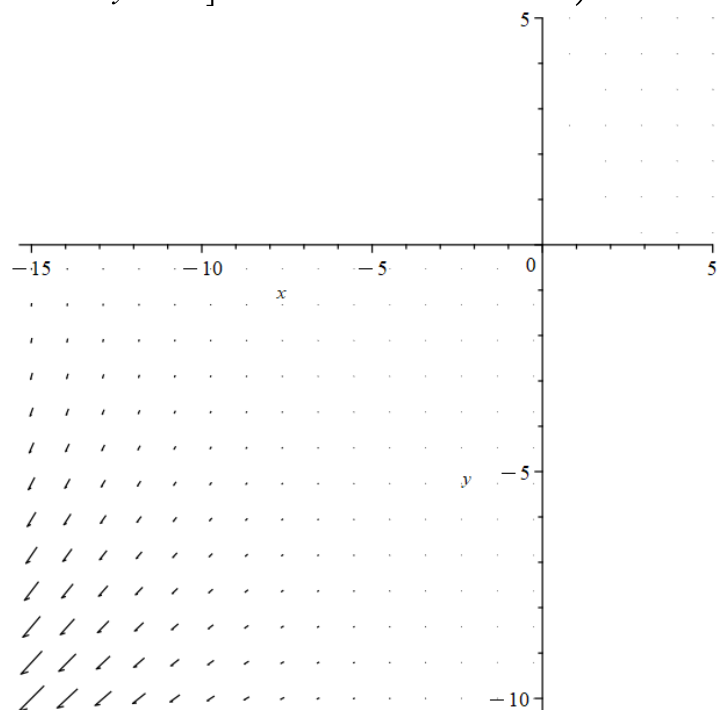
1) Будуємо векторне поле градієнта в заданій області. Зверніть увагу, що частинні похідні записано за допомогою команди *diff()*. Але їх можна задавати

і за допомогою шаблонів $\frac{\partial}{\partial x}$, результат не зміниться.

> $\text{fieldplot}([diff(f, x), diff(f, y)], x = -15 .. 5, y = -10 .. 5)$



> $\text{fieldplot}\left(\left[\frac{\partial}{\partial x}(f), \frac{\partial}{\partial y}(f)\right], x=-15..5, y=-10..5\right)$



2) Для знаходження напрямку найшвидшого зростання функції в точці $M_0(1, 4)$ виконаємо наступні кроки.

Задаємо точку M :

> $M := [1, 4];$

$M := [1, 4]$

Знаходимо градієнт функції:

> $\text{Gradient}(f, [x, y])$

$$\left(2 \left(x^2 y - \sqrt{xy} + \frac{1}{x}\right) \left(2xy - \frac{y}{2\sqrt{xy}} - \frac{1}{x^2}\right)\right) \bar{e}_x + \left(2 \left(x^2 y - \sqrt{xy} + \frac{1}{x}\right) \left(x^2 - \frac{x}{2\sqrt{xy}}\right)\right) \bar{e}_y$$

Знаходимо значення градієнту функції в точці М. Це і буде напрям найшвидшого зростання функції в точці:

> `subs([x=1, y=4], Gradient(f, [x, y]))`

$$\left(2(5 - \sqrt{4}) \left(7 - \frac{\sqrt{4}}{2}\right)\right) \bar{e}_x + \left(2(5 - \sqrt{4}) \left(1 - \frac{\sqrt{4}}{8}\right)\right) \bar{e}_y$$

Спростуємо отриманий результат:

> `simplify(subs([x=1, y=4], Gradient(f, [x, y])))`

$$(36) \bar{e}_x + \left(\frac{9}{2}\right) \bar{e}_y$$

Приклад 5. Функція $z = f(x, y)$ задана в неявному виді $F(x, y, z) = 0$:

$$x \cdot e^{3y} - y^2 \ln x + 2\sqrt{z} - y \cdot z = 0. \text{ Знайти } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Розв'язання.

Задаємо функцію у неявному вигляді:

> `F := x * e^(3*y) - y^2 * ln(x) + 2*sqrt(z) - y*z = 0`

$$F := x e^{3y} - y^2 \ln(x) + 2\sqrt{z} - yz = 0$$

Знаходимо частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial x}$:

> `implicitdiff(F, z, x)`

$$\frac{\sqrt{z} (x e^{3y} - y^2)}{(\sqrt{z} y - 1) x}$$

Знаходимо частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial y}$:

> `implicitdiff(F, z, y)`

$$\frac{\sqrt{z} (3x e^{3y} - 2y \ln(x) - z)}{\sqrt{z} y - 1}$$

Приклад 6. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^2 - y^2 - z^2 + x \cdot z + 4x + 5 = 0$ в точці $M_0(-2, 1, 0)$. Побудувати поверхню, дотичну площину і нормаль.

Розв'язання.

Задаємо поверхню:

> `F := x^2 - y^2 - z^2 + x*z + 4*x + 5`

$$F := x^2 + xz - y^2 - z^2 + 4x + 5$$

Задаємо точку:

> `M := [-2, 1, 0];`

$$M := [-2, 1, 0]$$

Для знаходження дотичної площини згадаємо формулу (8.1):

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$$

та зробимо попередні «заготовки» для реалізації цієї формули у Maple.

Знайдемо $F'_x(M_0)$ та запишемо результат у комірку A:

$$> A := \left(\text{subs} \left([x = -2, y = 1, z = 0], \frac{\partial}{\partial x}(F) \right) \right)$$

$$A := 0$$

Знайдемо $F'_y(M_0)$ та запишемо результат у комірку B:

$$> B := \left(\text{subs} \left([x = -2, y = 1, z = 0], \frac{\partial}{\partial y}(F) \right) \right)$$

$$B := -2$$

Знайдемо $F'_z(M_0)$ та запишемо результат у комірку C:

$$> C := \left(\text{subs} \left([x = -2, y = 1, z = 0], \frac{\partial}{\partial z}(F) \right) \right)$$

$$C := -2$$

Запишемо рівняння дотичної площини:

$$> \text{tangent_plane} := A * (x - M[1]) + B * (y - M[2]) + C * (z - M[3])$$

$$= 0$$

$$\text{tangent_plane} := -2y + 2 - 2z = 0$$

Запишемо рівняння нормалі у параметричному вигляді (див. [3, п.2.3.2]):

$$> \text{normal_line} := [x = M[1] + A * t, y = M[2] + B * t, z = M[3] + C * t]$$

$$\text{normal_line} := [x = -2, y = 1 - 2t, z = -2t]$$

Для побудови поверхні, точки, дотичної площини і нормалі на одному зображенні нам необхідно окремо задати відповідні графіки і потім поєднати їх за допомогою команди *display()*.

Задаємо графік поверхні та записуємо його у комірку p1:

$$> p1 := \text{implicitplot3d}(F, x = -5..5, y = -5..5, z = -5..5) :$$

Задаємо графік дотичної площини та записуємо його у комірку p2:

$$> p2 := \text{implicitplot3d}(\text{tangent_plane}, x = -5..5, y = -5..5, z = -5..5) :$$

Задаємо графік нормалі та записуємо його у комірку p3:

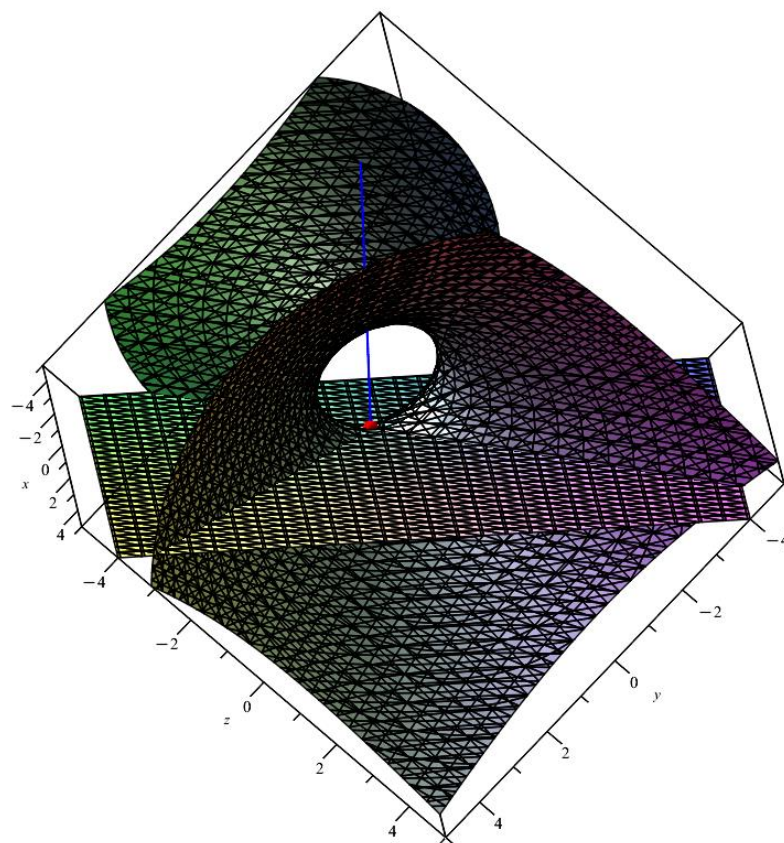
$$> p3 := \text{spacecurve}([-2, 1 - 2t, -2t], t = -2..2, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 2) :$$

Задаємо зображення просторової точки та записуємо його у комірку p4:

$$> p4 := \text{pointplot3d}([M], \text{symbol} = \text{solidcircle}, \text{color} = \text{red}, \text{symbolsize} = 15) :$$

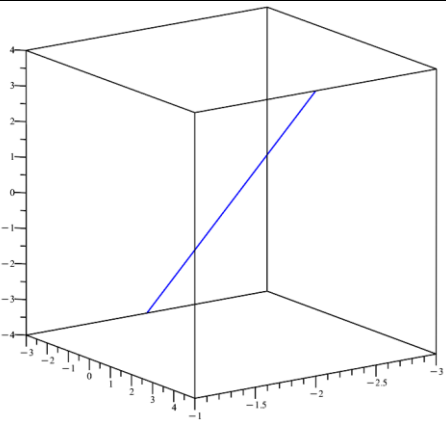
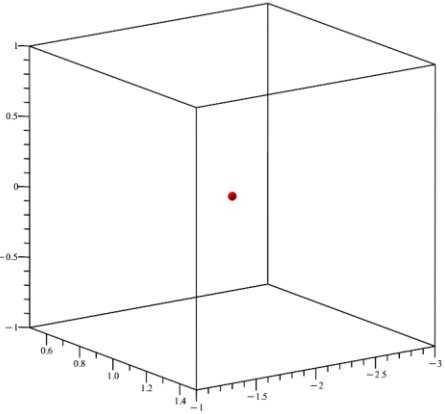
Виводимо на екран всі зображення:

$$> \text{display}(\{p1, p2, p3, p4\})$$



Зауважимо, що проміжні результати ми не виводили на екран, а лише записували у комірки $p1$, $p2$, $p3$, $p4$. Але можна і подивитись окремо, як виглядають ці зображення. Для цього необхідно записати команду без присвоєння її у комірку та без двокрапки у кінці.

Поверхня	<code>implicitplot3d(F, x = -5 .. 5, y = -5 .. 5, z = -5 .. 5)</code>	
Дотична площина	<code>implicitplot3d(tangent_plane, x = -5 .. 5, y = -5 .. 5, z = -5 .. 5)</code>	

Нормаль	<code>spacecurve([-2, 1 - 2*t, -2*t], t = -2 .. 2, color = blue, thickness = 2)</code>	
Точка	<code>pointplot3d([M], symbol = solidcircle, color = red, symbolsize = 15)</code>	

Приклад 7.1 Задана функція $z = 4x^2y + 24xy + y^2 + 32y - 6$

- 1) Знайти стаціонарні точки;
- 2) Скласти матрицю Гессе і визначити характер кожної стаціонарної точки;
- 3) Підтвердити результат графічно (3-D графік з відміченими точками екстремуму (якщо вони існують)).

Розв'язання.

Для розв'язання цього прикладу повинні бути підключені дві бібліотеки: для роботи з графікою *plots* та векторних обчислень *VectorCalculus*.

- 1) Для знаходження стаціонарних точок виконуємо наступні кроки.

Задаємо функцію:

> $F := 4 \cdot x^2 \cdot y + 24 \cdot x \cdot y + y^2 + 32 \cdot y - 6$

$$F := 4x^2y + 24xy + y^2 + 32y - 6$$

Знаходимо стаціонарні точки як розв'язки системи рівнянь:

> $stationary := solve\left(\left\{\frac{\partial}{\partial x}(F) = 0, \frac{\partial}{\partial y}(F) = 0\right\}, \{x, y\}\right)$

$$stationary := \{x = -4, y = 0\}, \{x = -2, y = 0\}, \{x = -3, y = 2\}$$

- 2) Складаємо матрицю Гессе:

> $Hessian(F, [x, y])$

$$\begin{bmatrix} 8y & 8x+24 \\ 8x+24 & 2 \end{bmatrix}$$

Для перевірки характеру кожної стаціонарної точки згідно з теоремою про достатні умови існування екстремуму, знайдемо коефіцієнти $\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2} = A$, $\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x \partial y} = B$, $\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2} = C$.

