УДУНТ

ДНІПРО

Т. М. Бусарова, Т. С. Гришечкіна,
О. В. Звонарьова, Г. І. Семенець

ВИЩА МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ. Частина 1

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ НАУКИ І ТЕХНОЛОГІЙ

Т. М. Бусарова, Т. С. Гришечкіна,
О. В. Звонарьова, Г. І. Семенець

Вища математика. Математичний аналіз.
Частина 1

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ДНІПРО
2023

УДК 517
В 55

Авторський колектив:
Бусарова Т. М., Гришечкіна Т. С., Звонарьова О. В., Семенець Г. І.

Рекомендовано
вченою радою УДУНТ як навчальний посібник
Протокол №10 від «03» липня 2023 р.

В 55 Вища математика. Математичний аналіз : навч. посіб. / Т. М. Бусарова, Т. С. Гришечкіна, О. В. Звонарьова, Г. І. Семенець ; Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Електрон. вид. – Дніпро : УДУНТ, 2023. – Ч. 1. – 120 с.

ISBN 978-617-8314-46-0 (PDF)

Посібник містить основний теоретичний матеріал розділу, велику кількість розв'язаних прикладів, приклади для самостійного розв'язання, варіанти індивідуальних завдань, а також приклади тестових завдань з наведеними відповідями.

Для студентів першого курсу інженерно-технічних спеціальностей.

Іл. 67. Бібліогр.: 3 назв.

УДК 517

ISBN 978-617-8314-46-0 (PDF)
DOI 10.15802/978-617-8314-46-0

ЗМІСТ

ВСТУП

Мета викладання дисципліни «Вища математика» – допомогти студентам оволодіти знаннями, необхідними для опрацювання математичних моделей, пов'язаних з їхньою подальшою практичною діяльністю. Цей розділ є необхідною і важливою частиною курсу лекцій з вищої математики. Навчальний посібник «Математичний аналіз. Частина 1» допоможе студентам засвоїти теоретичну частину відповідного розділу математики та методи розв'язання задач.

Відмітимо переваги посібника: з одного боку – невеликий формат, з іншого – містить усе, що потрібно студенту для підготовки до відповідного модуля.

Кожен розділ посібника починається з теоретичного матеріалу, який містить означення, теореми та формули. Потім розглядається достатня кількість розв'язаних прикладів, які розділені на дві групи: найпростіші та приклади середньої важкості.

Навчальний посібник «Математичний аналіз. Частина 1» може бути застосований і як доповнення до лекційного матеріалу, і для самостійної роботи студентів.

У результаті вивчення матеріалу посібника студенти повинні знати основні поняття та формули, а також вміти застосовувати їх під час розв'язання прикладних задач.

.

1. ЗМІННІ ТА СТАЛІ ВЕЛИЧИНИ

Означення. **Змінною величиною** називається величина, яка набуває різних числових значень.

Величина, числові значення якої не змінюються, називається **сталою величиною**. Цю величину можна розглядати як окремий випадок змінної величини.

Значення змінної величини геометрично можна зобразити точками числової осі.

Означення. Сукупність усіх числових значень змінної величини називається **областю змінювання** цієї величини (цю сукупність будемо називати множиною X).

Перелічимо області змінювання величин, які будуть траплятися надалі.

Означення. **Проміжком**, або **інтервалом,** називається сукупність усіх чисел x, які містяться між числами a і b ($a < b$), причому самі ці числа не належать до сукупності. Позначається це так: (a,b) або за допомогою нерівностей: $a<x<b$.

Означення. **Сегментом**, або **відрізком,** називається сукупність усіх чисел x, які містяться між числами a і b ($a<b$), причому ці числа належать розглянутій сукупності. Позначається це так: $[a,b]$ або $a \le x \le b$.

Іноді відрізок називають замкненим проміжком або **замкненим інтервалом**.

Якщо сукупність чисел x задовольняє нерівності $a \le x < b$, то маємо **напівінтервал**, який позначають так: $[a,b)$. І навпаки: $a < x \le b$, або $(a,b]$. Так само можна розглянути нескінченні або напівнескінченні інтервали, або напівінтервали:

$-\infty < x < \infty$	$(-\infty,+\infty)$
$-\infty < x < a$	$(-\infty,a)$
$a \le x < \infty$	$[a,+\infty)$
$a \le x < b$	$[a,b)$
$a < x \le b$	$(a,b]$
$a \le x \le b$	$[a,b]$

Означення. Змінна x називається **упорядкованою змінною величиною**, якщо відома область змінювання цієї величини й про кожне з двох будь-яких її значень можна сказати, яке з них попереднє, а яке наступне.

Важливим окремим випадком упорядкованої величини є так звані **числові послідовності**. Пізніше розглянемо їх докладніше.

2. ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ

Нехай X – це область змінювання змінної x, а Y – область змінювання змінної y.

Означення. Якщо кожному значенню змінної x з області X можна поставити у відповідність за деяким правилом (законом) одне визначене значення змінної y з області Y, то кажуть, що на множині X задана **функція,** і записують цю відповідність за допомогою формули $y = f(x)$.

Змінну x називають **незалежною** змінною, або **аргументом**, а змінну y – **залежною** змінною, або **функцією**. (Кажуть, що y є функцією x, або x і y зв’язані функціональною залежністю.)

Множину X називають **областю визначення** функції y і позначають через $D(f)$, а множину Y усіх чисел y, які відповідають різним числам $x \in X$, – **областю значень** функції y і позначають через $E(f)$. Зауважимо, що коли числу x_0 із $D(f)$ відповідає число y_0 із $E(f)$, то y_0 називають **значенням функції** в точці x_0.

Приклад. Знайти область визначення (тобто $D(f)$) функцій:

1) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-4}$; 2) $f(x) = \sqrt{7-5x}$; 3) $f(x) = \ln(x+3)$.

Розв’язання. 1. Функція $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-4}$ визначена, якщо її знаменник не дорівнює нулю. Тому область визначення цієї функції можна визначити з умови: $x^2 - 4 \neq 0$, тобто $x_{1,2} \neq \pm 2$. Таким чином, $D(f)$ (тобто область визначення) має вигляд $(-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$ або просто $x \neq \pm 2$.

2. Функція $f(x) = \sqrt{7-5x}$ визначена, якщо підкореневий вираз невід’ємний: $7 - 5x \geq 0$, або $x \leq \dfrac{7}{5}$. Тоді $D(f)$ має вигляд $\left(-\infty, \dfrac{7}{5}\right]$.

3. Аргумент логарифма з а в ж д и додатний, тому $x + 3 > 0$, або $x > -3$. Тоді $D(f)$ має вигляд: $(-3,+\infty)$. Докладніше про ln$x$ (натуральний логарифм) див. у додатку 2.

3. СПОСОБИ ЗАДАННЯ ФУНКЦІЇ

Табличний: за цього способу виписуються у визначеному порядку значення аргументу $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і відповідні значення функції $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Прикладом цього способу є таблиці тригонометричних функцій, таблиці логарифмів тощо.

Графічний: полягає в заданні графіка функції.

Означення. Сукупність точок площини XOY, абсциси яких є значеннями аргументу, а ординати – відповідними значеннями функції, називається графіком цієї функції.

Аналітичний: полягає в тому, що наводиться **формула**, за допомогою якої за заданими значеннями аргументу можна знайти відповідні значення функції. Слід наголосити, що цей спосіб задання функції є основним у математичному аналізі. Якщо функція задається аналітично, то (нагадуємо) під **областю**

визначення $D(f)$ **функції** $y = f(x)$ розуміють множину X значень x, за яких формула, що визначає функцію, має смисл (існує).

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Яка величина називається змінною, сталою?
2. Що таке область змінювання змінної?
3. Чим відрізняється відрізок від інтервалу?
5. Як інакше можна назвати незалежну змінну, залежну змінну?
6. Що таке область визначення функції? Як вона позначається?
7. Що таке табличний спосіб задання функції?
8. Що таке графік функції?

4. КЛАСИФІКАЦІЯ ФУНКЦІЙ

4.1. Парні та непарні функції

Означення. Функція $y = f(x)$, визначена на множині X, називається **парною**, якщо для будь-якого $x \in X$ виконується рівність $f(-x) = f(x)$. Графік парної функції симетричний відносно осі OY.

Аналогічно функція називається **непарною**, якщо $f(-x) = -f(x)$. Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Приклади парних функцій: $y = \cos x$, $y = x^2$, $y = |x|$.

Приклади непарних функцій: $y = \sin x$, $y = x^3$, $y = \operatorname{arctg} x$.

Слід наголосити, що існують функції, які не є парними або непарними. Наприклад, $y = x + 3$, $y = 5^x$.

4.2. Періодичні функції

Означення. Функція $y = f(x)$ називається **періодичною,** якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого x виконується рівність $f(x+T) = f(x)$.

Якщо функція періодична, то наявні й такі рівності:

$$f(x+T) = f(x+2T) = f(x+3T) = \ldots = f(x).$$

Найменше додатне число T, за якого умова $f(x+T) = f(x)$ виконується, називається **періодом** функції.

4.3. Монотонні функції

Означення. Функція $y = f(x)$ називається **зростаючою** на деякому інтервалі, якщо для будь-яких значень x_1 і x_2 з інтервалу, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ (рис. 1).

Якщо (при $x_1 < x_2$) виконується нерівність $f(x_1) \le f(x_2)$, то функція називається **неспадною** (рис. 2).

Означення. Функція $y = f(x)$ називається **спадною** на деякому інтервалі, якщо для будь-яких значень x_1 і x_2 з інтервалу, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$ (рис. 3).

Якщо (при $x_1 < x_2$) $f(x_1) \geq f(x_2)$, то функція називається **незростаючою** (рис. 4).

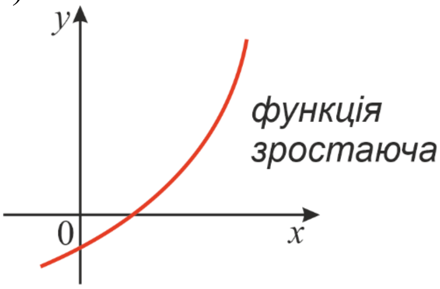


Рис. 1

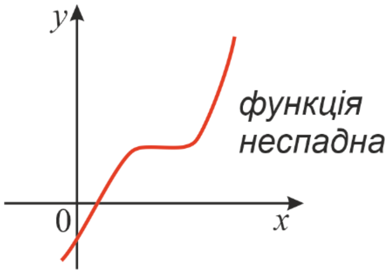


Рис. 2

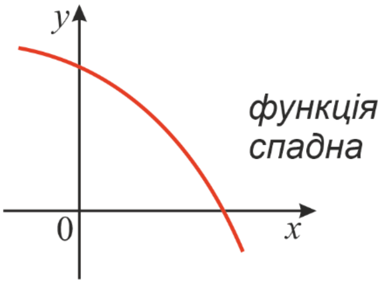


Рис. 3

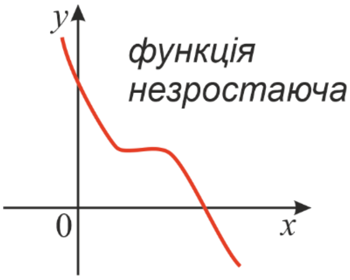


Рис. 4

Означення. Функція $y = f(x)$ називається **строго монотонною** на інтервалі, якщо вона зростаюча або спадна на цьому інтервалі.

Функція **монотонна** на інтервалі, якщо вона неспадна або незростаюча.

4.4. Обмежені функції

Означення. Функція $y = f(x)$ називається **обмеженою зверху** (**знизу**) на деякому інтервалі, якщо існує таке число M, що $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq M$) для усіх x із цього інтервалу (рис. 5а і 5б).

Означення. Функція $y = f(x)$ називається **обмеженою** на деякому інтервалі, якщо існує число $M > 0$, що для усіх x із інтервалу виконується нерівність $|f(x)| \leq M$ (рис. 6).

Рис. 5а

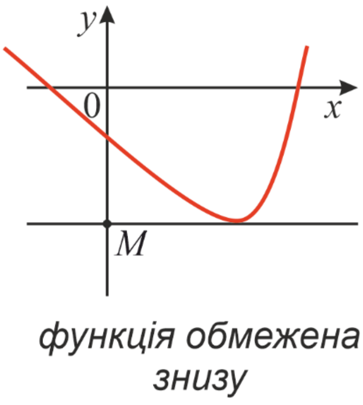


Рис. 5б

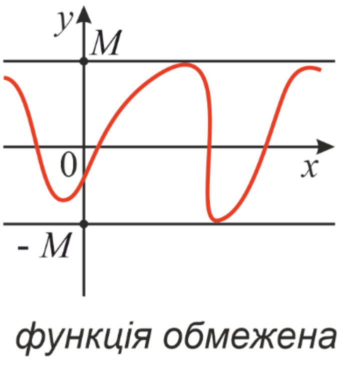


Рис. 6

4.5. Обернені фунуції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому інтервалі і, крім того, двом різним значенням x_1 і x_2 з інтервалу відповідають два **різних** значення функції y_1 і y_2 (тобто функція зростаюча або спадна). Тепер, якщо розглядати значення y як значення аргументу, а значення x – як значення функції, то одержимо x як функцію y: $x = \varphi(y)$. Така функція називається **оберненою** для функції $y = f(x)$. Взагалі, якщо областю визначення функції $y = f(x)$ є множина $D(f)$, а областю значень функції $y = f(x)$ є множина $E(f)$, то для оберненої функції $x = \varphi(y)$ буде навпаки: $E(f)$ – область визначення функції $x = \varphi(y)$, а $D(f)$ – область значень функції $x = \varphi(y)$. Функція $y = a^x$ має обернену функцію $x = \log_a y$, тому що при $a > 1$ функція $y = a^x$ зростаюча, а при $0 < a < 1$ – спадна. Зауважимо, що можна вважати і навпаки: функція $x = \log_a y$ має обернену функцію $y = a^x$.

Функція $y = x^2$ не має оберненої, оскільки кожному значенню y ($y > 0$) відповідають два значення $x = \pm\sqrt{y}$.

Пряма і обернена функції мають один і той самий графік. Але якщо в оберненій функції позначити аргумент через x, а функцію – через y, тобто записати обернену функцію у вигляді $y = \varphi(x)$, то графіки функцій $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$ будуть симетричні відносно бісектриси першого і третього координатних кутів, тобто прямої $y = x$.

Наприклад, в оберненій функції $x = \log_a y$ x і y поміняємо місцями: $y = \log_a x$. Одержимо дві функції: $y = a^x$ і $y = \log_a x$, графіки яких симетричні відносно прямої $y = x$ (рис. 7)

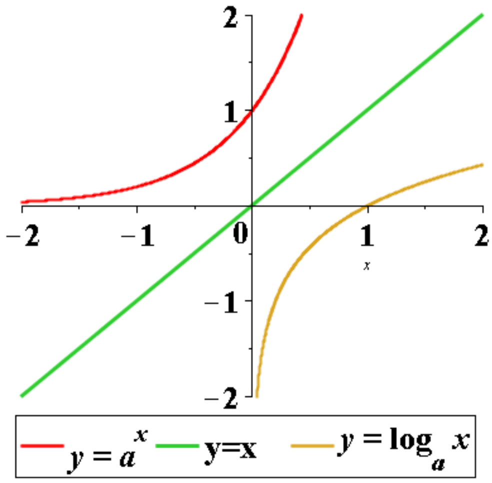


Рис. 7

4.6. Складні функції

Нехай $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$. Тоді, якщо область значень функції $u = \varphi(x)$ міститься в області визначення функції $y = f(u)$, то функція $y = f[\varphi(x)]$ називається **складною** функцією, або **композицією** функцій f і φ. Аргумент u називається **проміжним** аргументом, або внутрішньою функцією.

Приклад. Нехай $y = \cos u$, $u = x^4$. Тоді функція $y = \cos x^4$ – складна.

З а у в а ж е н н я. Складна функція може складатися і з більшої кількості функцій.

Наприклад, функція $y = \mathrm{ctg}[\ln(2x+1)]$ складена з трьох функцій: $y = \mathrm{ctg}\,t$, $t = \ln u$, $u = 2x+1$.

4.7. Неявні функції

Означення. Якщо кожне значення аргументу $x \in X$ і відповідне йому значення функції y задовольняють рівняння $F(x, y) = 0$, то кажуть, що функція задана **неявно**.

Будь-яку функцію $y = f(x)$ можна записати в неявному вигляді: $y - f(x) = 0$.

Наприклад, $y = x^2$ – явний вигляд; $y - x^2 = 0$ – неявний вигляд функції.

Неявна форма задання функції часто зумовлена неможливістю задання функції в явному вигляді. Наприклад, функцію, задану рівнянням $e^y + \sin(x + 2y) = 0$, записати в явному вигляді неможливо.

Приклади функцій, які задані неявно:

$x^2 + y^2 = R^2$ – рівняння кола,

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – рівняння еліпса,

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – рівняння гіперболи.

4.8. Функції, що задані в параметричному вигляді

Розглянемо два рівняння: $x = x(t)$ і $y = y(t)$, де t набуває значення з деякого інтервалу (t_1, t_2). Тобто кожному значенню $t \in (t_1, t_2)$ відповідають два значення x і y. Якщо розглядати значення x і y як координати точки на площині XOY, то кожному значенню t буде відповідати визначена точка площини. І коли t буде змінюватись від t_1 до t_2, ця точка, рухаючись на площині, буде описувати деяку криву.