Перевіряємо першу стаціонарну точку $\{x=-4, y=0\}$:

```
> A := ( subs( {x=-4, y=0}, (F) ) )
                                     A := 0
> B := ( subs( {x=-4, y=0}, (F) ) )
                                     B := -8
> C := ( subs( {x=-4, y=0}, (F) ) )
                                     C := 2
>
if ( A·C - B² > 0 and A < 0 ) or ( A·C - B² > 0 and C < 0 ) then
    printf( " Точка максимуму" );
elif ( A·C - B² > 0 and A > 0 ) or ( A·C - B² > 0 and C > 0 ) then
    printf( " Точка мінімуму" );
elif A·C - B² < 0 then
    printf( " Екстремуму немає" );
elif A·C - B² = 0 then
    printf( " Неможливо визначити (потрібні додаткові дослідження)" );
end if;
```

Екстремуму немає

Перевіряємо другу стаціонарну точку $\{x=-2, y=0\}$:

```
> A := ( subs( {x=-2, y=0}, (F) ) )
                                     A := 0
> B := ( subs( {x=-2, y=0}, (F) ) )
                                     B := 8
> C := ( subs( {x=-2, y=0}, (F) ) )
                                     C := 2
```

```

>
if (A·C - B2 > 0 and A < 0) or (A·C - B2 > 0 and C < 0) then
    printf("Точка максимуму");
elif (A·C - B2 > 0 and A > 0) or (A·C - B2 > 0 and C > 0) then
    printf("Точка мінімуму");
elif A·C - B2 < 0 then
    printf("Екстремуму немає");
elif A·C - B2 = 0 then
    printf("Неможливо визначити (потрібні додаткові дослідження)");
end if;

```

Екстремуму немає

Перевіряємо третю стаціонарну точку $\{x=-3, y=2\}$:

```

> A := ( subs( {x=-3, y=2}, (d^2(F)/dx^2) ) )
A := 16

```

```

> B := ( subs( {x=-3, y=2}, (d^2(F)/dx dy) ) )
B := 0

```

```

> C := ( subs( {x=-3, y=2}, (d^2(F)/dy^2) ) )
C := 2

```

```

>
if (A·C - B2 > 0 and A < 0) or (A·C - B2 > 0 and C < 0) then
    printf("Точка максимуму");
elif (A·C - B2 > 0 and A > 0) or (A·C - B2 > 0 and C > 0) then
    printf("Точка мінімуму");
elif A·C - B2 < 0 then
    printf("Екстремуму немає");
elif A·C - B2 = 0 then
    printf("Неможливо визначити (потрібні додаткові дослідження)");
end if;

```

Точка мінімуму

3) Для графічного зображення функції та її стаціонарних точок, побудуємо їх окремо і потім поєднаємо за допомогою команди *display*.

Будуємо 3-D графік функції F :

```

> p1 := plot3d(F, x=-5..5, y=-5..5, view=[-5..5, -5..5, -15..15])

```

Для побудови графічного зображення стаціонарних точок у просторі, нам необхідно для кожної з них знайти її третю координату.

Знаходимо z -координату для першої стаціонарної точки $\{x=-4, y=0\}$. Для цього обчислимо значення F в цій точці:

```

> subs( {x=-4, y=0}, F);

```

—6

Записуємо в комірку $K1$ всі три координати першої стаціонарної точки:

> $K1 := [-4, 0, -6]$

$K1 := [-4, 0, -6]$

Аналогічно повторюємо дії для другої та третьої стаціонарних точок.

Знаходимо z -координату для другої стаціонарної точки $\{x=-2, y=0\}$:

> $\text{subs}(\{x=-2, y=0\}, F);$

—6

Записуємо в комірку $K2$ всі три координати:

> $K2 := [-2, 0, -6]$

$K2 := [-2, 0, -6]$

Знаходимо z -координату для третьої стаціонарної точки $\{x=-3, y=2\}$:

> $\text{subs}(\{x=-3, y=2\}, F);$

—10

Записуємо в комірку $K3$ всі три координати:

> $K3 := [-3, 2, -10]$

$K3 := [-3, 2, -10]$

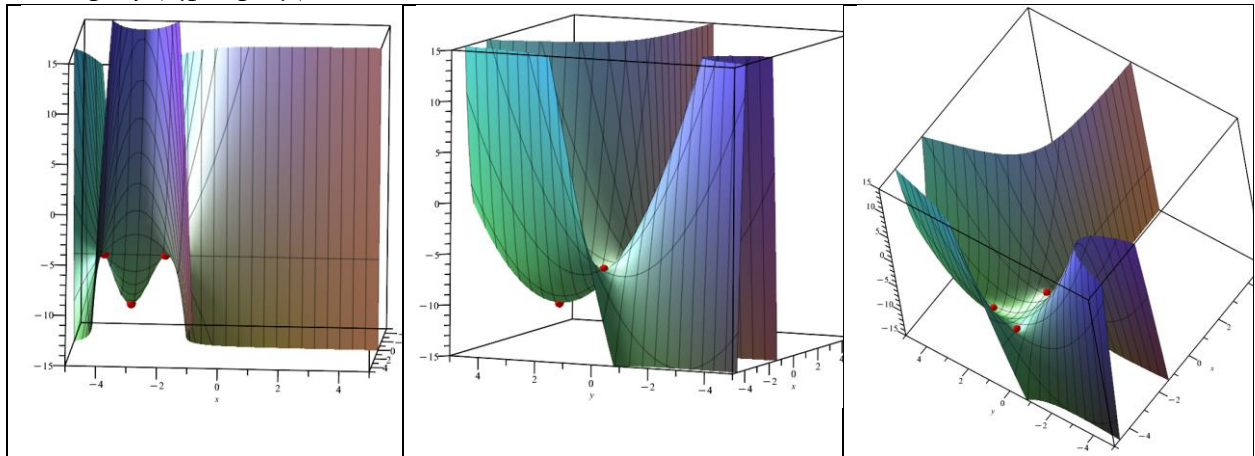
$M := [0, 0, 2]$

Будуємо графічне зображення стаціонарних точок:

> $p2 := \text{pointplot3d}([K1, K2, K3], \text{symbol}=\text{solidcircle}, \text{color}=\text{red}, \text{symbolsize}=15)$

Виводимо разом зображення функції та її стаціонарних точок:

> $\text{display}(\{p1, p2\});$



Примітка. В Maple ми отримаємо тривимірне зображення, яке можна роздивлятися під різними кутами. Тут ми наводимо лише 3 скріншоти цього зображення.

Приклад 7.2 Задана функція $z = x^3 + 4y^3 - 6x \cdot y^2 + 2$

1) Знайти стаціонарні точки;

2) Скласти матрицю Гессе і визначити характер кожної стаціонарної точки;

3) Підтвердити результат графічно (3-D графік з відміченими точками екстремуму (якщо вони існують)).

Розв'язання.

1) Для знаходження стаціонарних точок виконуємо наступні кроки.

Задаємо функцію:

$$> F := x^3 + 4y^3 - 6x \cdot y^2 + 2$$

$$F := x^3 - 6xy^2 + 4y^3 + 2$$

Знаходимо стаціонарні точки як розв'язки системи рівнянь:

$$> stationary := solve\left(\left\{\frac{\partial}{\partial x}(F) = 0, \frac{\partial}{\partial y}(F) = 0\right\}, \{x, y\}\right)$$

$$stationary := \{x = 0, y = 0\}$$

2) Складаємо матрицю Гессе:

$$> Hessian(F, [x, y])$$

$$\begin{bmatrix} 6x & -12y \\ -12y & -12x + 24y \end{bmatrix}$$

Для перевірки характеру кожної стаціонарної точки (а в нашому випадку – лише одна стаціонарна точка (0,0)) згідно з теоремою про достатні умови існування екстремуму, знайдемо коефіцієнти $\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x^2} = A$, $\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial x \partial y} = B$,

$$\frac{\partial^2 z(M_0)}{\partial y^2} = C :$$

$$> A := \left(subs\left([x = 0, y = 0], \frac{\partial^2}{\partial x^2}(F)\right) \right)$$
$$A := 0$$

$$> B := \left(subs\left([x = 0, y = 0], \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(F)\right) \right)$$
$$B := 0$$

$$> C := \left(subs\left([x = 0, y = 0], \frac{\partial^2}{\partial y^2}(F)\right) \right)$$
$$C := 0$$

Визначимо характер нашої стаціонарної точки:

```
> if (A·C - B2 > 0 and A < 0) or (A·C - B2 > 0 and C < 0) then
    printf("Точка максимуму");
elif (A·C - B2 > 0 and A > 0) or (A·C - B2 > 0 and C > 0) then
    printf("Точка мінімуму");
elif A·C - B2 < 0 then
    printf("Екстремуму немає");
elif A·C - B2 = 0 then
    printf("Неможливо визначити (потрібні додаткові дослідження)");
end if;
```

Неможливо визначити (потрібні додаткові дослідження)

Зауваження. Якщо у функції декілька стаціонарних точок, то необхідно знаходити коефіцієнти A , B , C та виконувати аналіз для кожної стаціонарної точки, як в прикладі 7.1.

3) Для графічного зображення функції та її стаціонарної точки, побудуємо їх окремо і потім поєднаємо за допомогою команди *display*.

Будуємо 3-D графік функції F :

```
> p1 := plot3d(F, x=-5..5, y=-5..5, view=[-5..5,-5..5,-250  
..250]) :
```

Для побудови нашої стаціонарної точки у просторі, нам необхідно ще знайти її третю координату. Для цього обчислимо значення F в цій точці:

```
> eval(F, stationary)
```

2

Задаємо точку:

```
> M := [0, 0, 2]
```

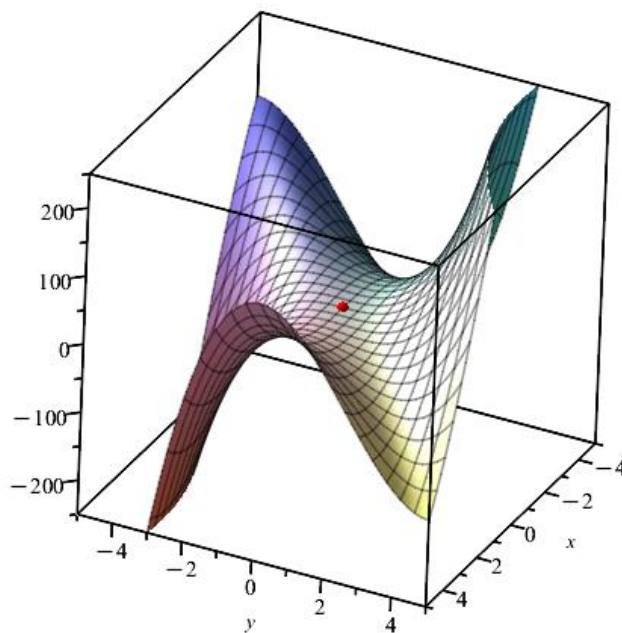
$M := [0, 0, 2]$

Будуємо її графічне зображення:

```
> p2 := pointplot3d([M], symbol=solidcircle, color=red, symbolsize  
= 15) :
```

Виводимо разом зображення функції та стаціонарної точки:

```
> display({p1, p2})
```



Як бачимо, в стаціонарній точці $(0,0)$ екстремуму немає. Це візуальний висновок. Можна ще порівняти значення функції в стаціонарній точці і в деякому її okolí: $z(0,0)=2$, $z(1,1)=-7$, $z(1,-1)=1$, $z(-1,-1)=11$, $z(-1,1)=3$. Як бачимо, значення функції в okolí точки $(0,0)$ є як більші так і менші значення $z(0,0)=2$. Отже екстремуму в стаціонарній точці немає.

Приклад 7.3 Задана функція $z = -x^2 + xy - y^2 - 9x + 3y - 20$

- 1) Знайти стаціонарні точки;
- 2) Скласти матрицю Гессе і визначити характер кожної стаціонарної точки;
- 3) Підтвердити результат графічно (3-D графік з відміченими точками екстремуму (якщо вони існують)).

Розв'язання.

1) Задаємо функцію:

> $F := -x^2 + x \cdot y - y^2 - 9x + 3y - 20$

$$F := -x^2 + xy - y^2 - 9x + 3y - 20$$

Знаходимо стаціонарні точки:

> $stationary := solve\left(\left\{\frac{\partial}{\partial x}(F) = 0, \frac{\partial}{\partial y}(F) = 0\right\}, \{x, y\}\right)$
 $stationary := \{x = -5, y = -1\}$

2) Складаємо матрицю Гессе:

> $Hessian(F, [x, y])$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Перевіряємо характеру отриманої стаціонарної точки:

> $A := \left(subs\left(\{x = -5, y = -1\}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}(F) \right) \right)$
 $A := -2$

> $B := \left(subs\left(\{x = -5, y = -1\}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(F) \right) \right)$
 $B := 1$

> $C := \left(subs\left(\{x = -5, y = -1\}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}(F) \right) \right)$
 $C := -2$

> **if** ($A \cdot C - B^2 > 0$ **and** $A < 0$) **or** ($A \cdot C - B^2 > 0$ **and** $C < 0$) **then**
 $printf$ (" Точка максимуму");
elif ($A \cdot C - B^2 > 0$ **and** $A > 0$) **or** ($A \cdot C - B^2 > 0$ **and** $C > 0$) **then**
 $printf$ (" Точка мінімуму");
elif $A \cdot C - B^2 < 0$ **then**
 $printf$ (" Екстремуму немає");
elif $A \cdot C - B^2 = 0$ **then**
 $printf$ (" Неможливо визначити (потрібні додаткові дослідження)");
end if;

Точка максимуму

3) Будемо 3-D графік функції F:

> $p1 := \text{plot3d}(F, x = -15 \dots 15, y = -15 \dots 15, \text{view} = [-15 \dots 15, -15 \dots 15, -150 \dots 15])$

Знаходимо третю координату знайденої точки максимуму:

> $\text{subs}(\{x = -5, y = -1\}, F)$

1

Задаємо точку:

> $K1 := [-5, -1, 1]$

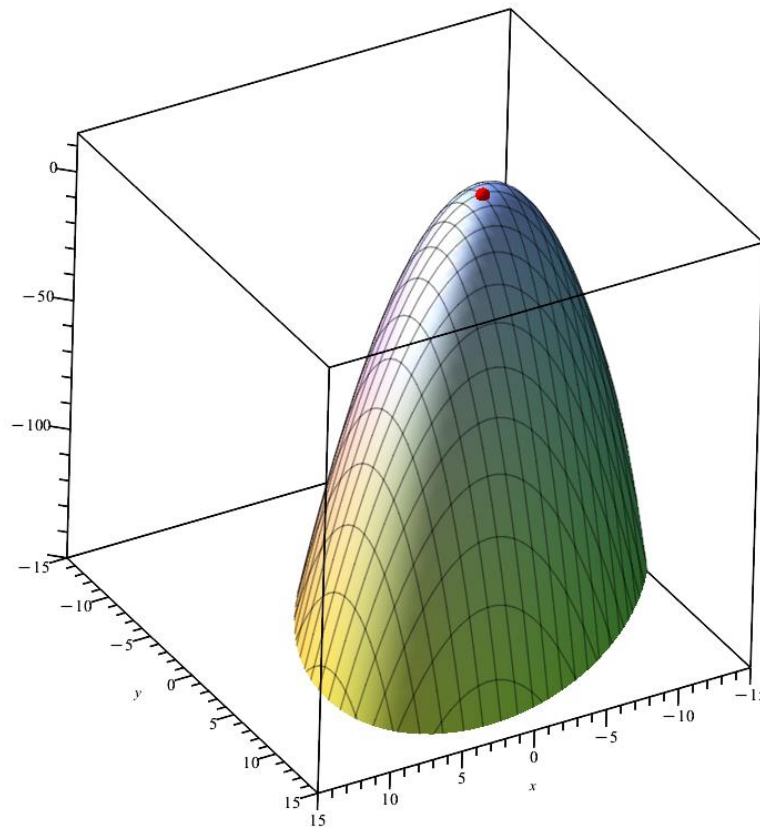
$K1 := [-5, -1, 1]$

Будемо графічне зображення отриманої точки:

> $p2 := \text{pointplot3d}([K1], \text{symbol} = \text{solidcircle}, \text{color} = \text{red}, \text{symbolsize} = 15)$

Виводимо разом зображення функції та точки максимуму:

> $\text{display}(\{p1, p2\})$



Приклад 8. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = 3 + 4x - 5y$, при заданому рівнянні зв'язку $2x^2 + 3y^2 = 1$.