Рівняння
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \tag{1}$$

називаються **параметричними** рівняннями цієї кривої, t – **параметром**, а спосіб задання кривої рівняннями (1) називається **параметричним** способом задання функції.

Параметричне задання кривих застосовують у механіці. Якщо в площині XOY рухається матеріальна точка і нам відомі закони руху проєкцій цієї точки на осі координат ($x = x(t)$, $y = y(t)$, де параметром t є час), то рівняння (1) є параметричними рівняннями траєкторії точки. Якщо виключити із цих рівнянь параметр t, одержимо рівняння траєкторії у вигляді $y = f(x)$ або $F(x, y) = 0$. Зауважимо, що параметр t не завжди має значення часу.

Наприклад, маємо таке рівняння кола в параметричному вигляді: $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$, де параметр t – це кут між віссю OX і радіусом, проведеним у певну точку $M(x, y)$ кола. Виключимо t із рівнянь. Для цього обидва рівняння піднесемо до квадрата, а потім додамо їх:

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= R^2\cos^2 t \\ y^2 &= R^2\sin^2 t \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2.$$

5. ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ

Спочатку розглянемо **основні** елементарні функції. До них відносять такі функції:

– степеневу функція: $y = x^n$, n – дійсне число;

– показникову функція: $y = a^x$, $a > 0, a \ne 1$;

– логарифмічну функція: $y = \log_a x$, $a > 0, a \ne 1$;

– тригонометричні функції: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

– обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Означення. Функції, які складені з основних елементарних функцій і сталих за допомогою скінченного числа арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення і ділення) та за допомогою операції композиції функцій, називаються **елементарними** функціями.

Приклади елементарних функцій: $y = 5\sin 4x - \sqrt{x}$. $y = \dfrac{1 - \operatorname{arctg}^2 2x}{3^x + x \cdot \ln x}$.

Зауважимо, що елементарну функцію можна задати за допомогою двох або більше формул:

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^3, & -\infty < x \le 1, \\ x - 1, & 1 < x < \infty. \end{cases}.$$

Елементарні функції можна розділити на дві групи: **алгебраїчні** і **трансцендентні.**

До алгебраїчних функцій належать:

1. Ціла раціональна функція, або многочлен (поліном):

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – числа, які називаються коефіцієнтами;

n – ціле додатне число – степінь многочлена.

2. Дробово-раціональна функція – відношення двох многочленів:

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

3. Ірраціональна функція – крім арифметичних дій, що виконуються над незалежною змінною, є дія добування кореня.

Наприклад: $y = \sqrt[3]{x}, \quad y = \dfrac{3x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{2 + 3x}}$.

Функції, які не є алгебраїчними, називаються **трансцендентними**. Приклади таких функцій: $y = \cos x, \quad y = \sqrt{10^x + 5}$ і т. д.

Графіки основних елементарних функцій

Наведені нижче графіки обов'язково потрібно запам'ятати

1. Лінійна функція
$y = kx + b$

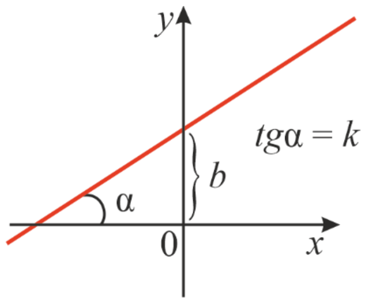


Рис. 8

2. Квадратична функція
$y = ax^2 + bx + c$

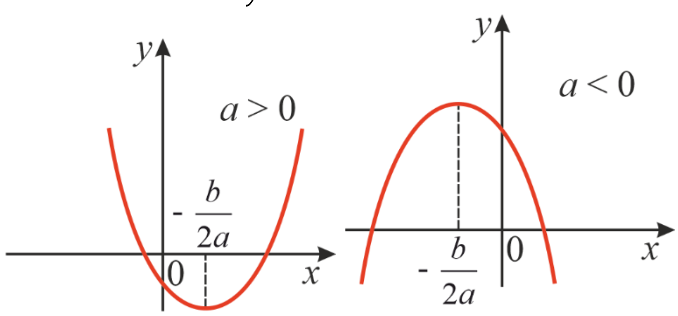


Рис. 9

3. Степенева функція $y = x^n$.

Розглянемо лише деякі випадки. Якщо n – парне число, то обидві функції парні (рис. 10).

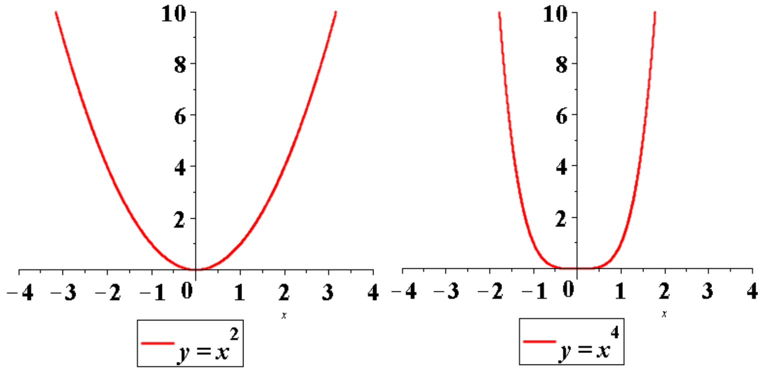


Рис. 10

Якщо n – непарне, то, наприклад: $y=x^3$ – функція непарна (рис. 11).

Якщо n – парне від’ємне число, то, наприклад, $y=\dfrac{1}{x^2}$ – функція парна (рис. 12).

Якщо n – непарне, від’ємне число, то, наприклад, $y=\dfrac{1}{x}$ – функція непарна (рис. 13).

3. Степенева функція $y=x^n$

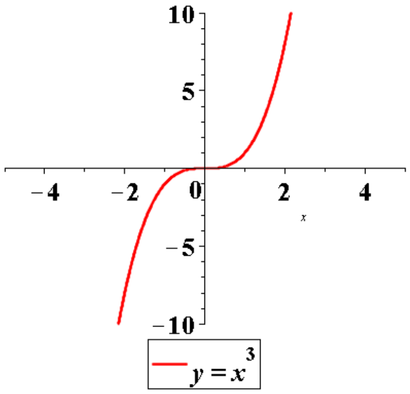


Рис. 11

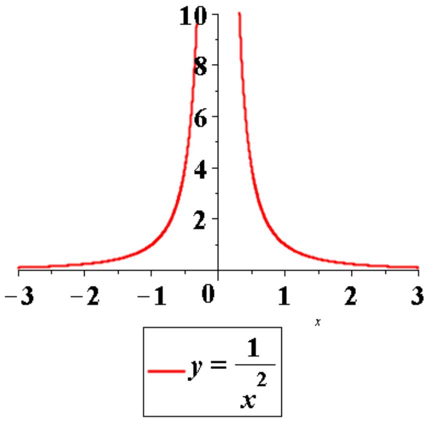


Рис. 12

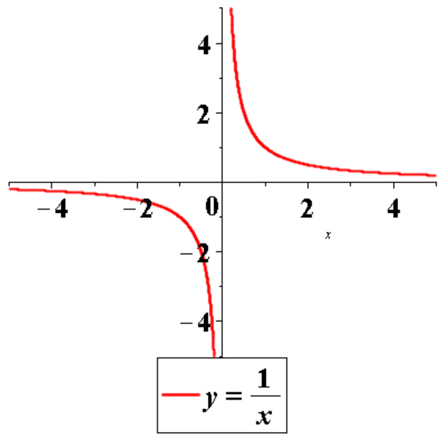


Рис. 13

4. Показникова функція $y=a^x$

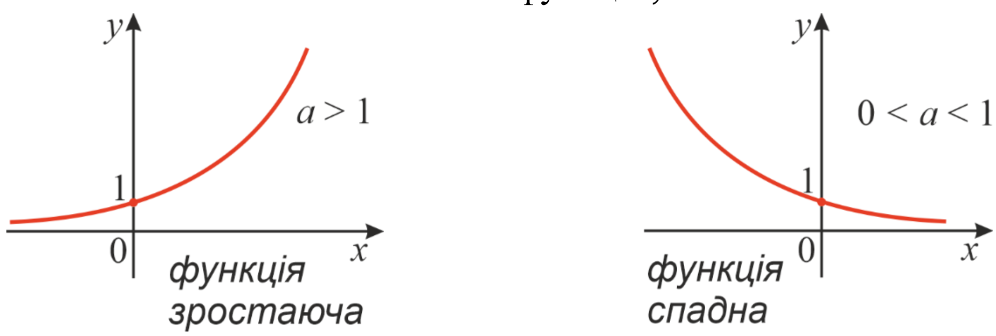


Рис. 14

5. Логарифмічна функція $y=\log_a x$

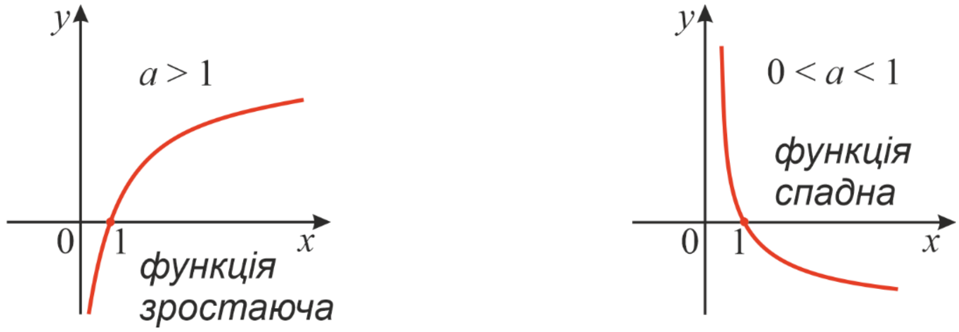
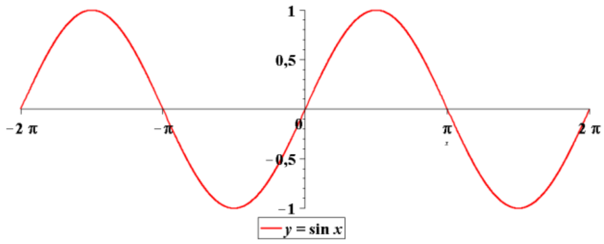


Рис. 15

Із графіків випливає, що наведені показникові (рис.14) та логарифмічні (рис. 15) функції **строго монотонні**.

6.Тригонометричні функції: $y = \sin x$ (рис. 16), $y = \cos x$ (рис. 17), $y = tgx$ (рис. 18), $y = ctgx$ (рис. 19).

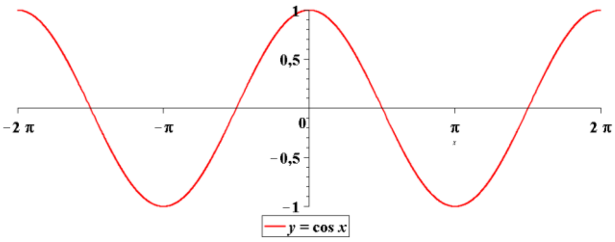
$y = \sin x$



Функція непарна періодична ($T = 2\pi$)

Рис. 16

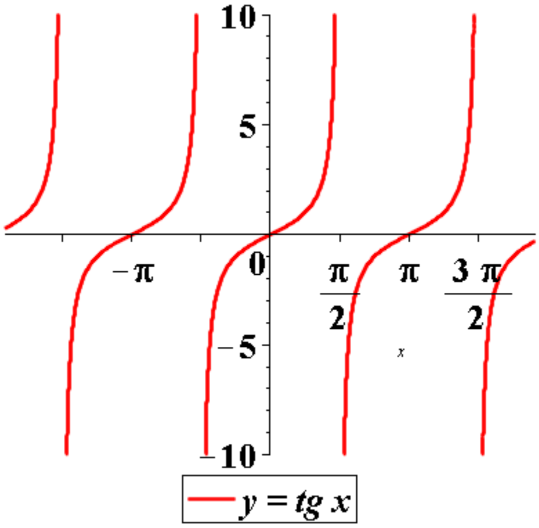
$y = \cos x$



Функція парна періодична ($T = 2\pi$)

Рис. 17

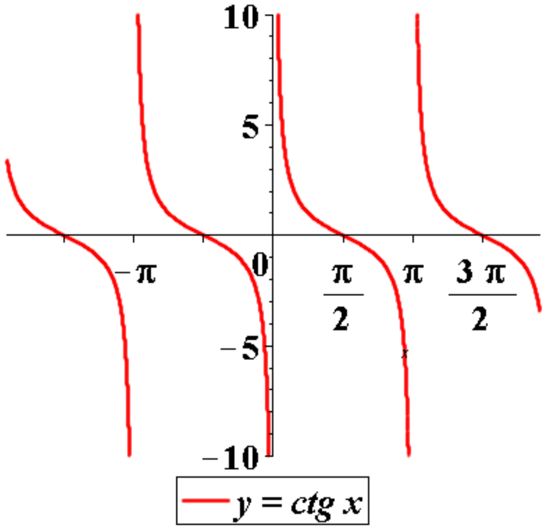
$y = tgx$



Функція непарна періодична ($T = \pi$)

Рис. 18

$y = ctgx$



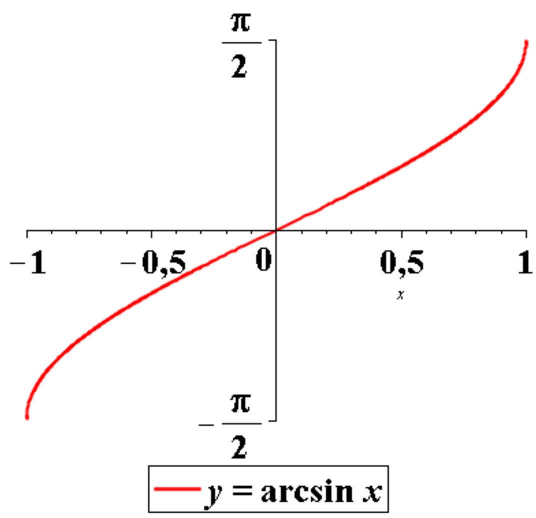
Функція непарна періодична ($T = \pi$)

Рис. 19

7. Обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$ (рис. 20), $y = \arccos x$ (рис. 21), $y = arctgx$ (рис. 22), $y = arcctgx$ (рис. 23).

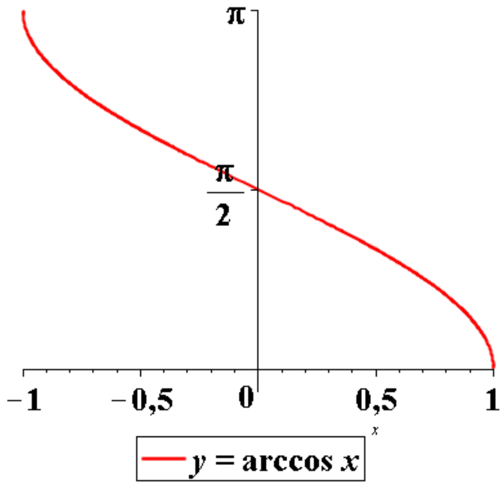
$y = \arcsin x$

$y = \arccos x$



Функція непарна зростаюча на [-1,1]

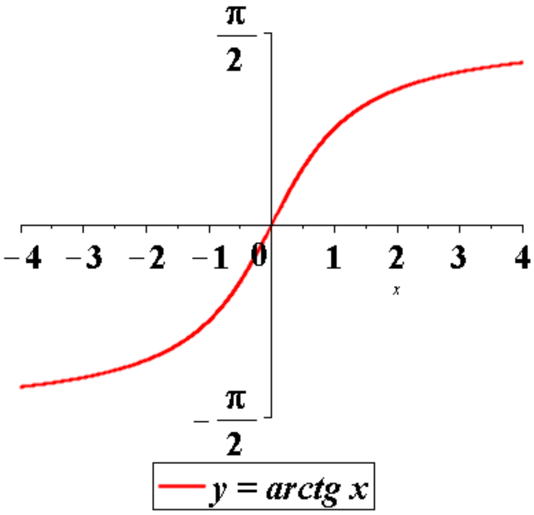
Рис. 20



Функція спадна на [-1,1]

Рис. 21

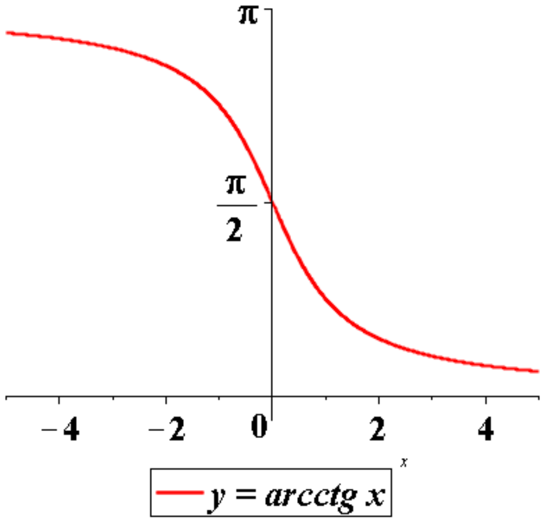
$y = arctgx$



Функція непарна зростаюча

Рис. 22

$y = arcctgx$



Функція спадна

Рис. 23

За допомогою розглянутих графіків можна будувати більш складні графіки. Нехай a – дійсне число ($a \neq 0$). Тоді графік функції $y = f(x) + a$ можна одержати, якщо графік $y = f(x)$ паралельно зсунути вздовж осі OY на величину $|a|$. Якщо $a > 0$, графік зсунеться **вгору**, якщо $a < 0$ – графік зсунеться **униз** (рис. 24).