Розв'язання.

Для розв'язання цього прикладу повинна бути підключена бібліотека для роботи з графікою *plots*.

Задаємо функцію:

> $F := 3 + 4x - 5y$

$F := 3 + 4x - 5y$

Задаємо обмеження (рівняння зв'язку):

> $G := 2x^2 + 3y^2 - 1$

$$G := 2x^2 + 3y^2 - 1$$

Записуємо рівняння Лагранжа:

> $L := F - \text{lambda} * G$

$$L := 3 + 4x - 5y - \lambda (2x^2 + 3y^2 - 1)$$

Розв'язуємо систему рівнянь:

> $\text{solutions} := \text{solve}\left(\left\{\frac{\partial}{\partial x}(L) = 0, \frac{\partial}{\partial y}(L) = 0, \frac{\partial}{\partial \text{lambda}}(L) = 0\right\}, \{x, y, \text{lambda}\}\right)$

$$\text{solutions} := \left\{ \lambda = \frac{7 \text{RootOf}(_Z^2 - 3)}{6}, x = \frac{2 \text{RootOf}(_Z^2 - 3)}{7}, y = -\frac{5 \text{RootOf}(_Z^2 - 3)}{21} \right\}$$

> $\text{allvalues}(\text{solutions})$

$$\left\{ \lambda = \frac{7\sqrt{3}}{6}, x = \frac{2\sqrt{3}}{7}, y = -\frac{5\sqrt{3}}{21} \right\}, \left\{ \lambda = -\frac{7\sqrt{3}}{6}, x = -\frac{2\sqrt{3}}{7}, y = \frac{5\sqrt{3}}{21} \right\}$$

Маємо два розв'язки, тобто дві стаціонарні точки. Записуємо результати кожного розв'язку в окрему комірку:

> $m1 := \text{op}(1, \{\text{allvalues}(\text{solutions})\}); m2 := \text{op}(2, \{\text{allvalues}(\text{solutions})\});$

$$m1 := \left\{ \lambda = -\frac{7\sqrt{3}}{6}, x = -\frac{2\sqrt{3}}{7}, y = \frac{5\sqrt{3}}{21} \right\}$$

$$m2 := \left\{ \lambda = \frac{7\sqrt{3}}{6}, x = \frac{2\sqrt{3}}{7}, y = -\frac{5\sqrt{3}}{21} \right\}$$

Для задання координат першої стаціонарної точки шукаємо в комірці m1 (яка зберігає перший розв'язок), чому дорівнюють відповідні координати:

> **for** p **in** $m1$ **do**
 if $\text{op}(1, p) = x$ **then** $x1 := \text{op}(2, p)$ **end if**;
 if $\text{op}(1, p) = y$ **then** $y1 := \text{op}(2, p)$ **end if**;
end do;

Записуємо ці координати як координати точки M1:

> $M1 := [\text{evalf}(x1), \text{evalf}(y1)]$

$$M1 := [-0.4948716594, 0.4123930495]$$

Аналогічно для другої стаціонарної точки виконуємо дії:

```

> for p in m2 do
  if op(1,p) = x then x2 := op(2,p) end if;
  if op(1,p) = y then y2 := op(2,p) end if;
end do;
> M2 := [evalf(x2), evalf(y2)]
      M2 := [0.4948716594, -0.4123930495]

```

Для побудови графічного зображення спочатку окремо задамо функцію, обмеження та знайдені точки.

Задаємо контурний графік функції F :

```

> p1 := contourplot(F, x = -2 .. 2, y = -2 .. 2, contours = 20, coloring
    = [blue, white]) :

```

Задаємо графік функції обмеження G :

```

> p2 := implicitplot(G, x = -2 .. 2, y = -2 .. 2, color = red, thickness = 2) :

```

Задаємо графічне зображення знайдених точок умовних екстремумів функції:

```

> p3 := pointplot([M1, M2], symbol = solidcircle, color = red, symbolsize
    = 15) :

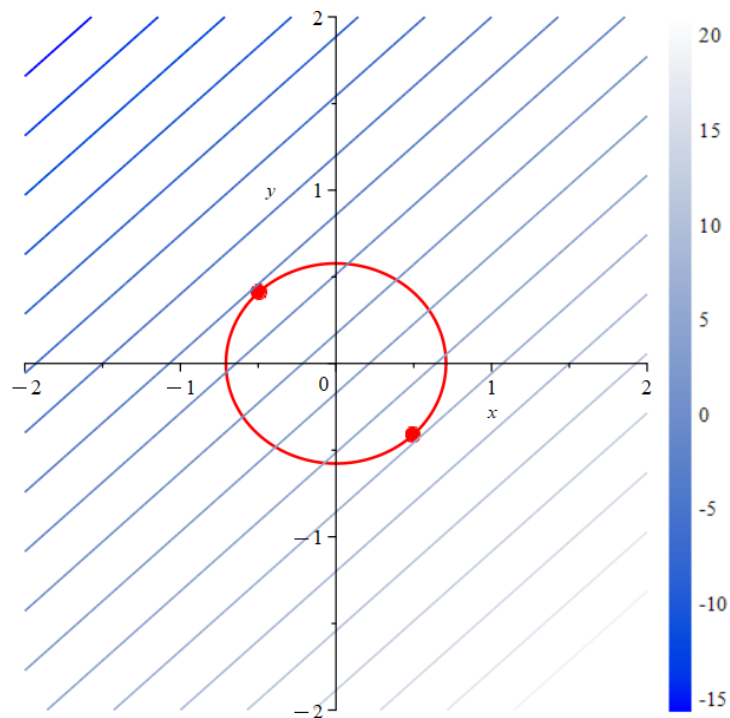
```

Виводимо на екран всі зображення:

```

> display({p1, p2, p3});

```



ПРИКЛАДИ ТЕСТІВ

Теоретичні питання

1. Для функції $y = f(x, z)$ область визначення, це
 - a) частина площини, або вся площина XOZ ;
 - b) частина площини, або вся площина XOY ;
 - c) частина осі, або вся вісь y ;
 - d) частина осі, або вся вісь z .
2. Для функції $z = f(x, y)$ множина ліній рівня- це рівняння виду:
 - a) $f(x, y) = 0$;
 - b) $f(x, y) = c$;
 - c) $z - f(x, y) = 1$;
 - d) $z - f(x, y) = 0$.
3. Яке поняття ФБЗ визначається нерівністю $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ (або рівністю $\lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y) = A$) ?
 - a) поняття неперервності функції в точці M_0 ;
 - b) поняття неперервності функції в області A ;
 - c) поняття границі функції в точці M_0 ;
 - d) поняття границі функції в області A .
4. За означенням, частинна похідна першого порядку від функції $z = f(x, y)$ по змінній x це-
 - a) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}$;
 - b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}$;
 - c) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}$;
 - d) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{dz}{dx}$.
5. Фізичний зміст частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точці M -це
 - a) прискорення функції $z = f(x, y)$ в точці M ;
 - b) модуль вектора функції $z = f(x, y)$ в точці M ;
 - c) числове значення функції $z = f(x, y)$ в точці M ;
 - d) швидкість зміни функції $z = f(x, y)$ в точці M у напрямку осі OY .
6. Якщо функція $z = f(x, y)$ задана в неявному виді $F(x, y, z) = 0$ то частинна похідна по змінній y обчислюється за формулою:
 - a) $z'_y = \frac{F'_z(x, y, z)}{F'_y(x, y, z)}$;

$$b) \ ; z'_y = -\frac{F'_z(x, y, z)}{F'_y(x, y, z)}$$

$$c) \ z'_y = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} ;$$

$$d) \ z'_y = \frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} .$$

7. Якщо в стаціонарній точці M_0 визначник матриці Гессе $\Delta_H > 0$ то:

- a) в точці M_0 маємо максимум;
- b) в точці M_0 маємо мінімум;
- c) в точці M_0 екстремуму немає;
- d) в точці M_0 екстремум є.

8. Екстремум функції $z = f(x, y)$, який досягається, коли x і y зв'язані рівнянням $\varphi(x, y) = 0$ називається:

- a) умовним екстремумом;
- b) абсолютним екстремумом;
- c) відносним екстремумом;
- d) додатнім екстремумом.

9. Якщо рівняння поверхні має вид $F(x, y, z) = 0$, то рівняння дотичної площини до поверхні в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ обчислюється за формулою:

- a) $F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$;
- b) $F'_x(M_0)(x + x_0) + F'_y(M_0)(y + y_0) + F'_z(M_0)(z + z_0) = 0$;
- c) $F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 1$;
- d) $F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = F(M_0)$.

10. Скалярне поле, яке змінюється з часом називається

- a) відносним скалярним полем;
- b) абсолютним скалярним полем;
- c) нестаціонарним скалярним полем;
- d) дійсним скалярним полем.

11. Похідна за напрямом вектора $\vec{s}$ функції $u = f(x, y, z)$ в точці M обчислюється за формулою:

- a) $\frac{\partial u(M)}{\partial s} = \frac{\partial u(M)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(M)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u(M)}{\partial z} \cos \gamma$;
- b) $\frac{\partial u(M)}{\partial s} = \frac{\partial u(M)}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial u(M)}{\partial y} \sin \beta + \frac{\partial u(M)}{\partial z} \sin \gamma$;
- c) $\frac{\partial u(M)}{\partial s} = \frac{\partial u(M)}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial u(M)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u(M)}{\partial z} \operatorname{tg} \gamma$;
- d) $\frac{du(M)}{ds} = \frac{\partial u(M)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(M)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u(M)}{\partial z} \cos \gamma$.

12. Градієнт скалярного поля $u = f(x, y, z)$ в точці M обчислюється за формулою:

- a) $\overrightarrow{gradu}(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u(M)}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u(M)}{\partial z} \cos \gamma$;
- b) $\overrightarrow{gradu}(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z} \vec{k}$;
- c) $\overrightarrow{gradu}(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial x} \vec{i} \cdot \frac{\partial u(M)}{\partial y} \vec{j} \cdot \frac{\partial u(M)}{\partial z} \vec{k}$;
- d) $\overrightarrow{gradu}(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial x} + \frac{\partial u(M)}{\partial y} + \frac{\partial u(M)}{\partial z}$.

13. Яка формула зв'язує похідну за напрямом і модуль градієнта в точці M ?

- a) $\frac{\partial u(M)}{\partial s} + |\overrightarrow{gradu}(M)| = 0$;
- b) $\frac{\partial u(M)}{\partial s} + |\overrightarrow{gradu}(M)| = 1$;
- c) $\frac{\partial u(M)}{\partial s} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{gradu}(M)|$;
- d) $\frac{\partial u(M)}{\partial s} = |\overrightarrow{gradu}(M)|$.

14. Похідна за напрямом дотичним до поверхні рівня функції $u = f(x, y, z)$ в точці M дорівнює:

- a) 1;
- b) 0;
- c) додатному числу;
- d) від'ємному числу.

15. Найбільшого значення похідна за напрямом вектора $\vec{s}$ в точці M досягає коли:

- a) напрям вектора $\vec{s}$ співпадає з напрямом градієнта в цій точці;
- b) вектор $\vec{s}$ перпендикулярний вектору градієнта;
- c) вектор $\vec{s}$ утворює кут 180° з вектором градієнта;
- d) вектор $\vec{s}$ утворює кут 45° з вектором градієнта.

Відповіді: 1.a); 2.b); 3.c); 4.a); 5.d); 6.c); 7.d); 8.a); 9.a); 10.c); 11,a); 12.b); 13.d); 14.b); 15.a).

Практичні питання

1. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$.
- a) $x^2 + y^2 = 100$;
- b) $x^2 + y^2 > 100$;
- c) $x^2 + y^2 < 100$;
- d) $x^2 + y^2 \leq 100$.
2. Задана функція $z = \ln \frac{x}{y^2}$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$.

$$a) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x};$$

$$b) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{x};$$

$$c) = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{y^2}{x^2};$$

$$d) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x}.$$

3. Задана функція $z = \sin(3x - y^3)$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$a) \frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 \cdot \cos(3x - y^3);$$

$$b) \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 \cdot \cos(3x - y^3);$$

$$c) \frac{\partial z}{\partial y} = (3 - 3y^2) \cdot \cos(3x - y^3);$$

$$d) \frac{\partial z}{\partial y} = \cos(3x - 3y^2).$$

4. Задана функція $z = x \cdot e^{2y^2} + y \cdot \ln 2x$. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

$$a) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = y \cdot e^{2y^2} + \frac{y}{x};$$

$$b) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4y \cdot e^{2y^2} + \frac{1}{x};$$

$$c) 2y \cdot e^{2y^2} + \frac{1}{x};$$

$$d) 4y \cdot e^{2y^2} + \frac{y}{x^2}.$$

5. Функція $y = f(x)$ задана в неявному виді $x^4 \cdot y^2 - x^3 \cdot y + 3x - 1 = 0$. Знайти y'_x .

$$a) y'_x = \frac{2x^4 \cdot y - x^3}{4x^3 \cdot y - 3x^2 + 3};$$

$$b) y'_x = -\frac{2x^4 \cdot y - x^3}{4x^3 \cdot y - 3x^2};$$

$$c) y'_x = \frac{4x^3 \cdot y - 3x^2 \cdot y + 3}{3x^2 \cdot y + x};$$

$$d) y'_x = -\frac{4x^3 \cdot y^2 - 3x^2 \cdot y + 3}{2x^4 \cdot y - x^3}.$$

6. Функція $z = f(x, y)$ задана в неявному виді $3x^2 \cdot y^3 \cdot z - 2x \cdot e^{3z} = 0$. Знайти z'_y .

$$a) z'_y = -\frac{9x^2 \cdot y^2 \cdot z}{3x^2 \cdot y^3 - 6x \cdot e^{3z}};$$

$$b) z'_y = -\frac{9x^2 \cdot y^2}{3x^2 \cdot y^3 - 6x \cdot e^{3z}};$$

$$c) z'_y = -\frac{3x^2 \cdot y^2 \cdot z}{3x^2 \cdot y^3 - 6x \cdot e^{3z}};$$

$$d) z'_y = -\frac{3x^2 \cdot y^2 \cdot z}{3x^2 \cdot y^3 - 2x \cdot e^{3z}}.$$

7. Яке рівняння має лінія рівня поверхні $z = x^2 - 4y$ коли $c = 2$?

$$a) z = x^2 - 4y + 2;$$

$$b) z = x^2 - 4y - 2;$$

$$c) x^2 - 4y = 2;$$

$$d) x^2 - 4y = -2.$$

8. Знайти рівняння дотичної площини до поверхні $\frac{1}{4}x^4 - 3x \cdot y^2 + x \cdot z^2 = 0$

в точці $M_0(2, -1, 1)$.

$$a) 3x - 3y + 2z - 2 = 0;$$

$$b) 3x + 6y + 2z + 2 = 0;$$

$$c) 3x - 3y + z + 2 = 0;$$

$$d) 3x + 6y + 2z - 2 = 0.$$

9. Знайти рівняння нормалі до поверхні $x^3 + 3y^2 + 5z^2 = 0$ в точці $M_0(-2, 1, 0)$.

$$a) \frac{x+2}{12} = \frac{y-1}{6} = \frac{z}{5};$$

$$b) \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z}{5};$$

$$c) \frac{x-2}{12} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{5};$$

$$d) \frac{x-2}{12} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{5}.$$

10. Знайти стаціонарні точки функції $z = x^2 + x \cdot y + y^2 - x - y$.

$$a) \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right);$$

$$b) \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right);$$

$$c) \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right);$$

$$d) \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right).$$

11. Знайти похідну функції $z = \ln(3x^2 + 2y^2)$ за напрямом вектора $\vec{s}\{3, 2\}$ в точці $M_0(2, 1)$.

- a) $\frac{22}{7\sqrt{13}};$
- b) $\frac{11}{7\sqrt{13}};$
- c) $\frac{11}{\sqrt{13}};$
- d) $\frac{9}{7\sqrt{13}}.$

12. Знайти градієнт функції $u = 2\operatorname{tg}x \cdot y + y^2 \cdot z - 2z^2$ в точці $M_0(0, 1, -2)$.

- a) $\overrightarrow{\operatorname{grad}u}(M_0) = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k};$
- b) $\overrightarrow{\operatorname{grad}u}(M_0) = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 9\vec{k};$
- c) $\overrightarrow{\operatorname{grad}u}(M_0) = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k};$
- d) $\overrightarrow{\operatorname{grad}u}(M_0) = \vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k}.$

Відповіді: 1.d); 2.d); 3.a); 4.b); 5.d); 6.a); 7.c); 8.d); 9.a); 10.a); 11.a); 12.b).

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Варіант 1

1. Знайти область визначення функції $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2y}}$ і зробити рисунок.
2. Знайти частинні похідні від функцій: $z = e^{x+5y} + \sin 8x + y^3$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$
 $u = tg^2 \frac{y}{x} + z^3 \cdot x - 5z$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$.
3. Знайти похідні z'_x, z'_y від неявно заданої функції $u(x, y, z) = 0$:
 $x \cdot z^2 + 2y^5 \cdot z - 5x = 0$.
4. Перевірити, чи буде функція $u = \ln(x^2 - y^2)$ розв'язком рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
5. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = x^2 - 2y^2 + x \cdot y + 3x$ в точці $M(2, 1, 10)$.
6. Дослідити на екстремум функцію $z = 2(x + y) - x^2 - y^2$.
7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 2x^2y - x \cdot y$ в області D , обмеженої лініями: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$.
8. Побудувати лінії рівня функції $z = x^2 + y^2 - 6y$.
9. Знайти похідну скалярного поля $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ за напрямом вектора $\vec{s}\{1; -2; 3\}$ в точці $M(0, -3, 4)$.
10. Знайти модуль градієнта скалярного поля $u = 3x^2y - x \cdot y^3$ в точці $M(2, -1)$.

Варіант 2

1. Знайти область визначення функції $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$ і зробити рисунок.
2. Знайти частинні похідні від функцій: $z = 3x \cdot y^4 - ctg \frac{x}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$;
 $u = 3^{2x-3z} + \ln(x \cdot y^2 - 2z^3)$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.
3. Знайти похідні z'_x, z'_y від неявно заданої функції $u(x, y, z) = 0$:
 $x \cdot \cos 3z + y \cdot \sin 4x - y^2 = 0$.
4. Перевірити, чи буде функція $z = x^2 + x \cdot y - y$ розв'язком рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
5. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = 2x^2 - 3y^2 - x^2y$ в точці $M(1, -1, 0)$.
6. Дослідити на екстремум функцію $z = y^2 + 3(x+2)^2$.
7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 4x \cdot y - 2y$ в області D , обмеженої лініями: $x + y = -2$, $x = 0$, $y = 0$.

8. Побудувати лінії рівня функції $z = \frac{y}{x-2}$.

9. Знайти похідну скалярного поля $u = y \cdot z + \frac{y}{x}$ за напрямом вектора $\vec{s} \{1; 2; -3\}$ в точці $M(3, -1, 2)$.

10. Знайти напрямні косинуси градієнта скалярного поля $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ в точці $M(0, -3, 4)$.

Варіант 3

1. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{1 - x^2 + y}$ і зробити рисунок.

2. Знайти частинні похідні від функцій: $z = x^3 \cdot t + \sqrt{t} - \sin \frac{t}{2x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x}$;

$u = \ln(y \cdot z^2 - x^3 z)$, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$.

3. Знайти похідні z'_x, z'_y від неявно заданої функції $u(x, y, z) = 0$:
 $x \cdot z^2 + e^{3y} \cdot x^3 - 5y = 0$.

4. Перевірити, чи буде функція $z = \sqrt{2x \cdot y + y^2}$ розв'язком рівняння $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{z}$.

5. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^2 + y^2 - (z - 5)^2 = 0$ в точці $M(4, 3, 0)$.

6. Дослідити на екстремум функцію $z = 3x^2 + 4y^2 + 6x - 8y + 15$.

7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 2x \cdot y + 4x - y^2$ в області D , обмеженої лініями: $x + y = -3, x = 0, y = 0$.

8. Побудувати лінії рівня функції $z = x^2 + y^2 - 2y$.

9. Знайти похідну скалярного поля $u = y \cdot \sqrt{x} - \sqrt{y} + y^3 \cdot z^2$ за напрямом вектора $\vec{s} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ в точці $M(4, 9, 1)$.

10. Знайти найбільше значення скалярного поля $u = y \cdot \sqrt{x} - \sqrt{y} + y^3 \cdot z^2$ в точці $M(4, 9, 1)$.

Варіант 4

1. Знайти область визначення функції $z = \frac{1}{25 - (x^2 + y^2)}$ і зробити рисунок.

2. Знайти частинні похідні від функцій: $z = \frac{y^2}{u} + e^{u^2} - \operatorname{tg} 3y$, $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial y}$;

$u = \cos(5z + 2x^2) \cdot y^3$, $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$.

3. Знайти похідні z'_x, z'_y від неявно заданої функції $u(x, y, z) = 0$:
 $y^4 \cdot \ln 2z + \sin 4x - 5z^2 - 1 = 0$.

4. Перевірити, чи буде функція $z = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$ розв'язком рівняння $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x + y}{x - y}$.

5. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^2 \cdot z + y^2 \cdot z = 4$ в точці $M(-2, 0, 1)$.
6. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 + 4x \cdot y + 5y^2 + 2x - 6y - 80$.
7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 5x^2 - 3x \cdot y + y^2 + 1$ в області D , обмеженої лініями: $x = -2, x = 1, y = -1, y = 1$.
8. Побудувати лінії рівня функції $z = \frac{x}{y+2}$.
9. Знайти похідну скалярного поля $u = z \cdot \ln(2+y^2) - \arctg x$ за напрямом вектора $\vec{s}\{1; -2; 3\}$ в точці $M(0, 1, 1)$.
10. Знайти модуль градієнта скалярного поля $u = z \cdot \ln(2+y^2) - \arctg x$ в точці $M(0, 1, 1)$.

Варіант 5

1. Знайти область визначення функції $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{y-x}}$ і зробити рисунок.
2. Знайти частинні похідні від функцій: $z = 5^{\sqrt{x}} + y^2 \cdot x^3 - 2y$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;
 $u = \operatorname{ctg}(t^2 + 2z) \cdot \ln \frac{x}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$.
3. Знайти похідні z'_x, z'_y від неявно заданої функції $u(x, y, z) = 0$:
 $\ln \frac{x}{y} + \sqrt{z \cdot x} - e^{5x} = 0$.
4. Перевірити, чи буде функція $z = (x^2 + y^2) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{y}$ розв'язком рівняння
 $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.
5. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^2 \cdot y^2 + 2x + z^2 - 41 = 0$ в точці $M(2, 3, 1)$.
6. Дослідити на екстремум функцію $z = 3x^2 - 4x \cdot y + y^2 + 10x - 8y + 5$.
7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 4 - 2x^2 - y^2$ в області D , обмеженої лініями: $y = 2x, x = 0, y = 4$.
8. Побудувати лінії рівня функції $z = 2x^2 - y$.
9. Знайти похідну скалярного поля $u = \sqrt{x \cdot y} - \sqrt{17 - z^2}$ за напрямом вектора $\vec{s}\{0; 2; -1\}$ в точці $M(1, 3, -4)$.
10. Знайти найбільшу швидкість зростання скалярного поля $u = \sqrt{x \cdot y} - \sqrt{17 - z^2}$ в точці $M(1, 3, -4)$.

Варіант 6

1. Знайти область визначення функції $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y-2}$ і зробити рисунок.

- Знайти частинні похідні від функцій: $z = \operatorname{arctg} 3x - 2x^3 + 3\sqrt{u}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial u}$;
 $u = e^{2x-3z} + \sin 4y - 5z^3$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$.
- Знайти похідні z'_x, z'_y від неявно заданої функції $u(x, y, z) = 0$:
 $x^4 \cdot y^2 + \cos 5z - \operatorname{ctg} 2y = 0$.
- Перевірити, чи буде функція $z = \sin^2(x - 5y)$ розв'язком рівняння $25 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
- Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $(x-5)^2 + 2y^2 - z^4 - 5 = 0$ в точці $M(3, 1, 1)$.
- Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 + 2y^2 - 4x + 12y$.
- Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 2x \cdot y - y^2 - 2x + 2y$ в області D , обмеженої лініями: $y = x + 2, y = 0, x = 1$.
- Побудувати лінії рівня функції $z = x^2 + 2x + y^2$.
- Знайти похідну скалярного поля $u = \sqrt{x \cdot y} - \sqrt{17 - z^2}$ за напрямом вектора $\vec{s} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$ в точці $M(2, 2, 1)$.
- Знайти напрямні косинуси градієнта скалярного поля $u = \sqrt{x \cdot y} - \sqrt{17 - z^2}$ в точці $M(2, 2, 1)$.

Варіант 7

- Знайти область визначення функції $z = \ln(x^2 - 2y + 2)$ і зробити рисунок.
- Знайти частинні похідні від функцій: $z = \frac{x^2}{x + 2y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;
 $u = \operatorname{tg} \frac{z}{t} + 2y^2 \cdot t - e^{5z}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t}$.
- Знайти похідні z'_x, z'_y від неявно заданої функції $u(x, y, z) = 0$: $\frac{x \cdot z}{y} = e^{2y-5z}$.
- Перевірити, чи буде функція $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ розв'язком рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
- Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^2 + 4y^2 - 17z^2 = 0$ в точці $M(1, 2, -1)$.
- Дослідити на екстремум функцію $z = 2x^2 - 4x \cdot y + 6y^2 - 8x + 16y + 19$.
- Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 6x \cdot y - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$ в області D , обмеженої лініями: $x = 1, x = 4, y = 0, y = 2$.
- Побудувати лінії рівня функції $z = -3x \cdot y$.
- Знайти похідну скалярного поля $u = \sqrt{2x + z} - x \cdot \operatorname{arctg} y$ за напрямом вектора $\vec{s} \{2; 3; -1\}$ в точці $M(2, 1, 5)$.

10. Знайти модуль градієнта скалярного поля $u = \sqrt{2x+z} - x \cdot \operatorname{arctg} y$ в точці $M(2,1,5)$.

Варіант 8

1. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{2x} - \frac{4}{\sqrt{y}}$ і зробити рисунок.

2. Знайти частинні похідні від функцій: $z = \ln(x \cdot y^2) - \frac{1}{x} + \operatorname{ctg} 3y$, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

$$u = \sin(t^2 + 2z) \cdot \cos \frac{x}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z}.$$

3. Знайти похідні z'_x, z'_y від неявно заданої функції $u(x, y, z) = 0$:
 $\operatorname{arctg}(2x+y) + \ln \frac{z}{x} = 0$.

4. Перевірити, чи буде функція $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-x \cdot y}$ розв'язком рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

5. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^3 - 4y^3 + 2z^3 = 30$ в точці $M(2,2,3)$.

6. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 - 6x \cdot y + 10y^2 - 2x + 6y + 7$.

7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 2x \cdot y - 4x - y^2$ в області D , обмеженої лініями: $y = x+1, x=2, y=0$.

8. Побудувати лінії рівня функції $z = 2y - x^2$.

9. Знайти похідну скалярного поля $u = x^2 \cdot z^2 - \ln(y-1)$ за напрямом вектора $\vec{s} = -\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$ в точці $M(1,2,2)$.

10. Знайти найбільше значення скалярного поля $u = x^2 \cdot z^2 - \ln(y-1)$ в точці $M(1,2,2)$.

Варіант 9

1. Знайти область визначення функції $z = \frac{1}{\sqrt{x \cdot y}}$ і зробити рисунок.

2. Знайти частинні похідні від функцій: $z = 2^{\sqrt{y}} + 3y^2 \cdot x^3 - 2y$, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$;

$$u = e^{2t-3z} + \sin 4y - 5z^3 \cdot t^2, \quad \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}.$$

3. Знайти похідні z'_x, z'_y від неявно заданої функції $u(x, y, z) = 0$: $\operatorname{tg}(3z - y) = \sqrt{x \cdot z}$.