Для того щоб побудувати графік $y = f(x + a)$, потрібно графік функції $y = f(x)$ зсунути паралельно вздовж осі OX на відстань $|a|$. Якщо $a > 0$, то графік зсуваємо **ліворуч**, якщо $a < 0$ – **праворуч** (рис. 25).

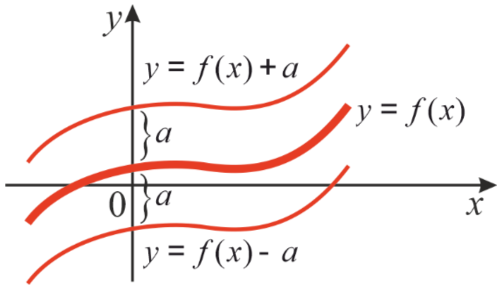


Рис. 24

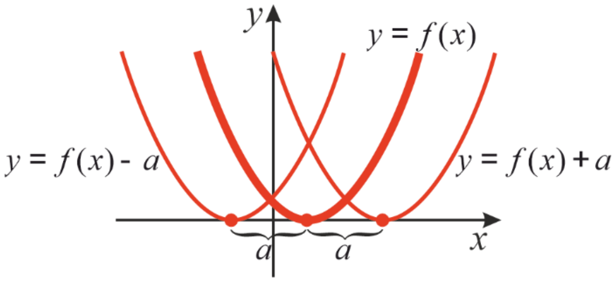


Рис. 25

Для того щоб побудувати графік функції $y = a \cdot f(x)$, потрібно точки $M(x, y)$ графіка $y = f(x)$ замінити точками $M(x, ay)$. Причому, якщо $a > 1$, ординати графіка збільшуються в a разів. Якщо $0 < a < 1$, ординати зменшуються в a^{-1} рази. Якщо $a < 0$, то графік функції $y = a \cdot f(x)$ буде симетричним графіку функції $y = |a| \cdot f(x)$ відносно осі OX (рис. 26).

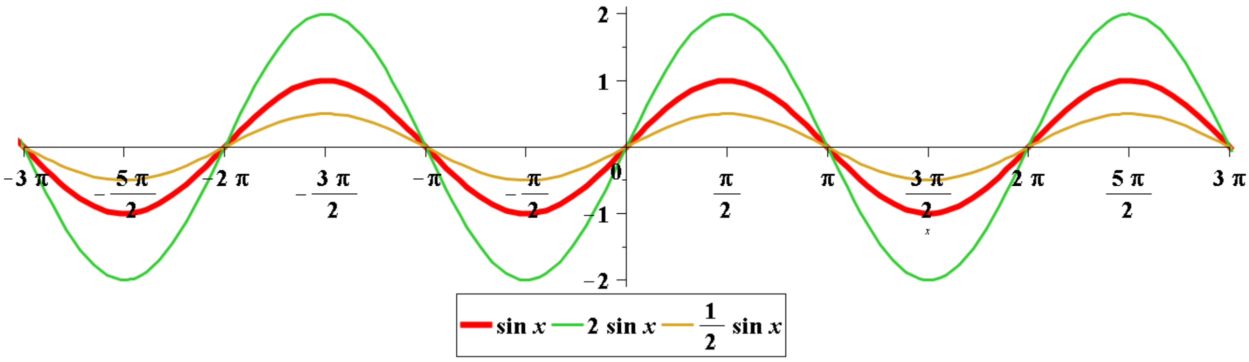
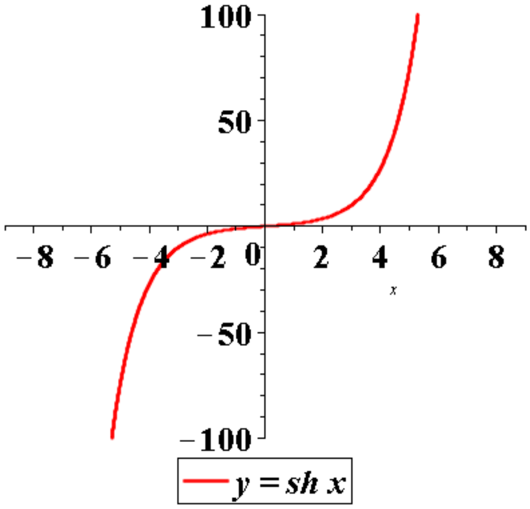


Рис. 26

8. Гіперболічні функції (наведемо ще декілька графіків менш відомих функцій).

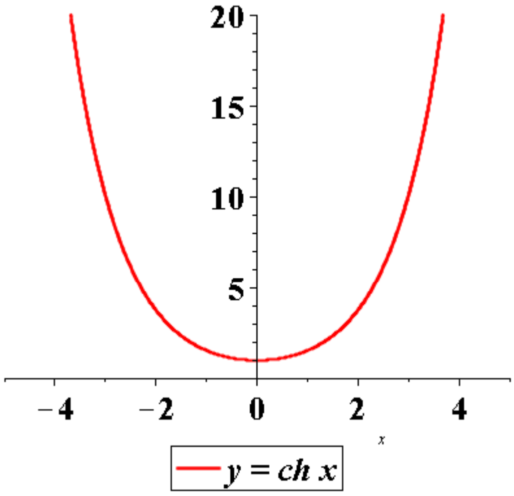
Гіперболічний синус: $y = \operatorname{sh} x$, де $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$.

Гіперболічний косинус: $y = \operatorname{ch} x$, де $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$.



Функція непарна зростаюча

Рис. 27

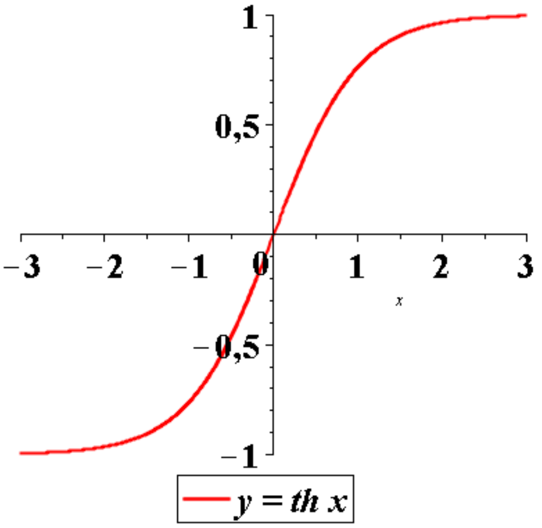


Функція парна

Рис. 28

Гіперболічний тангенс: $y = \operatorname{th} x$,

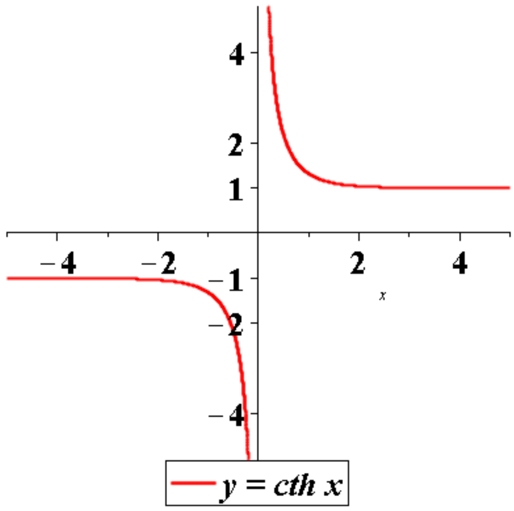
Гіперболічний котангенс: $y = \operatorname{cth} x$, де $\mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.



Функція непарна зростаюча

Рис. 29

де $\mathrm{cth}x = \dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.



Функція непарна спадна

Рис. 30

Нагадаємо, що для гіперболічних функцій формули з точністю до знака аналогічні відповідним формулам для тригонометричних функцій:

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1,\ \mathrm{ch}2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x,\ \mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}x \cdot \mathrm{ch}y \pm \mathrm{sh}x \cdot \mathrm{sh}y \text{ і т. д.}$$

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Яка функція називається непарною, парною?
2. Що таке період функції?
3. Яка функція називається зростаючою на інтервалі? Наведіть приклади.
4. Яка функція називається неспадною на інтервалі?
5. Яка функція називається монотонною (строго монотонною)?
6. Що таке обмежена функція? Наведіть приклади.
7. Що таке обернена функція? Наведіть приклади функцій, які мають і не мають оберненої функції.
8. Напишіть рівняння кола в параметричному вигляді.
9. Побудуйте графіки функцій:

$$y = a^x;\ y = \log_a x\,(a > 1, 0 < a < 1);\ y = \sin x;\ y = \mathrm{arctg}x.$$

10. Яка функція називається алгебраїчною, трансцендентною?
11. Що таке дробово-раціональна функція?
12. Як побудувати графіки функцій $y = x^3 - a$, $y = \ln(x + a)$,

зокрема, якщо $a = 2,\ a = -3$.

13. Чому дорівнює $\mathrm{sh}x$, $\mathrm{ch}x$?

Розв'язання прикладів

Приклад 1. Для функції $f(x) = \dfrac{2x+5}{x^2-1}$ знайти:

1. $f(0)$; 2. $f(-3)$; 3. $f(-x)$; 4. $f(2x)$; 5. $f(a)+3$; 6. $f(a+3)$.

Розв'язання: 1. Підставимо значення $x=0$ у вираз заданої функції

$$f(0)=\frac{2\cdot 0+5}{0^2-1}=-5.$$

2. Аналогічно знаходимо: $f(-3)=\dfrac{2\cdot(-3)+5}{(-3)^2-1}=\dfrac{-6+5}{9-1}=-\dfrac{1}{8}.$

3. Для того щоб знайти $f(-x)$, потрібно формально замінити x у формулі для $f(x)$ на $-x$:

$$f(-x)=\frac{2\cdot(-x)+5}{(-x)^2-1}=\frac{-2x+5}{x^2-1}.$$

4. Аналогічно $f(2x)=\dfrac{2\cdot 2x+5}{(2x)^2-1}=\dfrac{4x+5}{4x^2-1}.$

5. Аналогічно $f(a)+3=\dfrac{2\cdot a+5}{a^2-1}+3=\dfrac{2a+5+3a^2-3}{a^2-1}=\dfrac{3a^2+2a+2}{a^2-1}.$

6. Аналогічно $f(a+3)=\dfrac{2\cdot(a+3)+5}{(a+3)^2-1}=\dfrac{2a+6+5}{a^2+6a+9-1}=\dfrac{2a+11}{a^2+6a+8}.$

Приклад 2. Для функції $f(z)=\dfrac{\sqrt{z+3}}{z^2}$ знайти:

1. $f(1)$; 2. $f(-2)$; 3. $f(t+1)$; 4. $f(2x-4)$.

Розв'язання: 1. $f(1)=\dfrac{\sqrt{1+3}}{1^2}=2$; 2. $f(-2)=\dfrac{\sqrt{-2+3}}{(-2)^2}=\dfrac{1}{4}$;

3. $f(t+1)=\dfrac{\sqrt{t+1+3}}{(t+1)^2}=\dfrac{\sqrt{t+4}}{(t+1)^2}$; 4. $f(2x-4)=\dfrac{\sqrt{2x-4+3}}{(2x-4)^2}=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{4(x-2)^2}$.

Приклад 3. Задана функція $\begin{cases} x=2t+3, \\ y=3-t. \end{cases}$

Знайти її значення, коли $t=-1$; $t=0$; $t=3$; $t=-10$.

Розв'язання: тут функція *y=(x)* задана в параметричному вигляді. Підставимо значення параметра $t=-1$ у задану функцію:

$$\begin{cases} x=2\cdot(-1)+3=1, \\ y=3-(-1)=4, \end{cases} \text{ тому } f(1)=4.$$

Аналогічно $t=0$: $\begin{cases} x=2\cdot 0+3=3, \\ y=3-0=3; \end{cases}$ тому $f(3)=3$.

$$t=3: \begin{cases} x=2\cdot 3+3=9, \\ y=3-3=0; \end{cases} \text{ тому } f(9)=0.$$

$$t=-10:\ \begin{cases} x=2\cdot(-10)+3=-17, \\ y=3-(-10)=13; \end{cases} \text{ тому } f(-17)=13.$$

Приклад 4. Дослідити функції на парність і непарність:

1. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+5}$; 2. $f(x)=e^x+e^{-x}$; 3. $f(x)=x^3\cdot a^x$.

Розв'язання: Нагадаємо: функція парна, якщо $f(-x)=f(x)$, функція непарна, якщо $f(-x)=-f(x)$.

1. $f(-x)=\dfrac{2\cdot(-x)}{(-x)^2+5}=-\dfrac{2x}{x^2+5}=-f(x)$, а за означенням це функція непарна.

2. $f(-x)=e^{-x}+e^x=f(x)$ – тобто це функція парна.

3. $f(-x)=(-x)^3\cdot a^{-x}=-x^3\cdot a^{-x}$, тобто це функція загального виду.

Приклад 5. Побудувати графіки функцій (за допомогою графіків основних елементарних функцій).

1. $f(x)=x^2+3$; 2. $f(x)=\ln(x-2)$; 3. $f(x)=-2\cos x$.

Розв'язання: 1. Побудуємо спочатку графік $y=x^2$ (рис. 31), а потім паралельно зсунемо цей графік вздовж осі OY на три одиниці вгору (рис. 32).

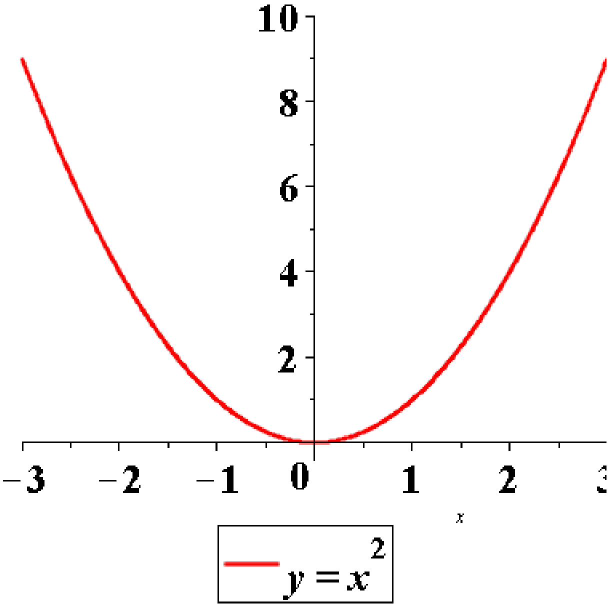


Рис. 31

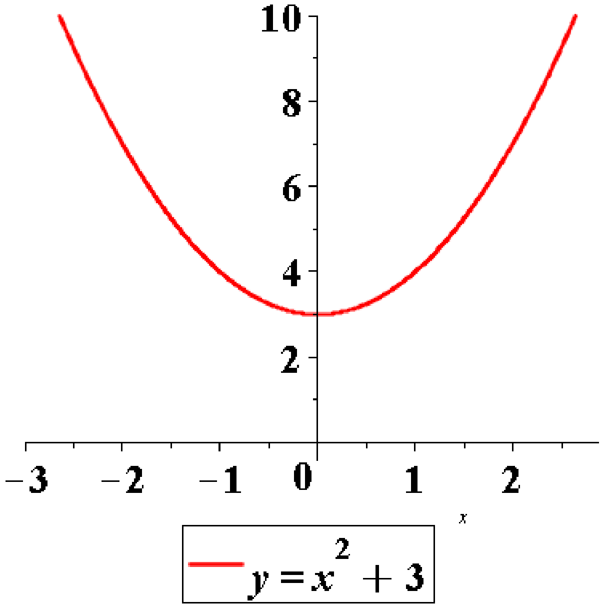


Рис. 32

2. Побудуємо спочатку графік $y=\ln x$ (рис. 33), а потім паралельно зсунемо його вздовж осі OX на дві одиниці праворуч (рис. 34).