4. Перевірити, чи буде функція $z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(x \cdot y)$ розв'язком рівняння

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 = x \cdot y \frac{\partial z}{\partial y}.$$

5. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = 2x^2 + 4y^2$ в точці $M(2,1,12)$.

6. Дослідити на екстремум функцію $z = (x-1)^2 + 4y^2$.

7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 2(x - y) - x^2 - y^2$ в області D , обмеженої лініями: $x - 2y = 8, x = 0, y = 0$.
8. Побудувати лінії рівня функції $z = y^2 - 4x$.
9. Знайти похідну скалярного поля $u = x \cdot y^3 - \frac{z}{x}$ за напрямом вектора $\vec{s} \{2; -3; 1\}$ в точці $M(2, 1, 5)$.
10. Знайти напрямні косинуси градієнта скалярного поля $u = x \cdot y^3 - \frac{z}{x}$ в точці $M(2, 1, 5)$.

Варіант 10

1. Знайти область визначення функції $z = \frac{x}{4\sqrt{x+y}}$ і зробити рисунок.
2. Знайти частинні похідні від функцій: $z = \sin \sqrt{x} \cdot y^2 + \frac{y}{x^2} + 2x$, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;
 $z = u^3 \cdot x^2 + \ln 2t - e^{2u-t}$, $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u}$.
3. Знайти похідні z'_x, z'_y від неявно заданої функції $u(x, y, z) = 0$:
 $x \cdot e^{3y} - \arcsin 3z = (x + 2)^2$.
4. Перевірити, чи буде функція $z = \ln(x^2 + y^2)$ розв'язком рівняння $y \frac{\partial z}{\partial x} = x \frac{\partial z}{\partial y}$.
5. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = e^{x \cdot \cos y}$, в точці $M(1, \pi, \frac{1}{e})$.
6. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 - x \cdot y + y^2 - 2x + y$.
7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 3x \cdot y$ в області D , обмеженої лініями: $x = 0, x = 3, y = -1, y = 2$.
8. Побудувати лінії рівня функції $z = \frac{3x}{y+1}$.
9. Знайти похідну скалярного поля $u = x^2 \cdot y + \sqrt{y+z^2}$ за напрямом вектора $\vec{s} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ в точці $M(1, 5, -2)$.
10. Знайти модуль градієнта скалярного поля $u = x^2 \cdot y + \sqrt{y+z^2}$ в точці $M(1, 5, -2)$.

Варіант 11

1. Знайти область визначення функції $z = \arcsin(x - y)$ і зробити рисунок.
2. Знайти частинні похідні від функцій: $z = x^{y^2+5}$, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$; $u = \arctg x^2 - y^3 \cdot z^2 + e^z$,
 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$.
3. Знайти похідні z'_x, z'_y від неявно заданої функції $u(x, y, z) = 0$:
 $\ln(3z - 5x) - 2x + \cos y^2 = 0$.

4. Перевірити, чи буде функція $z = x \cdot \ln \frac{y}{x}$ розв'язком рівняння $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$.
5. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = \sin x \cdot \cos y$ в точці $M(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$.
6. Дослідити на екстремум функцію $z = 4x^2 + (y-2)^2$.
7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 - 2x \cdot y - y^2 + 4x + 1$ в області D , обмеженої лініями: $x + 2y + 8 = 0, x = 0, y = 0$.
8. Побудувати лінії рівня функції $z = x^2 + y^2 - 4y$.
9. Знайти похідну скалярного поля $u = x \cdot (\ln y + \arctg z)$ за напрямом вектора $\vec{s} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ в точці $M(0,1,1)$.
10. Знайти напрямні косинуси градієнта скалярного поля $u = x \cdot (\ln y + \arctg z)$ в точці $M(0,1,1)$.

Варіант 12

1. Знайти область визначення функції $z = 2x^2 + 3y^2 + 5x - 1$ і зробити рисунок.
2. Знайти частинні похідні від функцій: $z = \ln \frac{y}{x^3 - 2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};$
 $t = \sin 3x \cdot \cos 4z - e^{2x+5y}, \quad \frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial z}, \frac{\partial^2 t}{\partial y \partial z}.$
3. Знайти похідні z'_x, z'_y від неявно заданої функції $u(x, y, z) = 0$:
 $x^3 \cdot z^2 - e^{2y} \cdot x^3 - 5z = 0.$
4. Перевірити, чи буде функція $z = e^{-\cos(x+3y)}$ розв'язком рівняння $9 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$
5. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1$ в точці $M(5, -4, 3)$.
6. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 + 3x \cdot y - 15x - 12y$.
7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x \cdot y - 3x - 2y$ в області D , обмеженої лініями: $y = x - 2, y = 0, x = 3$.
8. Побудувати лінії рівня функції $z = x^2 - 6y$.
9. Знайти похідну скалярного поля $u = \ln(4 - x^2) + x \cdot y^2 \cdot z$ за напрямом вектора $\vec{s} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ в точці $M(1, 3, 2)$.
10. Знайти найбільшу швидкість зростання скалярного поля $u = \ln(4 - x^2) + x \cdot y^2 \cdot z$ в точці $M(1, 3, 2)$.

Варіант 13

1. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{4 - x^2 + y}$ і зробити рисунок.

- Знайти частинні похідні від функцій: $z = \cos \sqrt{x} \cdot y^3 - \frac{y}{x^2} + 5x$, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;
 $y = u^2 \cdot x^2 + \ln 5t - e^{2u-7t}$, $\frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial u}$.
- Знайти похідні z'_x, z'_y від неявно заданої функції $u(x, y, z) = 0$:
 $z^4 \cdot \ln 2y + \cos 4x - 5z^2 - 5 = 0$.
- Перевірити, чи буде функція $z = y \cdot \sqrt{\frac{y}{x}}$ розв'язком рівняння $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
- Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^2 + y^2 - 2e^z = 0$ в точці $M(1, -1, 0)$.
- Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + y^3 - 3x \cdot y$.
- Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 - 2x \cdot y + \frac{5}{2}y^2 - 2x$ в області D , обмеженої лініями: $x = 0, x = 4, y = 0, y = 2$.
- Побудувати лінії рівня функції $z = x^2 + y^2$.
- Знайти похідну скалярного поля $u = \sin(x + 2y) + \sqrt{z}$ за напрямом вектора $\vec{s} \{4; 3; 0\}$ в точці $M(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 9)$.
- Знайти модуль градієнта скалярного поля $u = \sin(x + 2y) + \sqrt{z}$ в точці $M(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, 9)$.

Варіант 14

- Знайти область визначення функції $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$ і зробити рисунок.
- Знайти частинні похідні від функцій: $z = e^{\sqrt{x+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;
 $u = ctgx^2 - y^2 \cdot z^3 + e^{2z}$, $\dots \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$.
- Знайти похідні z'_x, z'_y від неявно заданої функції $u(x, y, z) = 0$: $\ln \frac{x}{y} + \sqrt{z} - e^{5x} = 0$.
- Перевірити, чи буде функція $z = \sin^2(x - 2y)$ розв'язком рівняння $4 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
- Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ в точці $M(4, 3, -2)$.
- Дослідити на екстремум функцію $z = x \cdot y - 3x^2 - 2y^2$.
- Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 2x^2 + 2x \cdot y - \frac{1}{2}y^2 - 4x$ в області D , обмеженої лініями: $y = 3x, x = 0, y = 6$.
- Побудувати лінії рівня функції $z = 6x^2 - y$.

9. Знайти похідну скалярного поля $u = x^2 \cdot y^2 \cdot z - \ln(z-1)$ за напрямом вектора $\vec{s} \{5; -6; 2\sqrt{5}\}$ в точці $M(1,1,2)$.
10. Знайти найбільшу швидкість зростання скалярного поля $u = x^2 \cdot y^2 \cdot z - \ln(z-1)$ в точці $M(1,1,2)$.

Варіант 15

1. Знайти область визначення функції $z = \frac{1}{y} + \frac{1}{x+3}$ і зробити рисунок.
2. Знайти частинні похідні від функцій: $z = \frac{\sin 3x}{y} + \frac{y}{x} - 5x$, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;
 $u = \ln x^2 - y^2 \cdot z^3 + e^{7z}$, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$.
3. Знайти похідні z'_x, z'_y від неявно заданої функції $u(x, y, z) = 0$: $z - y = tg \frac{x}{z}$.
4. Перевірити, чи буде функція $z = e^{x \cdot y}$ розв'язком рівняння $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.
5. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $\frac{x^2 \cdot z}{16} + \frac{y^2}{9} - z = 0$ в точці $M(4,0,-3)$.
6. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 + x \cdot y + y^2 - 2x - y$.
7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$ в області D , обмеженої лініями: $x = -2, x = 4, y = -1, y = 2$.
8. Побудувати лінії рівня функції $z = x^2 + 10x + y^2$.
9. Знайти похідну скалярного поля $u = \ln(2x + 3y^2) - x \cdot z$ за напрямом вектора $\vec{s} = \vec{j} + 5\vec{k}$ в точці $M(1, -1, 4)$.
10. Знайти найбільше значення скалярного поля $u = \ln(2x + 3y^2) - x \cdot z$ в точці $M(3, 1, -1)$.

Варіант 16

1. Знайти область визначення функції $z = \frac{1}{25 + x^2 + y^2}$ і зробити рисунок.
2. Знайти частинні похідні від функцій: $z = \sin \frac{y}{x} - 3y^2 + 2x^3$, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;
 $x = \ln t^2 - y^2 \cdot z^3 + e^{-z}$, $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z}$.
3. Знайти похідні z'_x, z'_y від неявно заданої функції $u(x, y, z) = 0$:
 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + \frac{y}{z} = 0$.
4. Перевірити, чи буде функція $z = \frac{x \cdot y}{x + y}$ розв'язком рівняння $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

5. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z - y^2 - \ln \frac{x}{z} = 0$ в точці $M(1, 1, 1)$.
6. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 - x \cdot y + y^2 + x + y$.
7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 - 2x \cdot y - y^2 + 2x + 1$ в області D , обмеженої лініями: $y = -2x, x = 0, y = 4$.
8. Побудувати лінії рівня функції $z = x^2 - 8y$.
9. Знайти похідну скалярного поля $u = \sqrt{x \cdot z} - \frac{y^2}{z}$ за напрямом вектора $\vec{s} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ в точці $M(2, -1, 4)$.
10. Знайти напрямні косинуси градієнта скалярного поля $u = \sqrt{x \cdot z} - \frac{y^2}{z}$ в точці $M(1, 2, 4)$.

Варіант 17

1. Знайти область визначення функції $z = \ln(y^2 - x + 2)$ і зробити рисунок.
2. Знайти частинні похідні від функцій: $z = e^{x^3 - y^2} + y \cdot \arctg 3x$, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$;
 $u = \sin 3x \cdot \cos 4z - e^{2u+5y} \cdot z^4$, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$.
3. Знайти похідні z'_x, z'_y від неявно заданої функції $u(x, y, z) = 0$: $y \cdot z^4 - x^3 \cdot z + y^4 = 0$.
4. Перевірити, чи буде функція $z = x^y$ розв'язком рівняння $y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} (1 + y \cdot \ln x)$.
5. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^3 + 2y^2 - z^4 + 7 = 0$ в точці $M(1, -2, 2)$.
6. Дослідити на екстремум функцію $z = x \cdot y(6 - x)$.
7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$ в області D , обмеженої лініями: $y = x, y = -x, y = 2$.
8. Побудувати лінії рівня функції $z = 2x \cdot y$.
9. Знайти похідну скалярного поля $u = \sqrt{2x + y} + x \cdot \arctg z$ за напрямом вектора $\vec{s} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$ в точці $M(1, 2, 0)$.
10. Знайти модуль градієнта скалярного поля $u = \sqrt{2x + y} + x \cdot \arctg z$ в точці $M(5, 6, 0)$.

Варіант 18

1. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{y} - \frac{4}{\sqrt{5x}}$ і зробити рисунок.
2. Знайти частинні похідні від функцій: $z = \frac{\cos 2x}{t} + \frac{t}{x} - 4x$, $\frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

$$u = \sin 2x \cdot \operatorname{tg} 3z - e^{2+5y} \cdot z^3, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}.$$

3. Знайти похідні z'_x, z'_y від неявно заданої функції $u(x, y, z) = 0$: $x + 2y - \ln(z^2 + y^2) = 0$.

4. Перевірити, чи буде функція $z = \ln(x^2 + (y+1)^2)$ розв'язком рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

5. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $\frac{1}{9}x^3 + y^2 - x \cdot z = 4$ в точці $M(3, -4, 5)$.

6. Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 - x \cdot y + y^2 + 9x - 6y + 20$.

7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$ в області D , обмеженої лініями: $x + y + 4 = 0, x = 0, y = 0$.

8. Побудувати лінії рівня функції $z = x^2 - y^2$.

9. Знайти похідну скалярного поля $u = z^3 + \arctg(x + y)$ за напрямом вектора $\vec{s} = 3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ в точці $M(-1, 2, 3)$.

10. Знайти градієнт скалярного поля $u = z^3 + \arctg(x + y)$ в точці $M(-1, 0, -2)$.

Варіант 19

1. Знайти область визначення функції $z = \frac{x}{\sqrt{x-y}}$ і зробити рисунок.

2. Знайти частинні похідні від функцій: $z = \ln \frac{3x}{y^2 + 3}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$

$$u = e^{3z-4t} - y^2 \cdot z^3 + \sqrt{t}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}.$$

3. Знайти похідні z'_x, z'_y від неявно заданої функції $u(x, y, z) = 0$: $\cos \frac{z}{y} - x^3 \cdot z^2 = 2x$.

4. Перевірити, чи буде функція $z = x^3 - y^3 + \ln \frac{y}{x}$ розв'язком рівняння $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 3(x^3 - y^3)$.

5. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^2 \cdot y - 2z^2 \cdot x = 40$ в точці $M(-2, 1, 3)$.

6. Дослідити на екстремум функцію $z = x \cdot y - x^2 - y^2 + 9$.

7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = \frac{1}{2}x^2 - x \cdot y - y^2$ в області D , обмеженої лініями: $y = 2x^2, y = 8$.

8. Побудувати лінії рівня функції $z = x^2 - 4y$.

9. Знайти похідну скалярного поля $u = \ln(x + y^2) + x \cdot z$ за напрямом вектора $\vec{s} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ в точці $M(2, 3, 0)$.

10. Знайти напрямні косинуси градієнта скалярного поля $u = \ln(x + y^2) + x \cdot z$ в точці $M(-1, 2, 4)$.