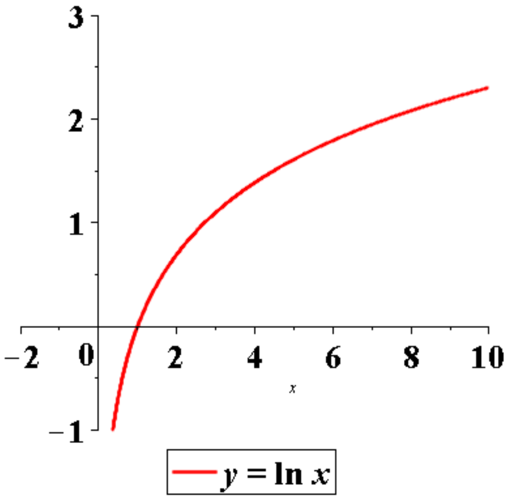


Рис. 33

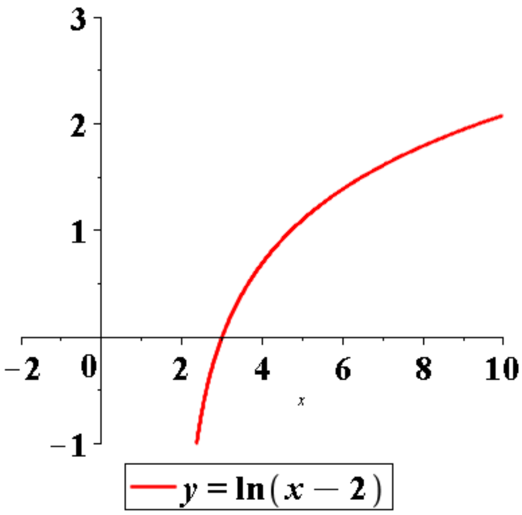


Рис. 34

3. Усі точки $M(x, y)$ графіка $y = \cos x$ (рис. 35) замінимо точками $M_1(x, -2y)$ (рис. 36).

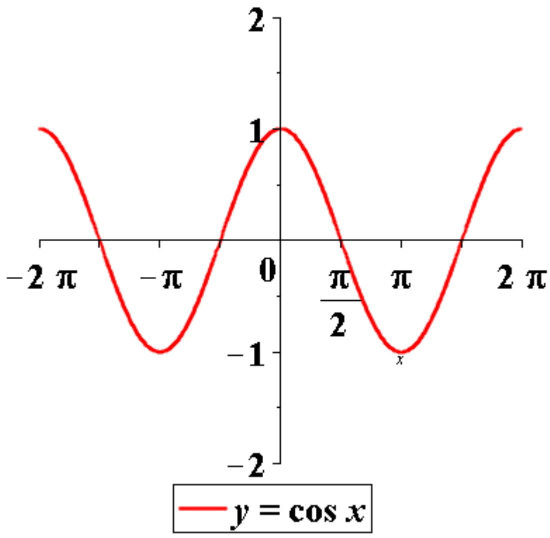


Рис. 35

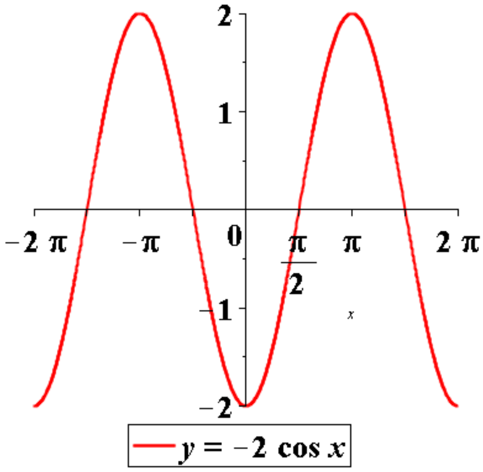


Рис. 36

Приклад 6. Побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} x, -\infty < x < 1, \\ x^2, 1 \le x < 3, \\ 5 - x, 3 \le x < \infty. \end{cases}$$

Розв'язання: Зауважимо, що в умові наведеного прикладу розглядається не три функції (так часто вважають студенти), а одна функція, яка на різних інтервалах задається різними аналітичними виразами (рис. 37):

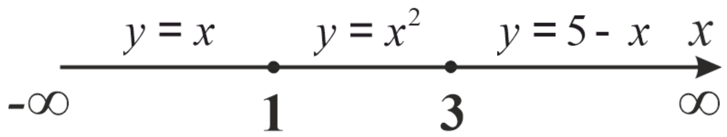


Рис. 37

Побудуємо графік цієї функції (рис. 38).

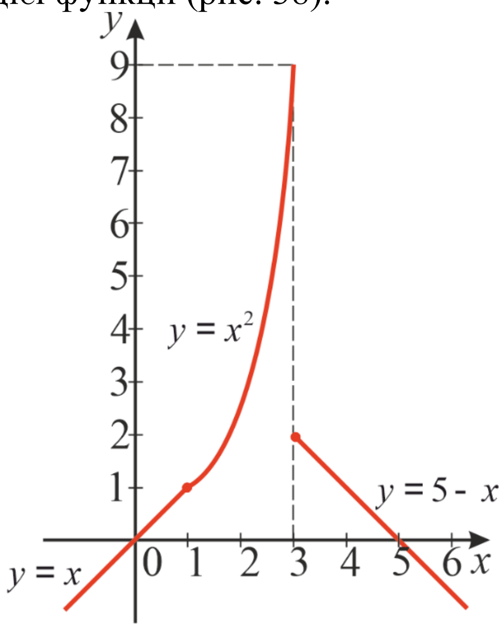


Рис. 38

Приклад 7. Представити складні функції за допомогою ланцюжків, складених з основних елементарних функцій і навпаки:

1. $y = \operatorname{arctg} \ln x$; 2. $y = \sin[2 \operatorname{ctg}(x+1)]$; 3. $y = e^{\sqrt[3]{2+x^2}}$;

4. $y = \sqrt[4]{u}$, $u = \operatorname{tg} v$, $v = 3x + 5$; 5. $y = 2^u$, $u = \dfrac{1}{v^2}$, $v = \cos(x-1)$.

Розв'язання: 1. Запишемо функцію таким чином: $y = \operatorname{arctg} u$; $u = \ln x$.

2. Аналогічно: $y = \sin u$; $u = 2 \operatorname{ctg} v$; $v = x + 1$.

3. $y = e^u$, $u = \sqrt[3]{v}$, $v = 2 + x^2$.

4. Тепер з елементарних функцій утворимо складну функцію $u = \operatorname{tg} v = \operatorname{tg}(3x+5)$, тоді $y = \sqrt[4]{u} = \sqrt[4]{\operatorname{tg}(3x+5)}$.

5. $u=\frac{1}{v^2}=\frac{1}{\cos^2(x-1)}$, тоді $y=2^{\frac{1}{\cos^2(x-1)}}$.

Приклади для самостійного розв'язання

Приклад 1. Знайти область визначення функцій:

1. $f(x)=\frac{1}{x^3-16x}$; 2. $f(x)=\frac{5x}{x^2+10}$; 3. $f(x)=\sqrt{2x-7}$; 4. $f(x)=\frac{1}{\ln x}$.

Приклад 2. Знайти область визначення функцій:

1. $f(x)=\frac{x+1}{(x+2)(x-3)}$; 2. $f(x)=\sqrt{x+5}-\sqrt{-8-x}$; 3. $f(x)=e^{\ln x}$.

Приклад 3. Для функції $f(x)=\frac{3x^2+1}{x-5}$ знайти: $f(1)$; $f(0)$; $f(5)$; $f(x+5)$; $f(a)$.

Приклад 4. Для функції $f(x)=\frac{x^2+1}{2^x}$ знайти: $f(1),\ f(0),\ f(-x),\ f(2a)$.

Приклад 5. Для функції $f(x)=x\cdot\operatorname{tg}x$ знайти: $f(0)$; $f(\pi/6)$; $f(\pi/4)$; $f(\pi/2)$.

Приклад 6. Для функції $f(x)=\sin 2x$ знайти: $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $f(-x)$, $f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)$.

Приклад 7. Функція $y=f(x)$ задана в параметричному вигляді

$\begin{cases}x=3t-t^2\\ y=t+2\end{cases}$. Знайти її значення при $t=-2$, $t=0$, $t=\frac{1}{3}$.

Приклад 8. Функція $y=f(x)$ задана в параметричному вигляді $\begin{cases}x=8t+3\\ y=t^2\end{cases}$.

Знайти її значення, якщо $t=-1$, $t=-\frac{1}{2}$, $t=0$, $t=2$.

Приклад 9. Дослідити функції на парність і непарність:

1. $f(x)=2-\cos^2 x$; 2. $f(x)=\frac{\sin x}{1+x^4}$; 3. $f(x)=x\cdot\cos x$; 4. $f(x)=2x+1$.

Приклад 10. Дослідити функції на парність і непарність:

1. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$; 2. $f(x)=\cos x^2$; 3. $f(x)=\frac{x^2}{x-x^3}$.

Приклад 11. Побудувати графіки функцій (за допомогою графіків основних елементарних функцій):

1. $f(x)=x^3-2$; 2. $f(x)=\sqrt{x+2}$; 3. $f(x)=(x+1)^2$; 4. $f(x)=e^{x-1}$.

Приклад 12. Побудувати графіки функцій (за допомогою графіків основних елементарних функцій):

1. $f(x)=2-x^2$; 2. $f(x)=\sqrt{x-1}$; 3. $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 4. $f(x)=3^x+2$.

Приклад 13. Побудувати графік функції

$$f(x)=\begin{cases} x+5, & -\infty<x<-2; \\ x^2-1, & -2\le x<3; \\ x-3, & 3\le x<\infty. \end{cases}$$

Приклад 14. Побудувати графік функції

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & -\infty<x<0 \\ \sin x, & 0\le x<\frac{\pi}{2}. \\ 1, & x\ge\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Приклад 15. Складні функції представити за допомогою ланцюжків, складених із основних елементарних функцій і навпаки:

1. $y=\ln^3 \mathrm{tg}\, 4x$; 2. $y=\sqrt[6]{\arcsin 7x}$;

3. $y=u^2,\ u=\cos v,\ v=\log_5 x$; 4. $y=e^u,\ u=\sqrt{v},\ v=3x$.

Приклад 16. Складні функції представити за допомогою ланцюжків, складених із основних елементарних функцій і навпаки:

1. $y=5^{\sin x^3}$; 2. $y=\mathrm{tg}^2[(x^2-3x)]$; 3. $y=\arccos^5(\mathrm{ctg}3x)$;

4. $y=\cos u,\ u=\sqrt{v},\ v=\frac{x+1}{x-1}$; 5. $y=5u,\ u=\frac{1}{v^4},\ v=\mathrm{ctg}\, x$.

Відповіді:

Приклад 1. 1. $x\ne 0, x\ne\pm 4$; 2. $-\infty<x<\infty$; 3. $x\ge\frac{7}{2}$; 4. $x>0, x\ne 1$.

Приклад 2. 1.$x\ne 3, x\ne -2$; 2. Не існує; 3. x>0.

Приклад 3. $f(1)=-1$; $f(0)=-\frac{1}{5}$; $f(5)$ – значення не існує; $f(x+5)=\frac{3x^2+30x+76}{x}$;

$f(a)=\frac{3a^2+1}{a-5}$.

Приклад 4. $f(1)=1;\;\; f(0)=1;\;\; f(-x)=\left(x^2+1\right)2^x;\;\; f(2a)=\dfrac{4a^2+1}{4^a}.$

Приклад 5. $f(0)=0;\;\; f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{18};\;\; f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4};\;\; f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\infty.$

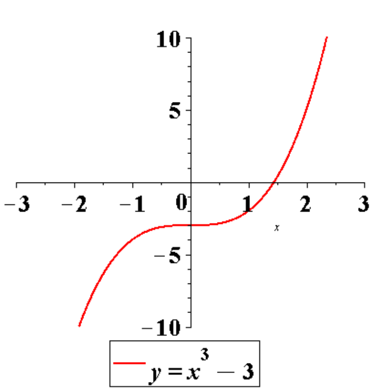
Приклад 6. $f(0)=0;\;\; f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2};\;\; f(-x)=-\sin 2x;\;\; f\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)=-\sin 2t.$

Приклад 7. $f(-10)=0;\;\; f(0)=2;\;\; f(\frac{8}{9})=\frac{7}{3}.$

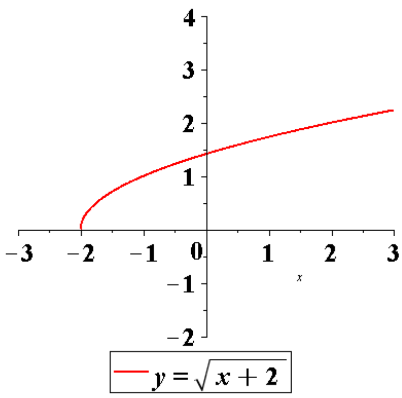
Приклад 8. $f(-5)=1;\;\; f(7)=\dfrac{1}{4};\;\; f(3)=0;\;\; f(19)=4.$

Приклад 9. 1. парна; 2. непарна; 3. непарна; 4. загального виду.
Приклад 10. 1. парна; 2. парна; 3. непарна.

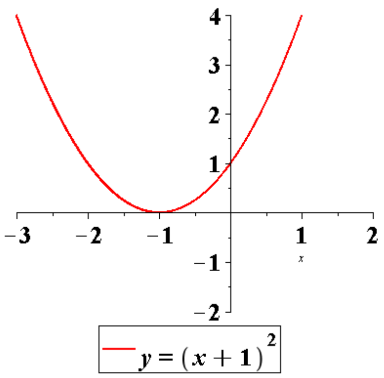
Приклад 11. 1.



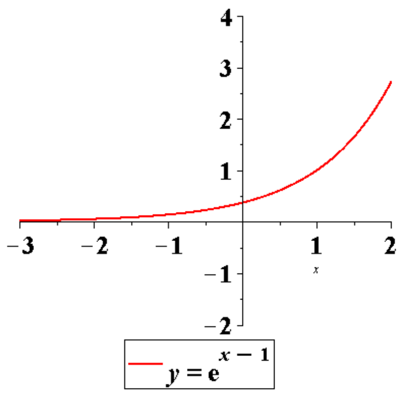
2.



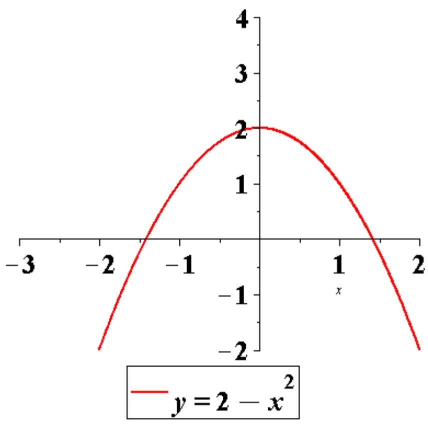
3.



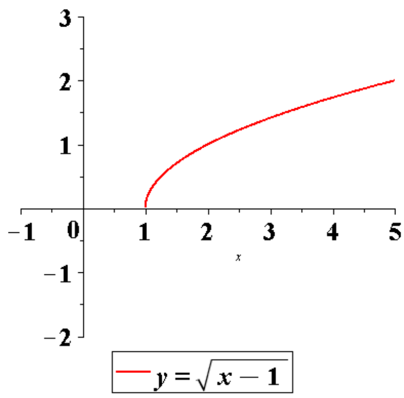
4.

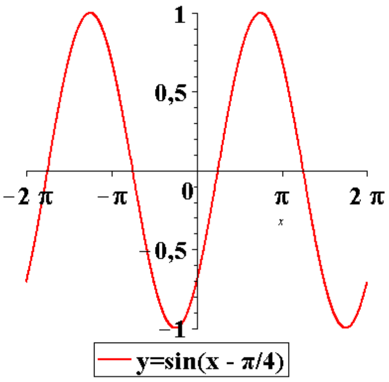


Приклад 12. 1.

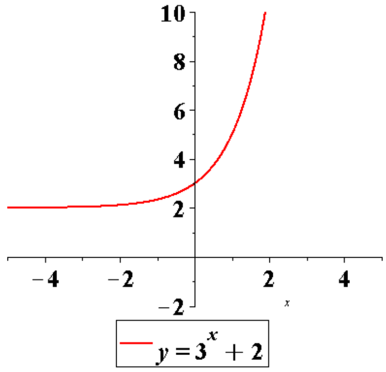


2.

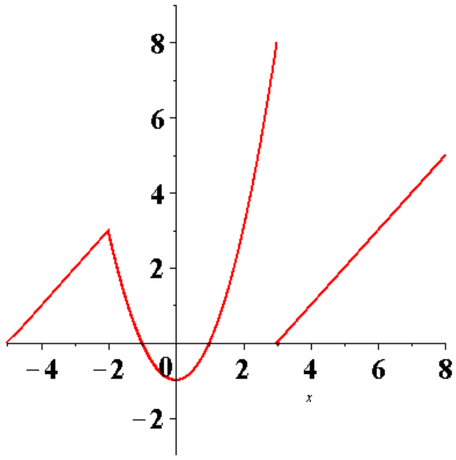




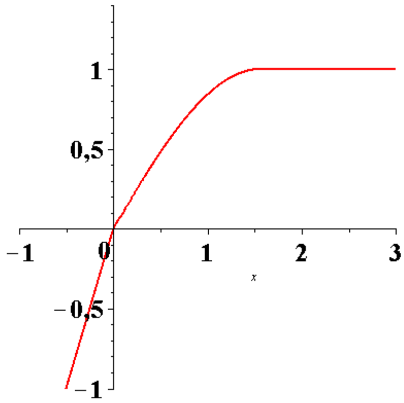
3.



4.



Приклад 13.



Приклад 14.

Приклад 15. 1. $y = u^3, u = \ln v, v = \operatorname{tg} t, t = 4x$; 2. $y = \sqrt[6]{u}, u = \arcsin v, v = 7x$;

3. $y = \cos^2 \log_5 x$; 4. $y = e^{\sqrt{3x}}$.

Приклад 16. 1. $y = u^5;\ u = \sin v;\ v = x^3$. 2. $y = u^2;\ u = tgv;\ v = x^2 - 3x$.