Варіант 20

1. Знайти область визначення функції $z = \arcsin(2y - x)$ і зробити рисунок.

2. Знайти частинні похідні від функцій: $z = \cos \frac{x}{y} + 3y^2 + 2\sqrt{x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

$$u = \cos 3x \cdot \operatorname{ctg} 2z - e^{1+5y} \cdot z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}.$$

3. Знайти похідні z'_x, z'_y від неявно заданої функції $u(x, y, z) = 0$: $\sin 5z + \ln(3x - y^2) - z^3 = 0$.

4. Перевірити, чи буде функція $z = \frac{x}{y}$ розв'язком рівняння

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2x \cdot y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

5. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $3^{\frac{x}{z}} + 3^{\frac{y}{z}} - 36 = 0$ в точці $M(2, 3, 1)$.

6. Дослідити на екстремум функцію $z = 2x \cdot y - 5x^2 - 3y^2 + 2$.

7. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 2x \cdot y - 10$ в області D , обмеженої лініями: $y = x^2 - 4, y = 0$.

8. Побудувати лінії рівня функції $z = x^2 + y^2 - 4x$.

9. Знайти похідну скалярного поля $u = x \cdot y - \frac{x}{z}$ за напрямом вектора $\vec{s} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ в точці $M(4, 3, -1)$.

10. Знайти модуль градієнта скалярного поля $u = x \cdot y - \frac{x}{z}$ в точці $M(2, -3, 1)$.

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ У MAPLE

Варіант 1

1. Задана функція $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1$.
 - 1) побудувати 3-D графік функції в області $R \{ x \in [-5, 5], y \in [-4, 4] \}$;
 - 2) побудувати три лінії рівня $f(x, y) = c$ в області R . Значення c вибрати так, щоб лінії рівня відображали форму поверхні.
2. Задана функція $f(x, y) = \sin(x \cdot y) + x^2 \cdot y$.
 - 1) знайти частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$;
 - 2) знайти $f'_y(M_0)$, якщо $M_0(1, \frac{\pi}{3})$.
3. Задана функція $f(x, y) = \sin(x \cdot y) + x^2 \cdot y$.
 - 1) знайти похідну за напрямом вектора $\vec{s}\{2; -5\}$ в точці $M_0(1, \frac{\pi}{3})$;
 - 2) знайти градієнт функції;
 - 3) знайти градієнт функції в точці $M_0(1, \frac{\pi}{3})$.
4. Задана функція $f(x, y) = \sin(x \cdot y) + x^2 \cdot y$.
 - 1) побудувати векторне поле градієнта в області $x \in [-5, 5], y \in [-4, 8]$;
 - 2) знайти напрям найшвидшого зростання функції в точці $M_0(1, \frac{\pi}{3})$.
5. Функція $z = f(x, y)$ задана в неявному виді $F(x, y, z) = 0$:
 $z \cdot \arctg x + \arcsin y + 3 \cos 2z - x^3 + 2 = 0$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.
6. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = y + \ln \frac{x}{y}$ в точці $M_0(1, 1, 1)$. Побудувати поверхню, дотичну площину і нормаль.
7. Задана функція $z = 3x^2 \cdot y + y^3 - 18x - 30y$.
 - 1) знайти стаціонарні точки;
 - 2) скласти матрицю Гессе і визначити характер кожної стаціонарної точки;
 - 3) підтвердити результат графічно (3-D графік з відміченими точками екстремуму (якщо вони існують)).
8. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = 6 - 4x - 3y$, при заданому рівнянні зв'язку $x^2 + y^2 = 1$.

Варіант 2

1. Задана функція $f(x, y) = x^2 - 4x \cdot y - y^2 + 5$.
 - 1) побудувати 3-D графік функції в області $R \{ x \in [-10, 6], y \in [-4, 12] \}$;
 - 2) побудувати три лінії рівня $f(x, y) = c$ області R . Значення c вибрати так, щоб лінії рівня відображали форму поверхні.

2. Задана функція $f(x, y) = x^2 - 4x \cdot y - \sqrt[3]{y}$.
- 1) знайти частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$;
 - 2) знайти $f'_x(M_0)$, якщо $M_0(-1, 0)$.
3. Задана функція $f(x, y) = x^2 - 4x \cdot y - \sqrt[3]{y}$.
- 1) знайти похідну за напрямом вектора $\vec{s}\{1; 2\}$ в точці $M(-1, 0)$;
 - 2) знайти градієнт функції;
 - 3) знайти градієнт функції в точці $M_0(-1, 0)$.
4. Задана функція $f(x, y) = x^2 - 4x \cdot y - \sqrt[3]{y}$.
- 1) побудувати векторне поле градієнта в області $x \in [-5, 10]$, $y \in [-10, 5]$;
 - 2) знайти напрям найшвидшого зростання функції в точці $M(-1, 0)$.
5. Функція $z = f(x, y)$ задана в неявному виді $F(x, y, z) = 0$:
- $$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 1 = 0.$$
- Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в точці $M(1, 2, 2)$.
6. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $2x^2 - 3y^2 + z^2 + 2x \cdot y - 1 = 0$ в точці $M(1, -1, 2)$. Побудувати поверхню, дотичну площину і нормаль.
7. Задана функція $z = x^2 + y^2 - x \cdot y - 2x + y$.
- 1) знайти стаціонарні точки;
 - 2) скласти матрицю Гессе і визначити характер кожної стаціонарної точки;
 - 3) підтвердити результат графічно (3-D графік з відміченими точками екстремуму (якщо вони існують)).
8. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = x \cdot y$, при заданому рівнянні зв'язку $x^2 + y^2 = 3$.

Варіант 3

1. Задана функція $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 4x + 2y + 2$.
- 1) побудувати 3-D графік функції в області $R\{x \in [-10, 5], y \in [-5, 10]\}$;
 - 2) побудувати три лінії рівня $f(x, y) = c$ області R . Значення c вибрати так, щоб лінії рівня відображали форму поверхні.
2. Задана функція $f(x, y) = 12x \cdot y + 4x^2 - y^2$.
- 1) знайти частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$;
 - 2) знайти $f'_y(M_0)$, якщо $M_0(1, 1)$.
3. Задана функція $f(x, y) = 12x \cdot y + 4x^2 - y^2$.
- 1) знайти похідну за напрямом вектора $\vec{s}\{-3; 4\}$ в точці $M_0(1, 1)$;
 - 2) знайти градієнт функції;

- 3) знайти градієнт функції в точці $M_0(1,1)$.
4. Задана функція $f(x, y) = 12x \cdot y + 4x^2 - y^2$.
- 1) побудувати векторне поле градієнта в області $x \in [-10, 5]$, $y \in [-5, 10]$;
 - 2) знайти напрям найшвидшого зростання функції в точці $M_0(1,1)$.
5. Функція $z = f(x, y)$ задана в неявному виді $F(x, y, z) = 0$:
 $z - y - \ln \frac{x}{z} = 0$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в точці $M(1,1,1)$.
6. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = x^2 + 2y^2 + 4x \cdot y - 5x$ в точці $M(-2, 0, 14)$. Побудувати поверхню, дотичну площину і нормаль.
7. Задана функція $z = x^3 + y^3 - 3x \cdot y$.
- 1) знайти стаціонарні точки;
 - 2) скласти матрицю Гессе і визначити характер кожної стаціонарної точки;
 - 3) підтвердити результат графічно (3-D графік з відміченими точками екстремуму (якщо вони існують)).
8. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = 2x - 3y + 1$, при заданому рівнянні зв'язку $(x+1)^2 + y^2 = 4$.

Варіант 4

1. Задана функція $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 4x + 2y$.
 - 1) побудувати 3-D графік функції в області $R \{ x \in [-5, 8], y \in [-2, 12] \}$;
 - 2) побудувати три лінії рівня $f(x, y) = c$ області R . Значення c вибрати так, щоб лінії рівня відображали форму поверхні.
2. Задана функція $f(x, y) = x \cdot y - 5x^2 - y^2$.
 - 1) знайти частинні похідні $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$;
 - 2) знайти $f'_x(M_0)$, якщо $M_0(0,1)$.
3. Задана функція $f(x, y) = x \cdot y - 5x^2 - y^2$.
 - 1) знайти похідну за напрямом вектора $\vec{s} \{-5; 3\}$ в точці $M_0(0,1)$;
 - 2) знайти градієнт функції
 - 3) знайти градієнт функції в точці $M_0(0,1)$.
4. Задана функція $f(x, y) = x \cdot y - 5x^2 - y^2$.
 - 1) Побудувати векторне поле градієнта в області $x \in [-10, 10]$, $y \in [-5, 10]$;
 - 2) знайти напрям найшвидшого зростання функції в точці $M_0(0,1)$.
5. Функція $z = f(x, y)$ задана в неявному виді $F(x, y, z) = 0$:
 $x^2 + y^2 + 2x - y + 4z - 13 = 0$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в точці $M(1, 2, 2)$.

6. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^2 + 3y^2 + 2z - 4x \cdot y - 32 = 0$ в точці $M(-2, 0, 14)$. Побудувати поверхню, дотичну площину і нормаль.

7. Задана функція $z = 2x^3 + y^2 - x \cdot y^2 + 5x^2$.

1) знайти стаціонарні точки;

2) скласти матрицю Гессе і визначити характер кожної стаціонарної точки;

3) підтвердити результат графічно (3-D графік з відміченими точками екстремуму (якщо вони існують)).

8. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = 3x \cdot y$, при заданому рівнянні зв'язку $x + 5y = 1$.

Варіант 5

1. Задана функція $f(x, y) = x^2 - x \cdot y - y^2 + 5y$.

1) побудувати 3-D графік функції в області $R \{ x \in [-5, 15], y \in [-8, 4] \}$;

2) побудувати три лінії рівня $f(x, y) = c$ області R . Значення c вибрати так, щоб лінії рівня відображали форму поверхні.

2. Задана функція $f(x, y) = x^3 + 3x^2 - 2x \cdot y - y$.

1) знайти частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$;

2) знайти $f'_x(M_0)$, якщо $M_0(4, 2)$.

3. Задана функція $f(x, y) = x^3 + 3x^2 - 2x \cdot y - y$.

1) знайти похідну за напрямом вектора $\vec{s} \{-5; 3\}$ в точці $M_0(4, 2)$;

2) знайти градієнт функції;

3) знайти градієнт функції в точці $M_0(4, 2)$.

4. Задана функція $f(x, y) = x^3 + 3x^2 - 2x \cdot y - y$.

1) побудувати векторне поле градієнта в області $x \in [-5, 10]$, $y \in [-10, 10]$;

2) знайти напрям найшвидшого зростання функції в точці $M_0(4, 2)$.

5. Функція $z = f(x, y)$ задана в неявному виді $F(x, y, z) = 0$:

$\cos \frac{y}{x \cdot z} - z = 0$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в точці $M(-1, \pi, -1)$.

6. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^2 + y^2 + z^2 - 2x \cdot y - 2x \cdot z - 4 = 0$ в точці $M(1, -1, 2)$. Побудувати поверхню, дотичну площину і нормаль.

7. Задана функція $z = x^3 + 3x \cdot y^2 - 15x - 12y$.

1) знайти стаціонарні точки;

2) скласти матрицю Гессе і визначити характер кожної стаціонарної точки;

3) підтвердити результат графічно (3-D графік з відміченими точками екстремуму (якщо вони існують)).

8. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = 3x - 5y + 2$, при заданому рівнянні зв'язку $x^2 + y^2 = 9$.

Варіант 6

1. Задана функція $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x \cdot y + y - 1$.

- 1) побудувати 3-D графік функції в області $R \{ x \in [-4, 8], y \in [-4, 4] \}$;
- 2) побудувати три лінії рівня $f(x, y) = c$ області R . Значення c вибрати так, щоб лінії рівня відображали форму поверхні.

2. Задана функція $f(x, y) = x^3 + y^3 - 2x \cdot y - y$.

- 1) знайти частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$;
 - 2) знайти $f'_y(M_0)$, якщо $M_0(2, -5)$.
3. Задана функція $f(x, y) = x^3 + y^3 - 2x \cdot y - y$.
- 1) знайти похідну за напрямом вектора $\vec{s}\{4; -3\}$ в точці $M_0(2, -5)$;
 - 2) знайти градієнт функції;
 - 3) знайти градієнт функції в точці $M_0(2, -5)$.

4. Задана функція $f(x, y) = x^3 + y^3 - 2x \cdot y - y$.

- 1) побудувати векторне поле градієнта в області $x \in [-5, 10]$, $y \in [-10, 10]$;
- 2) знайти напрям найшвидшого зростання функції в точці $M_0(2, -5)$.

5. Функція $z = f(x, y)$ задана в неявному виді $F(x, y, z) = 0$:

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 + x \cdot y + y \cdot z - 2x \cdot z + 16 = 0. \text{ Знайти } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \text{ в точці } M(1, 2, -3).$$

6. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $2x^2 - y^2 + 3z^2 - 4x - 2y - 10 = 0$ в точці $M(1, 0, -2)$. Побудувати поверхню, дотичну площину і нормаль.

7. Задана функція $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.

- 1) знайти стаціонарні точки;
- 2) скласти матрицю Гессе і визначити характер кожної стаціонарної точки;
- 3) підтвердити результат графічно (3-D графік з відміченими точками екстремуму (якщо вони існують)).

8. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = 4x \cdot y$, при заданому рівнянні зв'язку $x^2 + y^2 = 5$.

Варіант 7

1. Задана функція $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 4x + 2y + 10$.

- 1) побудувати 3-D графік функції в області $R \{ x \in [-5, 10], y \in [-8, 4] \}$;
- 2) побудувати три лінії рівня $f(x, y) = c$ області R . Значення c вибрати так, щоб лінії рівня відображали форму поверхні.

2. Задана функція $f(x, y) = \arctg \frac{x^2}{\sqrt{y}}$.