3. $y = u^5;\ u = \arccos v;\ v = ctgt;\ t = 3x$. 4. $y = \cos\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$; 5. $y = \dfrac{5}{ctg^4 x}$.

6. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ. ГРАНИЦЯ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Нагадаємо, що змінною величиною, або просто змінною, називають будь-яку величину *x*, яка може набувати різних числових значень. Розглянемо важливий клас змінних величин, який будемо називати послідовностями.

Означення. Якщо сукупність усіх можливих значень змінної величини така, що всі ці числа можна занумерувати за допомогою нескінченної кількості номерів 1, 2, 3, ... і розташувати у порядку зростання номерів, тобто записати у вигляді: $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$, то таку змінну будемо називати **послідовністю** (**числовою послідовністю**).

Послідовність $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ будемо позначати $\{x_n\}$ або просто писати, що x_n – змінна.

Числа $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ будемо називати **елементами** (членами) послідовності.

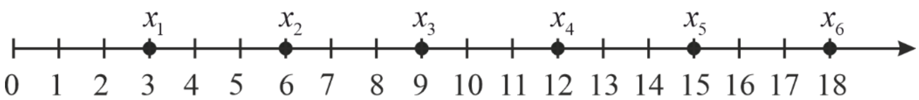
Приклад.

1. $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6, ..., x_{50} = 100, ...$ і, взагалі, $x_n = 2n, n = 1, 2, 3, ...$
2. $y_1 = 3, y_2 = 9, y_3 = 27, ...$ і, взагалі, $y_n = 3^n, n = 1, 2, 3, ...$
3. $z_1 = 1, z_2 = \frac{1}{2}, z_3 = \frac{1}{3}, ...$ і, взагалі, $z_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, ...$
4. $x_1 = a, x_2 = a + d, x_3 = a + 2d, ...$ і, взагалі, $x_n = a + (n-1)d, n = 1, 2, 3, ...$

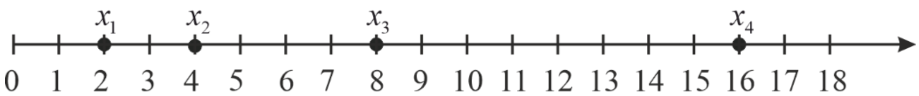
Зауважимо, що послідовність вважається заданою, якщо відома формула (правило), за допомогою якої за номером n можна знайти, чому дорівнює x_n. Наприклад, якщо задати x_n формулою $x_n = 3n - 1$, то можна одержати будь-яке значення x_n: $x_6 = 3 \cdot 6 - 1 = 17$, $x_{23} = 3 \cdot 23 - 1 = 68$ і далі. Якщо значення x_n відкладати на числовій осі, то одержимо графічне зображення числової послідовності. Зауважимо, що на такому рисунку ми можемо зобразити лише декілька окремих значень змінної x_n, але часто цього буває достатньо для наочного уявлення змінної x_n.

Приклад.

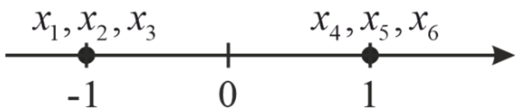
1. $x_n = 3n$



2. $x_n = 2^n$



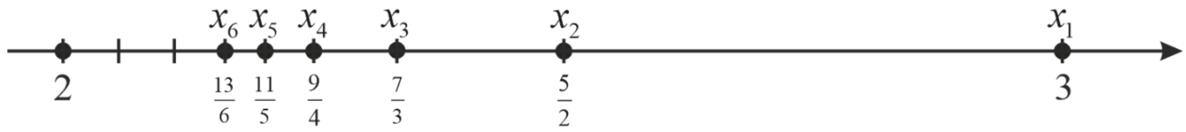
3. $x_n = (-1)^n$



Розглянемо послідовність $x_n = 2 + \frac{1}{n}$:

$x_1 = 2 + \frac{1}{1} = 3$; $\quad x_2 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$; $\quad x_3 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$;

$x_4 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$; $\quad x_5 = 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$; $\quad x_6 = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}$.



На цьому рисунку видно, що значення змінної у разі збільшення n підходять «достатньо близько» до сталого числа 2. У цьому випадку кажуть, що 2 є границею послідовності x_n або що x_n прямує до 2.

А тепер сформулюємо означення границі послідовності.

Означення. Число a називається **границею послідовності** $\{x_n\}$, якщо для **будь-якого** довільно малого $\varepsilon > 0$ існує число N таке, що для **усіх** (натуральних) $n > N$ буде виконуватися нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$,або $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

При цьому кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ (або змінна x_n) має границю, що дорівнює a, або що послідовність $\{x_n\}$ (або змінна x_n) збігається до числа a. Зауважимо, що номер N взагалі не може бути вибраний раз і назавжди; він залежить від вибору числа ε.

Нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ еквівалентна двом нерівностям: $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$, або $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Інтервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ будемо називати ε**-околом точки** a.

Дамо тепер геометричне тлумачення поняття границі послідовності.

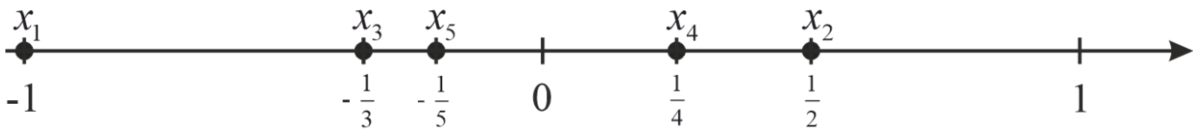
Означення. Число (точка) a є границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для **будь-якого** інтервалу $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ можна вказати такий номер N, починаючи з якого **всі** точки x_n з індексами $n > N$ потраплять у цей інтервал.

Поняття границі послідовності можна сформулювати й таким чином: послідовність $\{x_n\}$ має своєю границею число a, якщо за межами **довільного** ε-околу точки a розміщена **скінченна** кількість елементів послідовності.

На прикладі спробуємо розібратися у сформульованих вище означеннях.

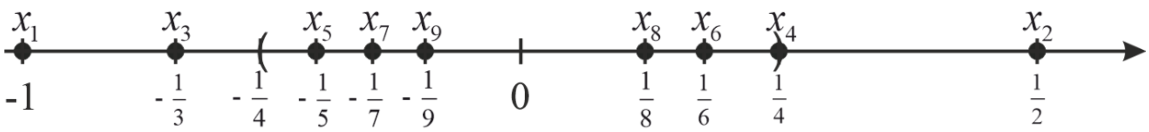
Розглянемо послідовність

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n}; \quad x_1 = -1;\ x_2 = \frac{1}{2};\ x_3 = -\frac{1}{3};\ x_4 = \frac{1}{4};\ x_5 = -\frac{1}{5} \text{ і далі}$$



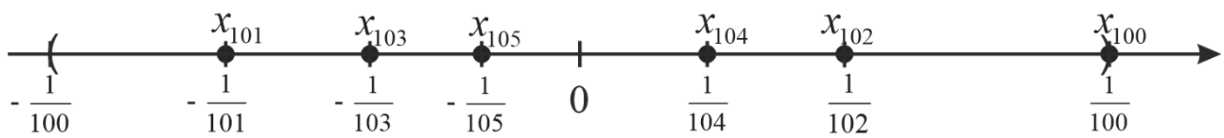
Інтуїтивно можна здогадатися, що границя цієї послідовності дорівнює 0, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. Дійсно, задамо, наприклад, $\varepsilon = \frac{1}{4}$ (зауважимо, що число ε завжди додатне й достатньо невелике). Тоді так званий ε-окіл буде інтервалом $\left(0 - \frac{1}{4}, 0 + \frac{1}{4}\right)$ або $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Знайдемо число N, починаючи з якого **усі** члени послідовності потраплять у цей інтервал. За означенням границі послідовності запишемо нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ тут $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $a = 0$, $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$.

Тобто $\left|\dfrac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \dfrac{1}{4}$ або $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| < \dfrac{1}{4}$, або $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{4}$ (тому що n завжди додатне число, а $\left|(-1)^n\right| = 1$). Розв'язок цієї нерівності $n > 4$. Таким чином, за означенням $N = 4$ і починаючи з $n = 5$ **усі** члени послідовності потраплять в інтервал $\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$. Зауважимо, що вираз «усі члени послідовності...» означає, що **жоден** член послідовності, номер якого більший ніж 4, не опиниться поза межами ε-околу $\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$.



Тепер візьмемо, наприклад, $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$. Побудуємо ε-окіл: $\left(-\dfrac{1}{100}, \dfrac{1}{100}\right)$ і знайдемо номер *N*, починаючи з якого всі члени послідовності потраплять у цей окіл: $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| < \dfrac{1}{100}$ або $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{100}$, або $n > 100$.

У цьому випадку $N = 100$, а починаючи з номера $n = 101$, **усі** члени послідовності потраплять в інтервал $\left(-\dfrac{1}{100}, \dfrac{1}{100}\right)$.



Із розглянутого вище робимо висновок: яке б **мале** ε ми не задавали, **завжди** знайдеться номер N, починаючи з якого **усі** члени послідовності будуть задовольняти нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$, тобто $\left|\dfrac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon$, а це означає, що

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

7. НЕСКІНЧЕННО МАЛІ Й НЕСКІНЧЕННО ВЕЛИКІ ПОСЛІДОВНОСТІ (ЗМІННІ)

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ (або змінна x_n) називається **нескінченно**

малою, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число N, таке, що для усіх $n > N$ буде виконуватися нерівність $|x_n| < \varepsilon$.

У цьому випадку пишуть: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, або $x_n \to 0$.

Зауважимо, що сформульоване означення є окремим випадком означення границі послідовності, коли $a = 0$. Зауважимо, що послідовність $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, розглянута в попередньому параграфі, буде нескінченно малою послідовністю.

Існує інше (простіше) **означення** нескінченно малої послідовності: послідовність, границя якої дорівнює нулю, називається **нескінченно малою.**

Нескінченно мала послідовність може наближатися до нуля, набуваючи тільки додатних значень $\left(x_n = \dfrac{1}{n}\right)$ або тільки від'ємних значень $\left(x_n = -\dfrac{1}{n^2}\right)$ і, нарешті, набуваючи і додатних, і від'ємних значень $\left(x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.

Зауваження. Термін «нескінченно мала змінна» дещо невдалий, оскільки може скластися враження, що величина, про яку йде мова, має дуже малі розміри. Хоча насправді мова йде про **характер зміни** цієї величини. Показовим прикладом нескінченно малої є величина

$$x_n = \frac{10000000}{n}.$$

Початкові її значення великі: $x_1 = 10000000$; $x_2 = 5000000$. Але легко бачити, що ця величина все ж таки прямує до нуля (коли $n \to \infty$) і тому є нескінченно малою.

Розглянемо інший приклад: $x_n = 0{,}000000001$. Ця величина є достатньо малою, але не є нескінченно малою, тому що вона **стала** й не прямує до нуля.

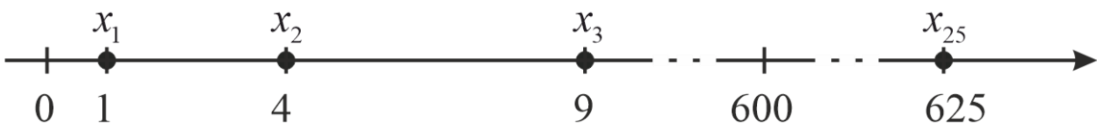
Тепер перейдемо до вивчення нескінченно великих послідовностей (змінних).

Нехай члени деякої послідовності необмежено зростають за абсолютною величиною (коли $n \to \infty$).

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно великою, якщо для **будь-якого** числа $M > 0$ завжди знайдеться такий номер N, починаючи з якого **всі** члени послідовності будуть задовольняти нерівність: $|x_n| > M$ $(n > N)$.

При цьому пишуть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Розглянемо, наприклад, послідовність $x_n = n^2$. Візьмемо число $M = 600$. Починаючи з номера $N = 25$ значення змінної будуть перевищувати задане число М.



А оскільки із зростанням номера n значення x_n тільки збільшується, то і подальші значення x_n будуть задовольняти нерівність: $x_n > 600$.

Якщо задати ще більше число, наприклад $M = 1000$, то починаючи з номера $N = 32$ ($x_{32} = 32^2 = 1024 > 1000$) наступні значення x_n будуть більшими $M = 1000$. Взагалі, яке б велике додатне число M ми не вибрали, задана змінна з деякого моменту обов'язково його «переросте». Крім того зауважимо, що розглянута послідовність набуває тільки додатних значень. Про таку послідовність будемо казати, що вона прямує до «плюс нескінченності»: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Якщо розглянути послідовність $x_n = -\sqrt{n}$, то очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty}(-\sqrt{n}) = -\infty$, тобто вона нескінченно велика й прямує до «мінус нескінченності». А послідовність $x_n = (-1)^n \cdot n$ із членами $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 4$,... буде просто нескінченно великою, оскільки $|x_n| = n$ і зі зростанням n абсолютні значення її необмежено зростають. Але про цю послідовність не можна сказати, що вона має границю $-\infty$ або $+\infty$, оскільки її члени увесь час змінюють знак.

Зауваження. Термін «нескінченно велика змінна» (як і «нескінченно мала змінна») теж невдалий, оскільки може скластися враження, що величина має дуже великі розміри, хоча насправді мова йде про **безмежно** зростаючу змінну.

Наприклад, число $10^{100\,000}$ величезне, але воно сталe й до нескінченності не прямує. Навпаки, та змінна, яку ми розглядали вище ($x_n = n^2$), прямує до нескінченності, хоча перші її значення $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 9$,... достатньо невеликі.

Поняття нескінченно великої і нескінченно малої змінних пов'язані між собою.

Теорема. (зв'язок нескінченно великих і нескінченно малих змінних).

Змінна, обернена нескінченно великій, є нескінченно малою змінною, тобто, якщо $x_n \to \infty$, то $1/x_n \to 0$.

Правильність цієї теореми очевидна.

Дійсно, нехай, наприклад, $x_n \to +\infty$. Це означає, що з деякого номера N x_n буде більше, наприклад, 1000. Але тоді дріб $\frac{1}{x_n}$ стане меншим $\frac{1}{1000}$. У процесі своєї зміни x_n стане більше 1000000, але тоді $\frac{1}{x_n}$ стане менше $\frac{1}{1000000}$, тобто

$\frac{1}{x_n} \to 0$, а тому ця змінна нескінченно мала.

Так само можна розглянути обернене твердження: якщо $x_n \to 0$ (але $x_n \neq 0$), то $\frac{1}{x_n} \to \infty$.

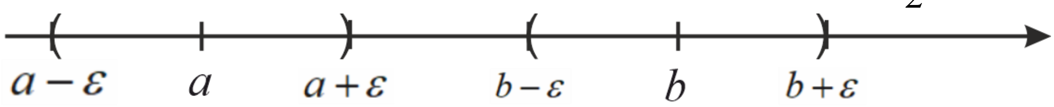
Зауважимо, що це не доведення теореми, а лише інтуїтивне її тлумачення на рівні прикладу. Розглянемо ще дві теореми.

Теорема. Границя сталої є сама стала.

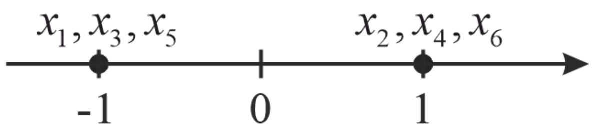
Дійсно, якщо при всіх n буде $x_n = c$, то при будь-якому $\varepsilon > 0$ буде виконуватись нерівність $|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

Теорема. Якщо змінна має границю, то ця границя єдина.

Нехай змінна має дві границі, тобто $x_n \to a$ і $x_n \to b$ ($a \neq b$). Тоді, починаючи з деякого значення n, змінна повинна буде задовольняти відразу дві нерівності: $|x_n - a| < \varepsilon$ і $|x_n - b| < \varepsilon$, але це неможливо, якщо, наприклад, $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$.



Зауваження. Слід пам'ятати, що не кожна змінна має границю. Наприклад, $x_n = (-1)^n$ границі не має (див. попередню теорему).



Якщо змінна не має границі, то кажуть, що вона **розбіжна**.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що таке числова послідовність? Наведіть приклади.
2. Що таке границя послідовності?
3. Наведіть приклад послідовності, яка має границю і не має границі.
4. Яка змінна називається нескінченно малою, нескінченно великою? Наведіть приклади.
5. Сформулюйте теорему про зв'язок нескінченно малої і нескінченно великої змінних.
6. Чому дорівнює границя сталої?
7. Як називається послідовність, яка не має границі?

Розв'язання прикладів

Приклад 1. Написати чотири перші члени послідовності:

1. $x_n = \frac{2n}{n^2+3}$; 2. $x_n = \frac{(-1)^n (3n-2)}{n}$.

Розв'язання:

1. $x_1 = \frac{2\cdot 1}{1^2+3} = \frac{2}{4}$; $x_2 = \frac{4}{7}$; $x_3 = \frac{6}{12}$; $x_4 = \frac{8}{19}$;

2. $x_1 = -\frac{1}{1}$; $x_2 = \frac{4}{2}$; $x_3 = -\frac{7}{3}$; $x_4 = \frac{10}{4}$.

Приклад 2. Написати формулу загального члена послідовності:

1. $\frac{3}{3}, \frac{4}{9}, \frac{5}{27}, \frac{6}{81}, \ldots$ 2. $-1, 2, -6, 24, \ldots$

Розв'язання: 1. З чисельником усе зрозуміло: маємо натуральний ряд чисел (починаючи з 3). Щодо знаменника зауважимо, що $3 = 3,\quad 9 = 3^2,\quad 27 = 3^3, \ldots$, тоді $x_n = \frac{n+2}{3^n}$.

2. За означенням $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n$. Тому $1! = 1$; $2! = 1\cdot 2 = 2$; $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$; $4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$; $x_n = (-1)^n \cdot n!$

Приклад 3. Показати, що послідовність $x_n = \frac{2n}{n+1}$ має границю, яка дорівнює 2.

Розв'язання. За означенням границі послідовності для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер *N*, починаючи з якого виконується нерівність

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Спростимо нерівність

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2n-2n-2}{n+1}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{-2}{n+1}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{n+1} < \varepsilon.$$

Розв'яжемо одержану нерівність відносно *n*:

$$\frac{n+1}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n+1 > \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

Якщо, наприклад, $\varepsilon = \frac{1}{10}$, то починаючи з номера $N = 19$ $\left(n > \frac{2}{\frac{1}{10}} - 1 \Rightarrow n > 20 - 1 \Rightarrow n > 19\right)$ буде виконуватись нерівність (2). Якщо $\varepsilon = \frac{1}{100}$, то починаючи з номера $N = 199$ $\left(n > \frac{2}{\frac{1}{100}} - 1 \Rightarrow n > 200 - 1 \Rightarrow n > 199\right)$ буде виконуватись нерівність (2). Таким чином, яке б ε ми не вибрали, **завжди** знайдеться номер *N*, починаючи з якого буде виконуватись нерівність (2). Тоді відповідно до означення границі послідовності випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$.

Приклади для самостійного розв’язання

Приклад 1. Написати чотири перші члени послідовності:

1. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{5n-4}$; 2. $x_n = \dfrac{4^n}{(n+3)!}$.

Приклад 2. Написати чотири перших члени послідовності:

1. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{2n^2-1}$; 2. $x_n = \dfrac{(3n-1)!}{2^n}$.

Приклад 3. Написати формулу загального члена послідовності:

1. $\frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{9}{8}, \frac{11}{16}, \ldots$.. 2. $-1, 2, -3, 4, \ldots$

Приклад 4. Написати формулу загального члена послідовності:

1. $1, \frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{5}{8}, \frac{6}{10,} \ldots$; 2. $-2, 2, -2, 2, \ldots$.

Приклад 5. Показати, що послідовність $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ має границю, яка дорівнює 1.

Приклад 6. Показати, що послідовність $x_n = \dfrac{n}{2n+1}$ має границю, яка дорівнює $\dfrac{1}{2}$.

Приклад 7. Які з перелічених послідовностей є нескінченно великими або нескінченно малими:

1. $x_n = \dfrac{1}{3n^2+1}$; 2. $x_n = 1000000000$; 3. $x_n = 1-(-1)^n$;

4. $x_n = 2^n$; 5. $x_n = n^2 \cdot \cos\dfrac{\pi n}{2}$.

Приклад 8. Які з перелічених послідовностей є нескінченно великими або нескінченно малими:

1. $x_n = \dfrac{1}{100000000}$; 2. $x_n = (-1)^n \cdot n^2$; 3. $x_n = \dfrac{1}{n+1}$;

4. $x_n = 3^{-n}$; 5. $x_n = n \cdot \sin\dfrac{\pi n}{2}$.

Відповіді:

Приклад 1. 1. $-1, \frac{1}{6}, -\frac{1}{11}, \frac{1}{16}$; 2. $\frac{4}{4!}, \frac{16}{5!}, \frac{64}{6!}, \frac{256}{7!}$.

Приклад 2. 1. $-\frac{1}{2},\frac{1}{7},-\frac{1}{17},\frac{1}{31},$; 2. $1,\frac{5!}{4},\frac{8!}{8},\frac{11!}{16},$.

Приклад 3. 1. $\frac{2n+3}{2^n}$, $n=1,2,3,\ldots$; 2. $(-1)^n\cdot n, n=1,2,3,\ldots$.

Приклад 4. 1. $\frac{n+1}{2n}, n=1,2,3,\ldots$; 2. $(-1)^n 2, n=1,2,3,\ldots$.

Приклади 5, 6. Детальний розв'язок аналогічного приклада див. вище (приклад 3).

Приклад 7. 1. Нескінченно мала послідовність. 4, 5. Нескінченно великі послідовності.

Приклад 8. 3, 4. Нескінченно малі послідовності. 2, 5. Нескінченно великі послідовності.

8. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Ця тема є однією з найважливіших у математичному аналізі. Розглянемо поняття границі функції й питання, які пов'язані із цим поняттям. У попередньому параграфі ми розібрали поняття границі послідовності. А послідовність – це функція так званого цілочислового аргументу. Між поняттям границі послідовності та границі функції багато спільного, тому вивчати цю тему почнемо за допомогою послідовностей.

Розглянемо функцію $y=f(x)$. Візьмемо деяке значення $x=x_0$ і розглянемо послідовність $\{x_n\}$, яка задовольняє такі вимоги:

1. Усі числа $x_n<x_0$ і належать області визначення $y=f(x)$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Підставимо тепер числа x_n у функцію $y=f(x)$ й одержимо послідовність

$$y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2),\ldots,\ y_n=f(x_n),\ldots$$

Послідовність $\{y_n\}$ – це послідовність значень функції $y=f(x)$. Припустимо тепер, що для всіх послідовностей $\{x_n\}$, які задовольняють указані вимоги, відповідні послідовності $\{y_n\}$ збігаються й мають одну й ту саму границю *A*.

Тоді число *A* називають границею функції $y=f(x)$ у точці x_0 **зліва** і позначають таким чином: $A=\lim\limits_{x\to x_0^{-0}} f(x)=f(x_0-0)$.

Зміст цього означення такий: якщо брати значення *x* менші, ніж x_0, і наближати *x* до x_0 ($x\to x_0$), то значення функції $y=f(x)$ будуть наближатися до числа *A* (рис. 39).

Розглянемо тепер послідовності $\{x_n\}$, які задовольняють вимоги (більш скорочено):

1. $x_n>x_0$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Припустимо, що послідовності $\{y_n\}$ збігаються й мають одну й ту саму границю, яка дорівнює числу *A* (рис. 40).

Тоді число *A* називають границею функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ **справа** і позначають таким чином: $A = \lim\limits_{x \to x_0^{+0}} f(x) = f(x_0 + 0)$.

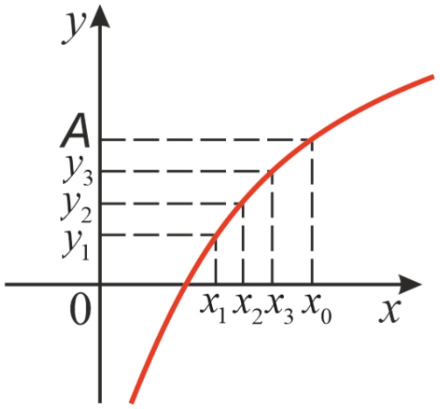


Рис. 39

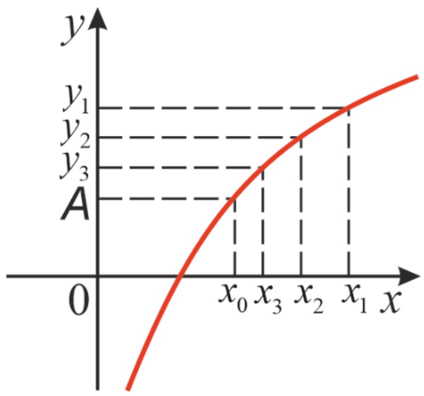


Рис. 40

Припустимо тепер, що в деякої функції в точці $x = x_0$ існує і границя справа, і границя зліва й вони збігаються: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$. У цьому випадку кажуть, що функція $y = f(x)$ має в точці $x = x_0$ границю, яка дорівнює *A*, і позначають це так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Існування границі в точці $x = x_0$ означає, що, коли числа *x* наближаються до числа x_0 (не має значення як – з боку більших значень, або з боку менших значень), то значення функції $y = f(x)$ при цьому наближаються до числа *A*.

А тепер сформулюємо означення границі функції (за Гейне).

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, окрім, можливо, самої точки x_0.

Означення. Число *A* називається границею функції $y = f(x)$ у точці x_0, якщо для **будь-якої** послідовності $\{x_n\}$, яка прямує до x_0 ($x_n \neq x_0$, $n = 1, 2, \ldots$), послідовність відповідних значень функції $y_n = f(x_n)$ збігається до *A*.

Позначається це так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, або $f(x) \to A$ (коли $x \to x_0$). Це означення називають означенням границі функції «на мові послідовностей».

Ми розібрали поняття границі за допомогою послідовностей x_n і $y_n = f(x_n)$.

Але це поняття можна сформулювати інакше.

Нехай, наприклад, функція $y = f(x)$ має в точці $x = x_0$ границю. Це означає, що в разі достатньо близьких до x_0 значень *x* числа $y = f(x)$ будуть достатньо близькими до числа *A*. Якщо зобразити точки *A* і *y* на осі ординат, то слова «достатньо близькі» означають, що точки *y* потрапляють у будь-який достатньо малий інтервал (окіл) вигляду $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$, якщо при цьому *x* достатньо близько наближається до x_0 (рис. 41).

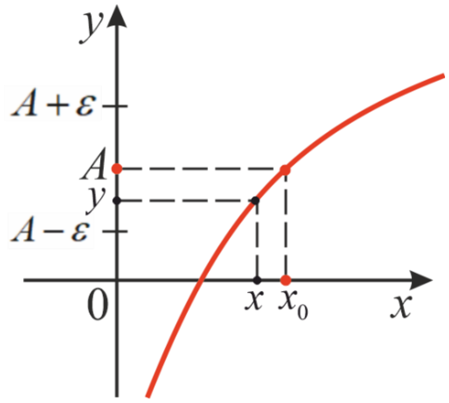


Рис. 41

Але той факт, що *y* потрапляє в інтервал $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ можна записати за допомогою нерівності $|y-A|<\varepsilon$. Тобто цей факт можна сформулювати таким чином: для значень *x*, достатньо близьких до x_0, виконується нерівність $|y-A|<\varepsilon$.

Обміркуємо тепер, як виразити за допомогою нерівності те, що передають слова: «достатньо близько до x_0».

На рис. 42 видно, що в заданому інтервалі довжиною 2ε для «далеких» від x_0 значень *x* нерівність $|y-A|<\varepsilon$ не виконується, тобто при заданому $\varepsilon>0$ числа *x* потрібно брати (див. рис. 42) між точками *M* і *N*. Це означає, що можна виділити деякий інтервал (окіл) $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta>0$ на осі OX, такий, що коли $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, нерівність $|y-A|<\varepsilon$ виконується.

Тобто слова «достатньо близько до x_0» означають існування інтервалу $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, з якого можна вибрати значення *x*, такі, що $|y-A|<\varepsilon$. Від чого ж залежить розмір δ? Зрозуміло, що від вибору ε: якщо ε збільшувати, то і δ може збільшитися, а якщо ε зменшувати, то і δ автоматично зменшиться.

Сформулюємо тепер поняття границі за допомогою геометричних образів.

Означення. Число *A* називається границею функції $y=f(x)$ у точці $x=x_0$, якщо для **будь-якого** інтервалу $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ з центром у точці *A* на осі ординат ($\varepsilon>0$ довільне число) можна указати такий інтервал $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ з центром у точці x_0 на осі абсцис, що для **усіх** точок *x* із δ-інтервалу **всі** відповідні точки $y=f(x)$ на осі OY потраплять в ε-інтервал (рис. 43).

Наведемо тепер остаточне формулювання. Для цього нагадаємо, що потрапляння точки *x* в інтервал $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ можна записати за допомогою нерівності $|x-x_0|<\delta$, а потрапляння точки *y* в інтервал $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ можна записати за допомогою нерівності $|y-A|<\varepsilon$. Нарешті, потрібно мати на увазі, що розмір δ-інтервалу залежить від розмірів ε-інтервалу і що число $\varepsilon>0$ можна брати яким завгодно – і малим, і великим (хоча брати його великим немає сенсу).

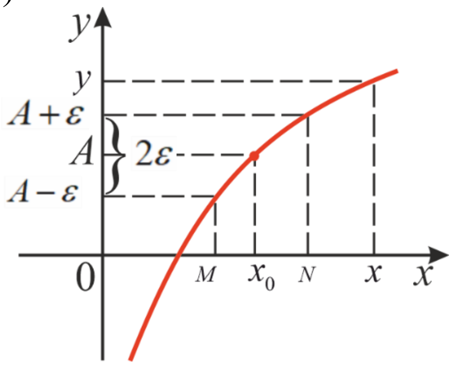


Рис. 42

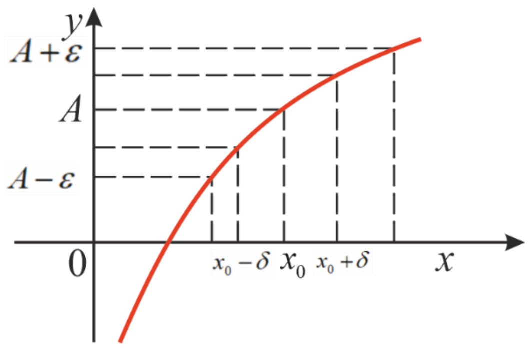


Рис. 43

Означення (за Коші). Число A називається границею функції $y=f(x)$ у точці x_0, якщо функція визначена в деякому околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, і для **будь-якого** як завгодно малого числа $\varepsilon>0$ знайдеться таке число $\delta>0$ (яке залежить від ε), що для **усіх** x, таких, що $|x-x_0|<\delta$, ($x \neq x_0$), буде виконуватися нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$ або рівність $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Таке означення називають означенням границі функції «мовою ε-δ» (епсилон-дельта).

Зауваження 1. Якщо $f(x)$ прямує до границі A_1, а x прямує до числа x_0 так, що x набуває значень тільки **менших ніж** x_0, то пишуть $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A_1$ і A_1 називають границею функції $f(x)$ у точці x_0 **зліва** (коротко: границя зліва).

Якщо x прямує до x_0 і набуває значень тільки **більших ніж** x_0, то пишуть $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A_2$ і A_2 називають границею функції $f(x)$ у точці x_0 **справа** (границя справа).

Границю зліва і границю справа називають **однобічними границями.**

Можна довести, що коли границя зліва й границя справа існують і рівні, тобто $A_1=A_2=A$, то A і буде границею функції $f(x)$ з урахуванням наведеного вище означення. І навпаки, якщо існує границя A функції $f(x)$ у точці x_0, то існують границі функції $f(x)$ у точці x_0 зліва і справа і вони рівні.

Зауваження 2. Визначаючи границі, розглядають значення функції в околі точки x_0, тому для існування границі функції при $x\to x_0$

не обов'язково, щоб функція $f(x)$ була визначена в точці x_0.

Приклад. Довести, що $\lim\limits_{x\to 2}(3x+2)=8$ («мовою ε-δ»).

Розв'язання. Зафіксуємо довільне $\varepsilon>0$. Потрібно по ε знайти таке $\delta>0$, щоб з умови $|x-x_0|<\delta$, тобто з $|x-2|<\delta$, випливала б нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$, тобто $|(3x+2)-8|<\varepsilon$. Остання нерівність приводиться до вигляду $|3x-6|<\varepsilon$, або $3|x-2|<\varepsilon$, або $|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$. Тому, якщо взяти $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$, то з нерівності $|x-2|<\delta=\frac{\varepsilon}{3}$ повинна випливати нерівність $|(3x+2)-8|<\varepsilon$. Нерівність $|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$ можна записати таким чином: $-\frac{\varepsilon}{3}<x-2<\frac{\varepsilon}{3}$, або $2-\frac{\varepsilon}{3}<x<2+\frac{\varepsilon}{3}$. Тобто для будь-якого значення *x* з інтервалу $\left(2-\frac{\varepsilon}{3},2+\frac{\varepsilon}{3}\right)$ повинна виконуватися нерівність $|(3x+2)-8|<\varepsilon$. Перевіримо цей факт: нехай, наприклад, $x=2+\frac{\varepsilon}{6}$. Підставимо це значення *x* в останню нерівність

$$|(3x+2)-8|<\varepsilon \Rightarrow \left|\left[3\left(2+\frac{\varepsilon}{6}\right)+2\right]-8\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|6+\frac{\varepsilon}{2}+2-8\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{\varepsilon}{2}\right|<\varepsilon,$$

тобто нерівність правильна. Відповідно до означення границі функції це і означає, що $\lim\limits_{x\to 2}(3x+2)=8$.

Ми розглянули поняття границі функції в точці: тобто число *A* є границею функції $y=f(x)$ у точці x_0, якщо з наближенням аргументу *x* до x_0 ($x\to x_0$) значення функції *y* необмежено наближаються до *A*. Але існують випадки, коли *x* прямує до нескінченності, а *y* до *A*, або $x\to x_0$, а $y\to\infty$ і т. д. Розглянемо деякі з них.