- 1) знайти частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$;
- 2) знайти $f'_x(M_0)$, якщо $M_0(2, 4)$.
3. Задана функція $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{\sqrt{y}}$.
 - 1) знайти похідну за напрямом вектора $\vec{s}\{-2; -3\}$ в точці $M_0(2, 4)$;
 - 2) знайти градієнт функції;
 - 3) знайти градієнт функції в точці $M_0(2, 4)$.
4. Задана функція $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{\sqrt{y}}$.
 - 1) побудувати векторне поле градієнта в області $x \in [-2, 15]$, $y \in [2, 16]$;
 - 2) знайти напрям найшвидшого зростання функції в точці $M_0(2, 4)$.
5. Функція $z = f(x, y)$ задана в неявному виді $F(x, y, z) = 0$:
 $x - y + \ln(y^2 + z^2) = 0$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точці $M(1, 1, 0)$.
6. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні
 $z = 3x^2 - 4y^2 - 2x \cdot y + 5y$ в точці $M(2, 1, 9)$. Побудувати поверхню, дотичну площину і нормаль.
7. Задана функція $z = x^2 + y^2 + x \cdot y - 3x - 6y$.
 - 1) знайти стаціонарні точки;
 - 2) скласти матрицю Гессе і визначити характер кожної стаціонарної точки;
 - 3) підтвердити результат графічно (3-D графік з відміченими точками екстремуму (якщо вони існують)).
8. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = 7x + 5y - 3$, при заданому рівнянні зв'язку $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

Варіант 8

1. Задана функція $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x \cdot y + 2x + 2$.
 - 1) побудувати 3-D графік функції в області $R\{x \in [-10, 10], y \in [-5, 5]\}$;
 - 2) побудувати три лінії рівня $f(x, y) = c$ області R . Значення c вибрати так, щоб лінії рівня відображали форму поверхні.
2. Задана функція $f(x, y) = 12x^2 \cdot y^3 - 5x^4$.
 - 1) знайти частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$;
 - 2) знайти $f'_y(M_0)$, якщо $M_0(-1, 2)$.
3. Задана функція $f(x, y) = 12x^2 \cdot y^3 - 5x^4$.
 - 1) знайти похідну за напрямом вектора $\vec{s}\{-2; 3\}$ в точці $M_0(-1, 2)$;
 - 2) знайти градієнт функції;

- 3) знайти градієнт функції в точці $M_0(-1, 2)$.
4. Задана функція $f(x, y) = 12x^2 \cdot y^3 - 5x^4$.
- 1) побудувати векторне поле градієнта в області $x \in [-5, 15]$, $y \in [-10, 5]$;
 - 2) знайти напрям найшвидшого зростання функції в точці $M_0(-1, 2)$.
5. Функція $z = f(x, y)$ задана в неявному виді $F(x, y, z) = 0$:
- $$x^2 + y^2 - x + 2y + 4z - 13 = 0.$$
- Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в точці $M(2, 1, 2)$.
6. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $2x^2 - y^2 - 2z^2 - 2z + 4 = 0$ в точці $M(2, 0, -3)$. Побудувати поверхню, дотичну площину і нормаль.
7. Задана функція $z = x \cdot \sqrt{y} - x^2 - y + 2x$.
- 1) знайти стаціонарні точки;
 - 2) скласти матрицю Гессе і визначити характер кожної стаціонарної точки;
 - 3) підтвердити результат графічно (3-D графік з відміченими точками екстремуму (якщо вони існують)).
8. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = x^2 - 2y^2$, при заданому рівнянні зв'язку $x - 5y = 2$.

Варіант 9

1. Задана функція $f(x, y) = 3x^2 + y^2 + 4x - y - 1$.
- 1) побудувати 3-D графік функції в області $R \{ x \in [-6, 6], y \in [-5, 10] \}$;
 - 2) побудувати три лінії рівня $f(x, y) = c$ області R . Значення c вибрати так, щоб лінії рівня відображали форму поверхні.
2. Задана функція $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2x^2 \cdot y - x$.
- 1) знайти частинні похідні $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$;
 - 2) знайти $f'_x(M_0)$, якщо $M_0(1, 3)$.
3. Задана функція $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2x^2 \cdot y - x$.
- 1) знайти похідну за напрямом вектора $\vec{s}\{2; -4\}$ в точці $M_0(1, 3)$;
 - 2) знайти градієнт функції;
 - 3) знайти градієнт функції в точці $M_0(1, 3)$.
4. Задана функція $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2x^2 \cdot y - x$.
- 1) побудувати векторне поле градієнта в області $x \in [-5, 15]$, $y \in [0, 10]$;
 - 2) знайти напрям найшвидшого зростання функції в точці $M_0(1, 3)$.
5. Функція $z = f(x, y)$ задана в неявному виді $F(x, y, z) = 0$:
- $$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} - 1 = 0.$$
- Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в точці $M(6, 3, 4)$.

6. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = x^2 + 3y^2 - x \cdot y + 7y$ в точці $M(1, -3, 10)$. Побудувати поверхню, дотичну площину і нормаль.

7. Задана функція $z = x^3 + 3x \cdot y^2 - 51x - 24y$.

1) знайти стаціонарні точки;

2) скласти матрицю Гессе і визначити характер кожної стаціонарної точки;

3) підтвердити результат графічно (3-D графік з відміченими точками екстремуму (якщо вони існують)).

8. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = 5x \cdot y$, при заданому рівнянні зв'язку $x^2 + y^2 = 16$.

Варіант 10

1. Задана функція $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - x + 2y - 3$.

1) побудувати 3-D графік функції в області $R \{ x \in [-8, 6], y \in [-6, 4] \}$;

2) побудувати три лінії рівня $f(x, y) = c$ області R . Значення c вибрати так, щоб лінії рівня відображали форму поверхні.

2. Задана функція $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x \cdot y - 3x + 5y$.

1) знайти частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$;

2) знайти $f'_y(M_0)$, якщо $M_0(-4, 3)$.

3. Задана функція $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x \cdot y - 3x + 5y$.

1) знайти похідну за напрямом вектора $\vec{s}\{1; -2\}$ в точці $M_0(-4, 3)$;

2) знайти градієнт функції;

3) знайти градієнт функції в точці $M_0(-4, 3)$.

4. Задана функція $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x \cdot y - 3x + 5y$.

1) побудувати векторне поле градієнта в області $x \in [-10, 10]$, $y \in [-5, 5]$;

2) знайти напрям найшвидшого зростання функції в точці $M_0(-4, 3)$.

5. Функція $z = f(x, y)$ задана в неявному виді $F(x, y, z) = 0$:

$(18 - z^2) \cdot x^2 - 9y^2 = 0$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в точці $M(3, 3, 3)$.

6. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^2 - y^2 - z^2 + x \cdot z + 4x + 5 = 0$ в точці $M(-2, 1, 0)$. Побудувати поверхню, дотичну площину і нормаль.

7. Задана функція $z = 3x^2 + y^2 - 4x \cdot y + 10x - 8y + 5$.

1) знайти стаціонарні точки;

2) скласти матрицю Гессе і визначити характер кожної стаціонарної точки;

3) підтвердити результат графічно (3-D графік з відміченими точками екстремуму (якщо вони існують)).

8. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = 2 - 3x + 7y$, при заданому рівнянні зв'язку $x^2 - y + 2 = 0$.

Варіант 11

1. Задана функція $f(x, y) = x^2 - y^2 + 3x - 2y + 5$.

- 1) побудувати 3-D графік функції в області $R \{ x \in [-8, 8], y \in [-5, 10] \}$;
- 2) побудувати три лінії рівня $f(x, y) = c$ області R . Значення c вибрати так, щоб лінії рівня відображали форму поверхні.

2. Задана функція $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3x \cdot y^2 + 5y$.

- 1) знайти частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$;
 - 2) знайти $f'_x(M_0)$, якщо $M_0(3, -3)$.
3. Задана функція $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3x \cdot y^2 + 5y$.
- 1) знайти похідну за напрямом вектора $\vec{s} \{-2; 5\}$ в точці $M_0(3, -3)$;
 - 2) знайти градієнт функції;
 - 3) знайти градієнт функції в точці $M_0(3, -3)$.
4. Задана функція $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3x \cdot y^2 + 5y$.
- 1) побудувати векторне поле градієнта в області $x \in [-10, 10]$, $y \in [-15, 5]$;
 - 2) знайти напрям найшвидшого зростання функції в точці $M_0(3, -3)$.

5. Функція $z = f(x, y)$ задана в неявному виді $F(x, y, z) = 0$:

$y \cdot z^4 + x^3 \cdot z = y^3$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в точці $M(0, 1, 1)$.

6. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = 3x^2 - y^2 + 2x \cdot y - 5x - 5$, в точці $M(2, 1, 0)$. Побудувати поверхню, дотичну площину і нормаль.

7. Задана функція $z = x^2 + 10y^2 - 6x \cdot y - 2x + 6y + 7$.

- 1) знайти стаціонарні точки;
- 2) скласти матрицю Гессе і визначити характер кожної стаціонарної точки;
- 3) підтвердити результат графічно (3-D графік з відміченими точками екстремуму (якщо вони існують)).

8. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = 8x \cdot y$, при заданому рівнянні зв'язку $2x + 5y = 3$.

Варіант 12

1. Задана функція $f(x, y) = x^2 + y^2 - x \cdot y + 3y - 5$.

- 1) побудувати 3-D графік функції в області $R \{ x \in [-6, 10], y \in [-10, 4] \}$;
- 2) побудувати три лінії рівня $f(x, y) = c$ області R . Значення c вибрати так, щоб лінії рівня відображали форму поверхні.

2. Задана функція $f(x, y) = \arctg \frac{y^2}{x}$.

1) знайти частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$;

2) знайти $f'_y(M_0)$, якщо $M_0(4, -2)$.

3. Задана функція $f(x, y) = \arctg \frac{y^2}{x}$.

1) знайти похідну за напрямом вектора $\vec{s} = \{-1; 3\}$ в точці $M_0(4, -2)$;

2) знайти градієнт функції;

3) знайти градієнт функції в точці $M_0(4, -2)$.

4. Задана функція $f(x, y) = \arctg \frac{y^2}{x}$.

1) побудувати векторне поле градієнта в області $x \in [-5, 15]$, $y \in [-10, 10]$;

2) знайти напрям найшвидшого зростання функції в точці $M_0(4, -2)$.

5. Функція $z = f(x, y)$ задана в неявному виді $F(x, y, z) = 0$:

$(8 - z^2)x^2 - 4y^2 = 0$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точці $M(2, 2, 2)$.

6. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $4y^2 - z^2 + 4x \cdot y - x \cdot z + 3z - 9 = 0$ в точці $M(1, -2, 1)$. Побудувати поверхню, дотичну площину і нормаль.

7. Задана функція $z = (x - 1)^2 + 4y^3 - 2x + 6y$.

1) знайти стаціонарні точки;

2) скласти матрицю Гессе і визначити характер кожної стаціонарної точки;

3) підтвердити результат графічно (3-D графік з відміченими точками екстремуму (якщо вони існують)).

8. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = 1 + x - 8y$, при заданому рівнянні зв'язку $x^2 + y - 3 = 0$.

Варіант 13

1. Задана функція $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 5x - 2y + 4$.

1) побудувати 3-D графік функції в області $R \{ x \in [-10, 8], y \in [-5, 5] \}$;

2) побудувати три лінії рівня $f(x, y) = c$ області R . Значення c вибрати так, щоб лінії рівня відображали форму поверхні.

2. Задана функція $f(x, y) = x^3 - 2y^2 - 3x^2 \cdot y^2 + y$.

1) знайти частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$;

2) знайти $f'_x(M_0)$, якщо $M_0(2, -2)$.

3. Задана функція $f(x, y) = x^3 - 2y^2 - 3x^2 \cdot y^2 + y$.

- 1) знайти похідну за напрямом вектора $\vec{s} \{-3; 5\}$ в точці $M_0(2, -2)$;
 - 2) знайти градієнт функції;
 - 3) знайти градієнт функції в точці $M_0(2, -2)$.
4. Задана функція $f(x, y) = x^3 - 2y^2 - 3x^2 \cdot y^2 + y$.
- 1) побудувати векторне поле градієнта в області $x \in [-5, 10]$, $y \in [-15, 10]$;
 - 2) знайти напрям найшвидшого зростання функції в точці $M_0(2, -2)$.
5. Функція $z = f(x, y)$ задана в неявному виді $F(x, y, z) = 0$:
- $$x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 + 4z = -9.$$
- Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в точці $M(3, 0, -4)$.
6. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = x^2 - 3y^2 + 2x \cdot y - 5x + 3y$ в точці $M(0, 2, -6)$. Побудувати поверхню, дотичну площину і нормаль.
7. Задана функція $z = x^2 + 5y^2 + 4x \cdot y + 2x - 6y - 80$.
- 1) знайти стаціонарні точки;
 - 2) скласти матрицю Гессе і визначити характер кожної стаціонарної точки;
 - 3) підтвердити результат графічно (3-D графік з відміченими точками екстремуму (якщо вони існують)).
8. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = x^2 + 2y^2$, при заданому рівнянні зв'язку $3x - 5y = 4$.

Варіант 14

1. Задана функція $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - x + 2y + 3$.
 - 1) побудувати 3-D графік функції в області $R \{ x \in [-10, 8], y \in [-8, 5] \}$;
 - 2) побудувати три лінії рівня $f(x, y) = c$ області R . Значення c вибрати так, щоб лінії рівня відображали форму поверхні.
2. Задана функція $f(x, y) = x^2 - 2y^2 - 3x \cdot y^2 - 3y$.
 - 1) знайти частинні похідні $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$;
 - 2) знайти $f'_x(M_0)$, якщо $M_0(4, -2)$.
3. Задана функція $f(x, y) = x^2 - 2y^2 - 3x \cdot y^2 - 3y$.
 - 1) знайти похідну за напрямом вектора $\vec{s} \{2; -5\}$ в точці $M_0(4, -2)$;
 - 2) знайти градієнт функції;
 - 3) знайти градієнт функції в точці $M_0(4, -2)$.
4. Задана функція $f(x, y) = x^2 - 2y^2 - 3x \cdot y^2 - 3y$.
 - 1) побудувати векторне поле градієнта в області $x \in [-10, 10]$, $y \in [-10, 10]$;
 - 2) знайти напрям найшвидшого зростання функції в точці $M_0(4, -2)$.

5. Функція $z = f(x, y)$ задана в неявному виді $F(x, y, z) = 0$:

$$z - \arctg \frac{y+z}{x} = 0. \text{ Знайти } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \text{ в точці } M\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

6. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $y^2 + 2z^2 - 3x \cdot y + 2y \cdot z - 4z - 7 = 0$, в точці $M(2, 1, -2)$. Побудувати поверхню, дотичну площину і нормаль.

7. Задана функція $z = 2x^2 + 6y^2 - 4x \cdot y - 8x + 16y + 19$.

1) знайти стаціонарні точки;

2) скласти матрицю Гессе і визначити характер кожної стаціонарної точки;

3) підтвердити результат графічно (3-D графік з відміченими точками екстремуму (якщо вони існують)).

8. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = \frac{1}{2}x \cdot y$, при заданому рівнянні зв'язку $x^2 + y^2 = 8$.

Варіант 15

1. Задана функція $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x \cdot y + 3y - 5$.

1) побудувати 3-D графік функції в області $R \{ x \in [-5, 5], y \in [-8, 6] \}$;

2) побудувати три лінії рівня $f(x, y) = c$ області R . Значення c вибрати так, щоб лінії рівня відображали форму поверхні.

2. Задана функція $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 3x \cdot y + 10x - 3y$.

1) знайти частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$;

2) знайти $f'_y(M_0)$, якщо $M_0(-3, -2)$.

3. Задана функція $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 3x \cdot y + 10x - 3y$.

1) знайти похідну за напрямом вектора $\vec{s}\{1; -2\}$ в точці $M_0(-3, -2)$;

2) знайти градієнт функції;

3) знайти градієнт функції в точці $M_0(-3, -2)$.

4. Задана функція $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 3x \cdot y + 10x - 3y$.

1) побудувати векторне поле градієнта в області $x \in [-15, 10]$, $y \in [-5, 10]$;

2) знайти напрям найшвидшого зростання функції в точці $M_0(-3, -2)$.

5. Функція $z = f(x, y)$ задана в неявному виді $F(x, y, z) = 0$:

$$\ln \frac{x}{y} - 3 \ln(y - z) + x \cdot y \cdot z - 4 = 0. \text{ Знайти } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \text{ в точці } M(2, 2, 1).$$

6. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = y^2 - x^2 + 2x \cdot y - 3y$ в точці $M(1, -1, 1)$. Побудувати поверхню, дотичну площину і нормаль.

7. Задана функція $z = (x + 3)^2 + (y - 2)^2 + 5x \cdot y - x$.

1) знайти стаціонарні точки;

2) скласти матрицю Гессе і визначити характер кожної стаціонарної точки;

3) підтвердити результат графічно (3-D графік з відміченими точками екстремуму (якщо вони існують)).

8. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = 5 - 4x + 8y$, при заданому рівнянні зв'язку $x + y^2 - 2 = 0$.

Варіант 16

1. Задана функція $f(x, y) = x^2 - 5y^2 - 3x + 4y - 1$.

1) побудувати 3-D графік функції в області $R \{ x \in [-5, 10], y \in [-10, 5] \}$;

2) побудувати три лінії рівня $f(x, y) = c$ області R . Значення c вибрати так, щоб лінії рівня відображали форму поверхні.

2. Задана функція $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 4x \cdot y^2 + 10x - 3y$.

1) знайти частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$;

2) знайти $f'_x(M_0)$, якщо $M_0(2, -1)$.

3. Задана функція $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 4x \cdot y^2 + 10x - 3y$.

1) знайти похідну за напрямом вектора $\vec{s} \{-3; 2\}$ в точці $M_0(2, -1)$;

2) знайти градієнт функції;

3) знайти градієнт функції в точці $M_0(2, -1)$.

4. Задана функція $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 4x \cdot y^2 + 10x - 3y$.

1) побудувати векторне поле градієнта в області $x \in [-10, 10]$, $y \in [-5, 15]$;

2) знайти напрям найшвидшого зростання функції в точці $M_0(2, -1)$.

5. Функція $z = f(x, y)$ задана в неявному виді $F(x, y, z) = 0$:

$x \cdot e^{3y} + y \cdot \ln x - x^2 \cdot y \cdot z - e + 2 = 0$ Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в точці $M(1, \frac{1}{3}, 6)$.

6. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2x \cdot z - z - 5 = 0$ в точці $M(1, 1, -1)$. Побудувати поверхню, дотичну площину і нормаль.

7. Задана функція $z = x^2 + 2y^2 - 4x \cdot y + 12y$.

1) знайти стаціонарні точки;

2) скласти матрицю Гессе і визначити характер кожної стаціонарної точки;

3) підтвердити результат графічно (3-D графік з відміченими точками екстремуму (якщо вони існують)).

8. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = x^2 + 2x + 3y$, при заданому рівнянні зв'язку $2x + y - 4 = 0$.

Варіант 17

1. Задана функція $f(x, y) = x^2 + 5y^2 - 8x + 2y + 3$.

- 1) побудувати 3-D графік функції в області $R \{ x \in [-5, 8], y \in [-9, 5] \}$;
- 2) побудувати три лінії рівня $f(x, y) = c$ області R . Значення c вибрати так, щоб лінії рівня відображали форму поверхні.
2. Задана функція $f(x, y) = x^3 \cdot y^2 + x^2 - 2x + 4y$.
 - 1) знайти частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$;
 - 2) знайти $f'_y(M_0)$, якщо $M_0(1, -3)$.
3. Задана функція $f(x, y) = x^3 \cdot y^2 + x^2 - 2x + 4y$.
 - 1) знайти похідну за напрямом вектора $\vec{s}\{2; 5\}$ в точці $M_0(1, -3)$;
 - 2) знайти градієнт функції;
 - 3) знайти градієнт функції в точці $M_0(1, -3)$.
4. Задана функція $f(x, y) = x^3 \cdot y^2 + x^2 - 2x + 4y$.
 - 1) побудувати векторне поле градієнта в області $x \in [-10, 10]$, $y \in [-5, 10]$;
 - 2) знайти напрям найшвидшого зростання функції в точці $M_0(1, -3)$.
5. Функція $z = f(x, y)$ задана в неявному виді $F(x, y, z) = 0$:
 $(x-4)\ln(z-y) - \frac{\ln 6}{x+2y} = 0$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точці $M(5, -2, 4)$.
6. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^2 + 2y^2 + 2z - 3y \cdot z + 3 = 0$ в точці $M(-1, 2, 3)$. Побудувати поверхню, дотичну площину і нормаль.
7. Задана функція $z = 3x^2 + 4y^2 + 6x - 8y + 15$.
 - 1) знайти стаціонарні точки;
 - 2) скласти матрицю Гессе і визначити характер кожної стаціонарної точки;
 - 3) підтвердити результат графічно (3-D графік з відміченими точками екстремуму (якщо вони існують)).
8. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = 9x \cdot y$, при заданому рівнянні зв'язку $x - 3y - 4 = 0$.

Варіант 18

1. Задана функція $f(x, y) = x^2 + y^2 + x \cdot y - 2x + 5$.
 - 1) побудувати 3-D графік функції в області $R \{ x \in [-5, 10], y \in [-7, 10] \}$;
 - 2) побудувати три лінії рівня $f(x, y) = c$ області R . Значення c вибрати так, щоб лінії рівня відображали форму поверхні.
2. Задана функція $f(x, y) = \sin x + 3\cos y - \cos(x - y)$.
 - 1) знайти частинні похідні $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$;
 - 2) знайти $f'_x(M_0)$, якщо $M_0(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$.

3. Задана функція $f(x, y) = \sin x + 3\cos y - \cos(x - y)$.
- 1) знайти похідну за напрямом вектора $\vec{s} \{-1; 4\}$ в точці $M_0(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$;
 - 2) знайти градієнт функції;
 - 3) знайти градієнт функції в точці $M_0(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$.
4. Задана функція $f(x, y) = \sin x + 3\cos y - \cos(x - y)$.
- 1) Побудувати векторне поле градієнта в області $x \in [-2\pi, 2\pi]$, $y \in [-2\pi, 2\pi]$;
 - 2) Знайти напрям найшвидшого зростання функції в точці $M_0(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$.
5. Функція $z = f(x, y)$ задана в неявному виді $F(x, y, z) = 0$:
- $$x^4 \cdot y^2 + 2x \cdot y + y^5 \cdot z - 9 = 0.$$
- Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в точці $M(2, -1, 3)$.
6. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^2 + y^2 + 2x \cdot y - 3y \cdot z - 1 = 0$ в точці $M(2, -3, 0)$. Побудувати поверхню, дотичну площину і нормаль.
7. Задана функція $z = 3x^3 + 3y^3 - 9x \cdot y + 10$.
- 1) знайти стаціонарні точки;
 - 2) скласти матрицю Гессе і визначити характер кожної стаціонарної точки;
 - 3) підтвердити результат графічно (3-D графік з відміченими точками екстремуму (якщо вони існують)).
8. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = 4x + 3y - 1$, при заданому рівнянні зв'язку $y^2 = x + 4$.

Варіант 19

1. Задана функція $f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 + 3x + y - 7$.
- 1) побудувати 3-D графік функції в області $R \{ x \in [-5, 5], y \in [-10, 5] \}$;
 - 2) побудувати три лінії рівня $f(x, y) = c$ області R . Значення c вибрати так, щоб лінії рівня відображали форму поверхні.
2. Задана функція $f(x, y) = x^4 \cdot y + x^2 - 2x \cdot y + 2y$.
- 1) знайти частинні похідні $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$;
 - 2) знайти $f'_x(M_0)$, якщо $M_0(-1, 2)$.
3. Задана функція $f(x, y) = x^4 \cdot y + x^2 - 2x \cdot y + 2y$.
- 1) знайти похідну за напрямом вектора $\vec{s} \{2; -5\}$ в точці $M_0(-1, 2)$;
 - 2) знайти градієнт функції;
 - 3) знайти градієнт функції в точці $M_0(-1, 2)$.
4. Задана функція $f(x, y) = x^4 \cdot y + x^2 - 2x \cdot y + 2y$.

- 1) побудувати векторне поле градієнта в області $x \in [-5, 10]$, $y \in [-10, 5]$;
- 2) знайти напрям найшвидшого зростання функції в точці $M_0(-1, 2)$.
5. Функція $z = f(x, y)$ задана в неявному виді $F(x, y, z) = 0$:
 $\ln(e^{x \cdot z} + e^{x \cdot y}) - z^3 + \sqrt{x \cdot z} - \ln 2 + 27 = 0$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в точці $M(0, -2, 3)$.
6. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $x^2 + z^2 + 4x \cdot y + 3y \cdot z - 12 = 0$ в точці $M(2, 1, -3)$. Побудувати поверхню, дотичну площину і нормаль.
7. Задана функція $z = x^2 + y^2 - x \cdot y + 9x - 6y + 20$.
 - 1) знайти стаціонарні точки;
 - 2) скласти матрицю Гессе і визначити характер кожної стаціонарної точки;
 - 3) підтвердити результат графічно (3-D графік з відміченими точками екстремуму (якщо вони існують)).
8. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = 3 - x + 5y$, при заданому рівнянні зв'язку $x^2 + y^2 = 6$.

Варіант 20

1. Задана функція $f(x, y) = x^2 + 5y^2 + 3x - 6y + 4$.
 - 1) побудувати 3-D графік функції в області $R \{ x \in [-10, 5], y \in [-5, 10] \}$;
 - 2) побудувати три лінії рівня $f(x, y) = c$ області R . Значення c вибрати так, щоб лінії рівня відображали форму поверхні.
2. Задана функція $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x \cdot y - 5x + 2y$.
 - 1) знайти частинні похідні $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$;
 - 2) знайти $f'_y(M_0)$, якщо $M_0(1, 6)$.
3. Задана функція $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x \cdot y - 5x + 2y$.
 - 1) знайти похідну за напрямом вектора $\vec{s} = \{-2; 3\}$ в точці $M_0(1, 6)$;
 - 2) знайти градієнт функції;
 - 3) знайти градієнт функції в точці $M_0(1, 6)$.
4. Задана функція $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x \cdot y - 5x + 2y$.
 - 1) побудувати векторне поле градієнта в області $x \in [-5, 10]$, $y \in [-10, 10]$;
 - 2) знайти напрям найшвидшого зростання функції в точці $M_0(1, 6)$.
5. Функція $z = f(x, y)$ задана в неявному виді $F(x, y, z) = 0$:
 $3x^2 - y^3 \cdot \operatorname{tg} \frac{z}{3} = 0$. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в точці $M(3, 3, \frac{3\pi}{4})$.

6. Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $2x^2 - y^2 + z^2 + 10y - 2z = 0$ в точці $M(2, -1, 3)$. Побудувати поверхню, дотичну площину і нормаль.

7. Задана функція $z = x^3 + 8y^3 - 6x \cdot y + 1$.

1) знайти стаціонарні точки;

2) скласти матрицю Гессе і визначити характер кожної стаціонарної точки;

3) підтвердити результат графічно (3-D графік з відміченими точками екстремуму (якщо вони існують)).

8. Дослідити на умовний екстремум функцію $z = \frac{1}{4}x \cdot y$, при заданому рівнянні зв'язку $6x + 3y - 7 = 0$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика : підручник / за заг. ред. П. П. Овчинников. 3-тє вид. Київ : Техніка, 2003. Т. 1 : Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення. 600 с.
2. Пак В. В., Носенко Ю. Л. Вища математика : підручник. Донецьк : Сталкер, 2003. 496 с.
3. Аналітична геометрія : навч. посіб. / Т. М. Бусарова, Т. С. Гришечкіна, О. В. Звонарьова, Г. І. Семенець ; Укр. держ. ун-т науки і технологій. Дніпро : УДУНТ, 2022. 118 с.
4. Software for Mathematics, Online Learning, Engineering. *Maplesoft*. URL: <https://www.maplesoft.com/> (дата звернення: 25.11.2025).
5. Нікітенко О. М. Maple: Розв'язання інженерних та наукових задач : навч. посіб. Харків : ХНУРЕ, 2014. 289 с.
6. Maplesoft Documentation Center – Product Manuals and Support Material. *Maplesoft*. URL: https://www.maplesoft.com/documentation_center/ (дата звернення: 25.11.2025).

Навчальне видання

*Бусарова Тетяна Миколаївна., Гришечкіна Тетяна Сергіївна,
Звонарьова Ольга Віталіївна, Семенець Галина Іванівна*

**Вища математика. Функції багатьох змінних:
Вивчення та візуалізація в Maple**

Навчальний посібник

Електронне видання

Комп'ютерна верстка Т. С. Гришечкіна
Дизайн обкладинки Т. С. Гришечкіна

Експертний висновок склав д-р фіз.-мат. наук, проф. Віталій Кузнецов

Зареєстровано НМВ УДУНТ (№ 1.837 від 29.09.2025)

Формат 60х84 ^{1/16}. Ум. друк. арк. 7,73. Обл.-вид. арк. 7,82.
Зам. № 133

Видавець: Український державний університет науки і технологій.
вул.Лазаряна, 2, ауд. 2216, ауд. 263 (наукова бібліотека)
м. Дніпро, 49010.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 7709 від 14.12.2022