Означення. Число *A* називається границею функції $y=f(x)$ при $x\to\infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке число $M>0$, що для всіх значень $|x|>M$ буде виконуватися нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$, тобто $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ (приклад на рис. 44).

Означення. Функція $y=f(x)$ прямує до нескінченності при $x\to x_0$, якщо для кожного достатньо великого додатного числа *M* знайдеться таке δ, що для всіх значень *x*, які задовольняють нерівності $|x-x_0|<\delta$, буде виконуватися нерівність $|f(x)|>M$ (приклад на рис. 45).

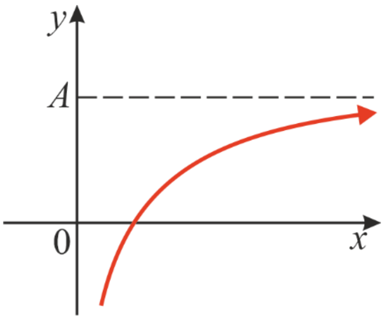


Рис. 44

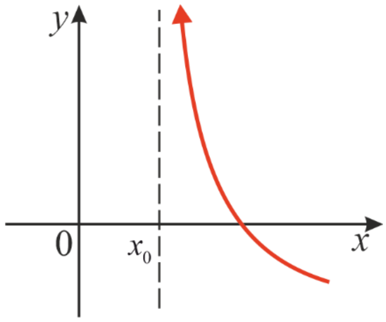


Рис. 45

У цьому випадку функцію називають **нескінченно великою** і записують так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

Якщо функція $y=f(x)$ прямує до нескінченності при $x\to x_0$ і при цьому набуває тільки додатних значень, то пишуть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, а якщо функція набуває тільки від'ємних значень, то пишуть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

Аналогічно можна сформулювати означення границі функції, коли $f(x)\to\infty$ і $x\to\infty$. В окремих випадках може бути $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Зауваження. Зовсім не обов'язково, щоб функція $y=f(x)$ кудись прямувала, коли $x\to x_0$ або $x\to\infty$. Наприклад, функція $y=\sin x$, коли $x\to\infty$! (або $x\to-\infty$) не прямує ні до числа, ні до нескінченності, тобто **границі не має**.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що таке однобічні границі (границі зліва і справа)? Як вони пов'язані з границею функції?
2. Чи потрібно в разі означення границі функції в точці x_0 існування функції в цій точці?
3. Яке число ми вибираємо спочатку: ε чи δ?
4. Дайте геометричне тлумачення границі функції.
5. Сформулюйте означення границі функції $y=f(x)$ при $x\to x_0$ («мовою послідовностей» і «мовою ε-δ»).
6. Сформулюйте означення границі функції, коли $y\to A$, а $x\to\infty$.
7. Що таке нескінченно велика функція? Наведіть геометричну ілюстрацію.

9. НЕСКІНЧЕННО МАЛІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

Означення. Функція $y=f(x)$ називається **нескінченно малою**, коли $x\to x_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке $\delta>0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x-x_0|<\delta$, буде виконуватися нерівність $|f(x)| < \varepsilon$.

Цей факт можна записати так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Аналогічне означення можна сформулювати й для $x \to \infty$.

Зауважимо, що наведене означення подібне до означення границі функції з тією лише різницею, що $A = 0$.

Наведемо ще одне означення нескінченно малої функції (спрощене): функція $y = f(x)$ називається **нескінченно малою**, якщо її границя дорівнює нулю (коли $x \to x_0$ або $x \to \infty$), тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Нескінченно малі функції будемо позначати таким чином: $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$,…

Наголосимо, що, наприклад, функцію $\alpha(x) = \dfrac{1}{x}$ не можна назвати нескінченно малою доти, поки не буде вказано, куди прямує аргумент *x*. У цьому випадку потрібно, щоб $x \to \infty$ або $x \to -\infty$, тоді $\alpha(x) = \dfrac{1}{x} \to 0$ і буде нескінченно малою функцією (рис. 46). А функція $\beta(x) = (x-3)^2$ буде нескінченно малою тільки тоді, коли $x \to 3$(рис. 47).

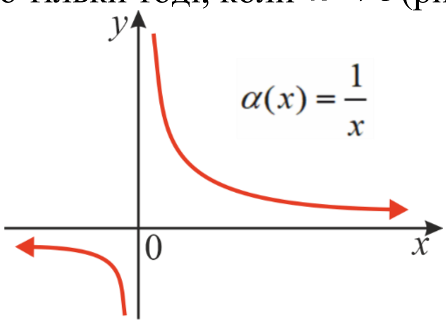


Рис. 46

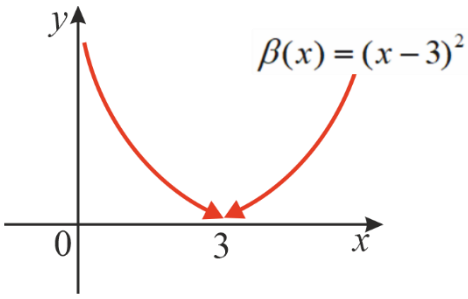


Рис. 47

Зауваження. Все, що було сказано про термін «нескінченно малі послідовності» повністю стосується терміна «нескінченно малі функції».

Теореми про нескінченно малі функції

1. Для того щоб число *A* було границею функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$ (або $x \to \infty$) необхідно й достатньо, щоб різниця $f(x) - A$ була нескінченно малою функцією. Тобто якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то $f(x) - A = \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція.

Навпаки, якщо $f(x) - A = \alpha(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Доведення. Нехай $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, тоді за означенням границі функції, починаючи з деякого моменту, буде виконуватися нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначимо $f(x)-A=\alpha(x)$, тоді $|\alpha(x)|<\varepsilon$ і за означенням $\alpha(x)$ буде нескінченно малою функцією.

Навпаки: нехай $f(x)-A=\alpha(x)$. Тоді всі значення $\alpha(x)$, починаючи з деякого, будуть задовольняти нерівність $|\alpha(x)|<\varepsilon$, або $|f(x)-A|<\varepsilon$. А із цієї нерівності випливає рівність $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

2. Якщо функція $\alpha(x)$ прямує до нуля при $x\to x_0$ (або $x\to\infty$) і не перетворюється в нуль, то функція $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ буде прямувати до нескінченності.

Доведення. Якщо функція $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$ (або $x\to\infty$), то, починаючи з деякого значення, буде виконуватися нерівність $|\alpha(x)|<\varepsilon$. Тоді $\dfrac{1}{|\alpha(x)|}>\dfrac{1}{\varepsilon}$. Позначимо $\dfrac{1}{\varepsilon}=M$. Тобто, починаючи з деякого значення, буде виконуватись нерівність $\dfrac{1}{|\alpha(x)|}>M$, а тоді за означенням функція $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ буде прямувати до нескінченності.

3. Сума скінченого числа нескінченно малих функцій є нескінченно мала функція.

Доведення. Виконаємо доведення для двох функцій.

Нехай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі, коли $x\to x_0$ (або $x\to\infty$). Доведемо, що їхня сума $\gamma(x)=\alpha(x)+\beta(x)$ буде теж нескінченно малою функцією при $x\to x_0$.

Оскільки $\alpha(x)$ нескінченно мала функція, то для $\dfrac{\varepsilon}{2}>0$ знайдеться таке число $\delta_1>0$, що щойно $|x-x_0|<\delta_1$, буде виконуватися нерівність $|\alpha(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Аналогічно для $\beta(x)$ знайдеться таке число δ_2, що щойно $|x-x_0|<\delta_2$, буде виконуватися нерівність $|\beta(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Знайдемо $\min\{\delta_1,\delta_2\}$ і позначимо його через δ. Тоді, щойно $|x-x_0|<\delta$, будуть виконуватися одночасно дві нерівності: $|\alpha(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, $|\beta(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Отже,

$$|\gamma(x)|=|\alpha(x)+\beta(x)|\le|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

тобто $|\gamma(x)|<\varepsilon$ і тому $\gamma(x)$ – нескінченно мала функція.

4. Добуток нескінченно малої функції $\alpha(x)$ на обмежену функцію (при $x\to x_0$ (або $x\to\infty$)) є нескінченно мала функція.

Доведення. Якщо $f(x)$ обмежена, коли $x \to x_0$, то знайдеться такий окіл точки x_0, у якому $|f(x)| < M$. Якщо $\alpha(x)$ нескінченно мала функція при $x \to x_0$, то за означенням для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться окіл точки x_0, у якому буде виконуватися нерівність $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. Тоді

$$|\alpha(x) \cdot f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon .$$

Отже, $\alpha(x) \cdot f(x)$ – нескінченно мала функція.

Висновок 1. Добуток двох нескінченно малих функцій є нескінченно мала функція.

Зауважимо, що будь-яку нескінченно малу функцію можна вважати обмеженою функцією. Тому одну із двох нескінченно малих функцій можна розглядати як обмежену.

Цей висновок правильний і для будь-якого скінченного числа множників.

Висновок 2. Якщо $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція при $x \to x_0$ (або $x \to \infty$), а C – стала величина, то $\lim\limits_{x \to x_0} [C \cdot \alpha(x)] = 0$.

Наголосимо, що величина C завжди обмежена.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що таке нескінченно мала функція? Наведіть приклади.
2. У якому випадку функція $y = \dfrac{1}{x-5}$ буде нескінченно малою, а в якому – нескінченно великою?
3. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то як можна представити функцію $y = f(x)$ (за допомогою властивості 1)?
4. Якщо $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція, а $f(x)$ – обмежена, то чому дорівнює добуток цих функцій?

10. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ПРО ГРАНИЦЮ ФУНКЦІЇ

Розглянемо декілька функцій, які залежать від одного й того самого аргументу x, який прямує до числа x_0 (або до ∞). Зміст деяких теорем просто пояснимо (без доведення). У теоремах з доведенням будемо розглядати тільки випадок $x \to x_0$, маючи на увазі, що доведення для випадку $x \to \infty$ виконується аналогічно.

Теорема 1. Якщо функція $f(x)$ має скінченну границю A при $x \to x_0$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то функція буде обмеженою в околі точки x_0 .

Тобто існує окіл $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0, у якому виконується нерівність $|f(x)|<M$.

Теорема 2. Якщо функція має границю, то вона єдина.

Функція не може водночас прямувати до двох різних границь при $x\to x_0$ (або $x\to\infty$). Таким чином, існує два варіанти: або функція має границю і вона єдина при $x\to x_0$ $(x\to\infty)$, або функція не має границі при $x\to x_0$ $(x\to\infty)$.

Теорема 3. Границя суми скінченного числа функцій дорівнює сумі границь цих функцій.

$$\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)\right]=\lim_{x\to x_0}f_1(x)+\lim_{x\to x_0}f_2(x)+\ldots+\lim_{x\to x_0}f_n(x).$$

Доведення. Виконаємо доведення для двох функцій.

Нехай $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)=A_1$, $\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)=A_2$, де A_1 і A_2 – деякі числа. Тоді на основі теореми 1 із п. 9 можна записати:

$$f_1(x)=A_1+\alpha_1(x)\text{ і }f_2(x)=A_2+\alpha_2(x),$$

де $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ – нескінченно малі функції.

Тоді $$f_1(x)+f_2(x)=A_1+\alpha_1(x)+A_2+\alpha_2(x)=A_1+A_2+\alpha_1(x)+\alpha_2(x), \tag{3}$$

де A_1+A_2 – стала величина, яку позначимо через A, $\alpha_1(x)+\alpha_2(x)$ – сума двох нескінченно малих функцій і тому теж нескінченно мала функція (теорема 3, п. 9), позначимо її через $\alpha(x)$, а суму двох функцій $f_1(x)+f_2(x)$ позначимо через $f(x)$. Тоді рівність (3) можна записати у вигляді $f(x)=A+\alpha(x)$.

Знову скористаємося теоремою 1 із п. 9 і одержимо

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

Повернемося до початкових позначень і закінчимо доведення:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x)+f_2(x)\right]=A=A_1+A_2=\lim_{x\to x_0}f_1(x)+\lim_{x\to x_0}f_2(x).$$

Приклад. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left[\sin\frac{x}{2}+\cos x\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin\frac{x}{2}+\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x=\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Теорема 4. Границя добутку скінченного числа функцій дорівнює добутку границь цих функцій.

Доведення. Нехай $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)=A_1$, $\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)=A_2$.

Тоді за теоремою 1 п. 9 будемо мати (уже не так докладно, як у теоремі 3):

$$f_1(x)\cdot f_2(x)=(A_1+\alpha_1(x))\cdot(A_2+\alpha_2(x))=$$
$$=A_1\cdot A_2+A_1\cdot\alpha_2(x)+A_2\cdot\alpha_1(x)+\alpha_1(x)\cdot\alpha_2(x)=A+\alpha(x),$$

де $A_1\cdot A_2=A$ – стала величина, а $A_1\cdot\alpha_2(x)+A_2\cdot\alpha_1(x)+\alpha_1(x)\cdot\alpha_2(x)$ – сума нескінченно малих функцій, яку ми позначили через $\alpha(x)$. Тоді

$$\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right]=A=A_1\cdot A_2=\lim_{x\to x_0}f_1(x)\cdot\lim_{x\to x_0}f_2(x).$$

Приклад. $\lim\limits_{x\to-2}\left[3^x\cdot x^2\right]=\lim\limits_{x\to-2}3^x\cdot\lim\limits_{x\to-2}x^2=3^{-2}\cdot(-2)^2=\frac{4}{9}$**.**

Із теореми 4, як наслідок, можна одержати таке твердження:

Сталий множник можна виносити за знак границі.

Дійсно, границя сталої дорівнює самій сталій: $\lim C=C$. Тоді,

$$\lim_{x\to x_0}\left[C\cdot f(x)\right]=\lim_{x\to x_0}C\cdot\lim_{x\to x_0}f(x)=C\cdot\lim_{x\to x_0}f(x).$$

Приклад. $\lim\limits_{x\to4}(8\cdot\sqrt{x})=8\cdot\lim\limits_{x\to4}\sqrt{x}=16$**.**

Теорема 5. Границя частки двох функцій дорівнює частці границь цих функцій, якщо границя знаменника не дорівнює нулю.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)},\quad \lim_{x\to x_0}f_2(x)\neq0.$$

Доведення аналогічне доведенням теорем 3 і 4.

Приклад. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{3-4x}{x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to-1}(3-4x)}{\lim\limits_{x\to-1}(x-1)}=\frac{\lim\limits_{x\to-1}3-4\lim\limits_{x\to-1}x}{\lim\limits_{x\to-1}x-\lim\limits_{x\to-1}1}=\frac{3-4\cdot(-1)}{(-1)-1}=-\frac{7}{2}$**.**

Теорема 6. Якщо для відповідних значень трьох функцій $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$ виконуються нерівності $f_1(x)\le f_2(x)\le f_3(x)$, причому $f_1(x)$ і $f_3(x)$ прямують до однієї границі *A*, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f_3(x)=A$, то і функція $f_2(x)$ буде теж прямувати до границі *A*, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)=A$.

Теорема 7. Якщо функція $f(x)$ прямує до границі *A* і набуває невід'ємних значень ($f(x)\ge0$), то і A буде невід'ємним числом.

Доведення. Нехай, навпаки, $A<0$. Тоді, враховуючи, що A – границя функції, **з деякого моменту** повинна виконуватися нерівність $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$ (тобто $\left|f(x)-A\right|\to0$). А з іншого боку, $\left|f(x)-A\right|\ge\left|A\right|$ – тобто модуль різниці $\left|f(x)-A\right|$ більше числа $|A|$. Це означає, що різниця $f(x)-A$ не прямує до A. Це суперечить умові теореми. Отже, $A\ge0$.

Аналогічно можна довести, що коли $f(x)\to A$ і $f(x)\le0$, то і $A\le0$.

Теорема 8. Якщо між відповідними значеннями функцій $f_1(x)$ і $f_2(x)$, які прямують до границь (при $x\to x_0$), виконується нерівність $f_1(x)\le f_2(x)$, то $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)\le\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)$.

Доведення. За умовою теореми $f_1(x)\le f_2(x)$ або $f_2(x)-f_1(x)\ge0$. Тоді, за теоремою 7

$$\lim_{x\to x_0}[f_2(x)\text{-}f_1(x)]\ge 0 \text{ або } \lim_{x\to x_0} f_2(x)\text{-}\lim_{x\to x_0} f_1(x)\ge 0$$

і, нарешті, $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)\ge \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)$.

Теорема 9. Якщо функція $f(x)$ зростаюча й обмежена зверху (тобто $f(x)<M$) при $x\to x_0$, то вона має границю $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, де $A\le M$.

Аналогічне твердження маємо і для спадної, обмеженої знизу функції.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Чому дорівнює границя сталої величини?
2. Чи може функція мати дві границі при $x\to x_0$?
3. Чи може функція не мати границі при $x\to x_0$ (або $x\to\infty$)? Якщо так, то наведіть приклад.
4. Сформулюйте теорему про границю суми функцій і доведіть її.
5. Якими теоремами з п. 9 ми користуємося в доведенні теорем із п. 10?

11. ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ

Нагадаємо(скорочено) теореми, якими будемо користуватися:

1. $\lim\limits_{x\to a} C=C,$ тут C – стала.

2. $\lim\limits_{x\to a} Cf(x)=C\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Такі теореми наявні, коли границі функцій існують і скінчені, тобто $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A,\ \ \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B,$ A і B – числа.

3. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm\varphi(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$.

4. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$.

5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\ne 0$.

6. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}$.

Крім того, будемо користуватися тим, що для всіх елементарних функцій (у будь-якій точці області їх визначення) справедлива рівність:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f\left(\lim_{x\to a} x\right).$$

А тепер розглянемо декілька випадків, які трапляються при обчисленні границь:

1) Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{c}{f(x)}=0$. Нагадаємо(скорочено) таку теорему :

Якщо $f(x)$– нескінченно велика функція, то $\dfrac{1}{f(x)}$ – нескінченно мала функція, і навпаки. Тобто в **символічному** вигляді $\dfrac{c}{\infty}=0$.

2) Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{c}{f(x)}=\infty$. Тобто **в символічному** вигляді $\dfrac{c}{0}=\infty$.Ще раз нагадуємо, що знаменник тільки прямує до нуля!

3) Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, а $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=0$. **Символічно** $\dfrac{0}{\infty}=0$.

4) Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, а $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty$.**Символічно** $\dfrac{\infty}{0}=\infty$.

Тобто, знаходження границь(**у простих випадках**) зводиться до підстановки в приклад граничного значення аргументу.

Розв'язання прикладів

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-7x+5)$.

Розв'язання. Цей приклад ми розберемо максимально докладно:

$\lim\limits_{x\to 2} 2x^2 = 2\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 2\cdot 4 = 8$;

$\lim\limits_{x\to 2} 7x = 7\lim\limits_{x\to 2} x = 7\cdot 2 = 14$;

$\lim\limits_{x\to 2} 5 = 5$.

Тоді: $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-7x+5) = 8-14+5=-1$.

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+2}{3x^2-x+4}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}(x^3+2)=2$; $\lim\limits_{x\to 0}(3x^2-x+4)=4$.

Тоді: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+2}{3x^2-x+4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x\to 4}(2x)^{x^2-14}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 4}(2x)=8$; $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-14)=2$.

Тоді $\lim\limits_{x\to 4}(2x)^{x^2-14}=8^2=64$.

Приклад 4. Знайти $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{x^4+2x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to \infty}(x^4+2x)=\infty$.

Тоді $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{x^4+2x}=0$, $\left(\dfrac{1}{\infty}=0\right)$.

Приклад 5. Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4}{(x-3)^2}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)^2=0$.

Тоді $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4}{(x-3)^2}=0$, $(\dfrac{4}{0}=\infty)$.

Приклад 6. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^{\frac{1}{x^2}}}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}}=\infty$.

Тоді $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^{\frac{1}{x^2}}}=0$.

А тепер, без нумерації прикладів, розглянемо ще декілька випадків дуже важливих границь. Але для цього потрібно **спочатку** переглянути графіки відповідних функцій. Після перегляду робимо висновок, що:

$\lim\limits_{x\to\infty}e^x=\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$; $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\infty$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=\infty$; $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to\infty}arctgx=\dfrac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}arctgx=-\dfrac{\pi}{2}$.

Таким чином, у розглянутих прикладах знаходження границі зводилося до підстановки граничного значення аргументу в заданий вираз. Але в інших випадках така підстановка призводить до виразів виду $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$ тощо. Такі вирази називаються **невизначеностями,** і наступний розділ саме про них.

12. НЕВИЗНАЧЕНІ ВИРАЗИ ТА ЇХНІ РОЗКРИТТЯ

Для спрощення засвоєння подальшого матеріалу повернемося до числових послідовностей. Нехай $x_n\to a$, $y_n\to b$, де a і b – числа або нескінченності (нагадаємо, що n набуває значень 1, 2, 3, 4,…). Розглянемо дріб $\dfrac{x_n}{y_n}$ і різні випадки граничних значень a і b, тобто $\dfrac{x_n}{y_n}\to\dfrac{a}{b}$.

Декілька фактів ми повторимо з попереднього 10 розділу.

Якщо, наприклад, $a=0$, а $b=4$, то $\dfrac{x_n}{y_n}\to\dfrac{0}{4}=0$. Тобто взагалі, якщо чисельник дробу прямує до нуля, а знаменник до деякого числа $(b\neq 0)$, то дріб буде прямувати до нуля.

Розглянемо тепер випадок, коли $a\neq 0$, а $b=0$, тобто $y_n\to 0$. Зауважимо, що y_n **не набуває значень, які дорівнюють нулю**. Наприклад, нехай $a=5$. Тоді за великих значень n чисельник x_n дробу $\frac{x_n}{y_n}$ буде майже дорівнювати 5, а знаменник y_n буде достатньо близьким до нуля (**але не рівним нулю!).**

Зрозуміло, що дріб буде збільшуватись. Тобто якщо чисельник дробу прямує до границі (яка не дорівнює нулю), а знаменник прямує до нуля, то сам дріб буде прямувати до нескінченності: $x_n \to a$ $(a \neq 0)$ і $y_n \to 0$, то $\frac{x_n}{y_n} \to \infty$.

А тепер перейдемо до випадку, коли і $x_n \to 0$, і $y_n \to 0$. Почнемо з прикладів:

1. Нехай $x_n = \frac{1}{n^2}, y_n = \frac{1}{n}$. Зрозуміло, що $x_n \to 0$ і $y_n \to 0$. **Дріб** $\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ теж **прямує до нуля**.

2. Нехай $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n^2}$, тоді **дріб** $\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n} = n$ буде **прямувати до нескінченності**.

3. Нехай $x_n = \frac{4}{n}, y_n = \frac{1}{n}$, $\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{4}{n}}{\frac{1}{n}} = 4$ – **дріб прямує до сталої величини**.

4. Нехай $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, $\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{1}{n}} = (-1)^n$ – **дріб не має границі**. Дійсно, коли n – парне $(-1)^n = 1$, а коли n – непарне $(-1)^n = -1$.

Таким чином, ми бачимо, що коли $x_n \to 0$ і $y_n \to 0$, дріб $\frac{x_n}{y_n}$ може прямувати до **різних границь** або зовсім не мати границі.

Означення. Дріб, у якого чисельник і знаменник є змінні, які прямують до нуля, називається **невизначеністю виду** $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

Відшукання границі такого дробу або встановлення її відсутності називається **розкриттям** невизначеності виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

Крім невизначеності $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ існує ще шість видів невизначеностей:

$$\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}, \{0 \cdot \infty\}, \{\infty - \infty\}, \left\{1^{\infty}\right\}, \left\{0^{0}\right\}, \left\{\infty^{0}\right\}.$$

Наприклад, невизначеністю $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ називається вираз $\dfrac{x_n}{y_n}$, де $x_n \to \infty$ і $y_n \to \infty$. А невизначеність виду $\{\infty^0\}$ – це вираз $x_n^{y_n}$, де $x_n \to \infty$, а $y_n \to 0$.

Часто студенти до невизначеностей відносять і такі випадки: $\dfrac{0}{\infty}, \dfrac{\infty}{0}, \infty \cdot \infty, \dfrac{c}{\infty}, \dfrac{\infty}{c}$ і т. д. Однак у перелічених випадках можна зразу записати відповідь. Наприклад, $\dfrac{0}{\infty}$ означає, що $x_n \to 0$, а $y_n \to \infty$, а дріб $\dfrac{x_n}{y_n} \to 0$.

Аналогічно:

$$\frac{\infty}{0}: \quad x_n \to \infty, \quad y_n \to 0, \quad \frac{x_n}{y_n} \to \infty;$$

$$\infty \cdot \infty: \quad x_n \to \infty, \quad y_n \to \infty, \quad x_n \cdot y_n \to \infty;$$

$$\frac{c}{\infty}: \quad x_n \to c, \quad y_n \to \infty, \quad \frac{x_n}{y_n} \to 0;$$

$$\frac{\infty}{c}: \quad x_n \to \infty, \quad y_n \to c, \quad \frac{x_n}{y_n} \to \infty.$$

Тому потрібно чітко засвоїти, що невизначеностей тільки **сім** і головне – вивчити їх!

Зауваження: числові послідовності (тобто функції цілочислового аргументу) є окремим випадком функцій вигляду $y=f(x)$. Увесь матеріал, який ми тільки що розглянули для числових послідовностей, цілком можна застосовувати й для функцій загального вигляду.

Розв'язання прикладів

1. Невизначеність виду $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, яка задана відношенням двох многочленів.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+3x^2-5x+1}{4x^3+7}$.

Розв'язання. Підставимо значення границі $x=\infty$ в чисельник і знаменник.

Одержимо невизначеність $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.

Розділимо чисельник і знаменник дробу на x^3. Тоді

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2-5x+1}{4x^3+7} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^3+3x^2-5x+1}{x^3}}{\frac{4x^3+7}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}-\frac{5x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{7}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{4+\frac{7}{x^3}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{зауважимо, що дроби } \frac{3}{x}, \frac{5}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{7}{x^3} \\ \text{прямують до } 0 \end{array} \right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Застосований метод має загальний характер.

Рекомендуємо запам'ятати правило.

Правило. Для того щоб розкрити невизначеність виду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ коли $x \to \infty$, яка задана відношенням двох многочленів, потрібно чисельник і знаменник дробу **розділити** на x^k, де k – **найвищий степінь змінної *x*,** яка входить до прикладу.

Зазначимо, що це правило можна застосовувати і для ірраціональних функцій, аби тільки в прикладі була невизначеність $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, а $x \to \infty$.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+x^3-1}}{x^2+2x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4+x^3-1}}{x^2+2x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{у цьому випадку } k=2, \text{ тому розділимо} \\ \text{чисельник і знаменник на } x^2 \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^4+x^3-1}}{x^2}}{\frac{x^2+2x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^4+x^3-1}{x^4}}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^4}}}{1+\frac{2}{x}} = 1.$$

2. Невизначеність виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, яка задана відношенням двох многочленів.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-1}{x+3} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Тобто в прикладах такого типу завжди існує так званий «критичний множник» (у нашому випадку це $x-3$), який потрібно вилучити й скоротити.

Правило. Щоб розкрити невизначеність виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, яка задана відношенням двох многочленів (причому $x \to x_0$), потрібно в чисельнику і знаменнику дробу вилучити «критичний множник» $x-x_0$ і скоротити на нього.

Зауваження. «Критичний множник» $x-x_0$ обов'язково вилучається і в чисельнику, і в знаменнику, оскільки значення $x = x_0$ є коренем обох многочленів, а тому ці многочлени за теоремою Безу діляться на $x - x_0$ без залишку.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^2 + x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{Тут "критичний множник" } x+1\text{. У чисельнику знай-}\\ \text{демо корені, а в знаменнику згрупуємо доданки.}\end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x^2(x+2) - (x+2)} = \lim_{x\to -1} \frac{2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x+2)\left(x^2-1\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x+2)(x-1)(x+1)} =$$

$$= 2\lim_{x\to -1} \frac{x-\frac{1}{2}}{(x+2)(x-1)} = 2\cdot \frac{-1-\frac{1}{2}}{(-1+2)(-1-1)} = \frac{3}{2}.$$

3. Невизначеність виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, у якій є ірраціональність.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+6x} - 4}{x^2 - 2x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+6x} - 4}{x^2 - 2x} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} =$

$$= \left\{\begin{array}{c}\text{УВАГА!}\\ \text{Метод вилучення "критичного множника" тут не підходить, оскільки для}\\ \text{ірраціонпльних виразів теорема Безу не застосовується. У цьому випадку}\\ \text{помножимо чисельник і знаменик на спряжений множник}\end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x^2+6x} - 4\right)\left(\sqrt{x^2+6x} + 4\right)}{\left(x^2 - 2x\right)\left(\sqrt{x^2+6x} + 4\right)} = \left\{\begin{array}{l}\text{У чисельнику отримали різницю}\\ \text{квадратів: } (a-b)(a+b) = a^2 - b^2\end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2 + 6x - 16}{x(x-2)\left(\sqrt{x^2+6x} + 4\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+8)(x-2)}{x(x-2)\left(\sqrt{x^2+6x} + 4\right)} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\text{Як бачимо, "критичний множник" таки з'явився, але після того, як ми звільнились}\\ \text{від ірраціональності в чисельнику. Наголосимо, що ірраціональність у знаменнику}\\ \text{нам не заважає, тобто вона не прямує до нуля, коли } x \to 2.\end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x+8}{x\left(\sqrt{x^2+6x}+4\right)} = \frac{10}{2 \cdot 8} = \frac{5}{8}.$$

Правило. Щоб розкрити невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, у якій є ірраціональний вираз, потрібно відповідним чином звільнитися від ірраціональності.

Нагадуємо: ми розглянули три методи розкриття невизначеностей. Слід запам'ятати, що метод ділення чисельника й знаменника на x^k застосовується для розкриття невизначеностей $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, коли $x \to \infty$. Метод вилучення «критичного множника» застосовується для розкриття невизначеності $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, коли $x \to x_0$, причому ні в чисельнику, ні в знаменнику немає ірраціонального виразу, який перетворюється в нуль при $x = x_0$. Якщо ж така ірраціональність є й ми маємо невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, то відповідним чином потрібно звільнитися від ірраціональності.

Ці методи НЕ плутати !

4. Тригонометричні невизначеності виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Перша чудова границя.

Функція $y = \frac{\sin x}{x}$ невизначена при $x = 0$, оскільки знаменник дробу не може дорівнювати нулю. Знайдемо границю цієї функції при $x \to 0$.

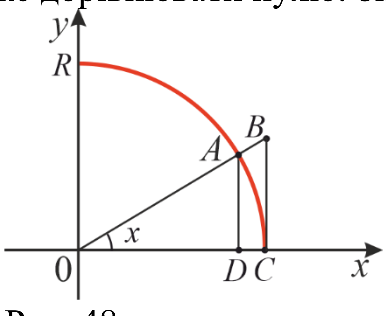


Рис. 48

Візьмемо коло радіусом R і позначимо радіанну міру кута AOC через x (нагадаємо, що радіаном називається центральний кут, який спирається на дугу, яка дорівнює радіусу) (рис. 48). Нехай $0 < x < \pi/2$. Проведемо дотичну до кола в точці C. Промінь OA продовжимо до перетину з дотичною. Із рисунка видно, що площа ΔBOC більша, ніж площа сектора AOC. А площа сектора, в свою чергу, більша, ніж площа ΔAOC. Знайдемо ці площі:

$$S_{\Delta AOC}=\frac{1}{2}OC\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot R\cdot R\sin x=\frac{1}{2}R^2\cdot\sin x;$$

$$S_{\text{сект. }AOC}=\frac{1}{2}\cdot OC^2\cdot x=\frac{1}{2}\cdot R^2\cdot x;$$

$$S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}\cdot OC\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot R\cdot R\,\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{2}R^2\,\mathrm{tg}\,x.$$

Порівнюючи площі трикутників і сектора, маємо нерівності (які відразу ж скоротимо):

$S_{\Delta AOC}<S_{\text{сект.}AOC}<S_{\Delta BOC}$ або $\frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}R^2\cdot x<\frac{1}{2}R^2\cdot\mathrm{tg}\,x$, або $\sin x<x<\mathrm{tg}\,x$.

Розділимо одержані нерівності на sin*x* $\left(\sin x>0\right.$, оскільки за умовою $\left.0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ і дістанемо:

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\text{ або }1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

Оскільки $\lim 1=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, то за теоремою 6, п. 10 будемо мати:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{4}$$

Зауваження. Дріб $\frac{\sin x}{x}$ є парною функцією.

Дійсно, $f(-x)=\frac{\sin(-x)}{(-x)}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}=f(x)$.

Тому той самий результат маємо й при $x<0$. Рівність (4) називається **першою чудовою границею** (графік функції див. на рис. 49).

Слід пам'ятати, що рівність (4) правильна **тільки при** $x\to 0$. Якщо, наприклад, $x\to\infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$. Дійсно, $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ не існує, але y=sin*x* функція обмежена, тобто $|\sin x|<1$, знаменник дробу прямує до нескінченності й тому весь дріб прямує до нуля.

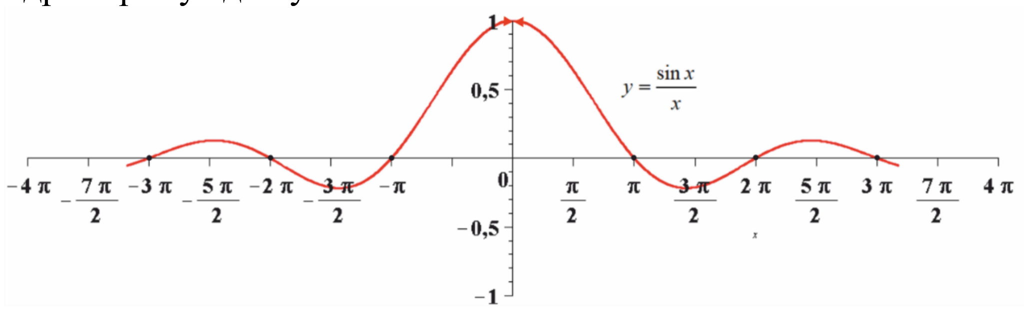


Рис. 49

Зрозуміло, що $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$. І взагалі, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}=1$, де α – деяке число. Надалі останню формулу застосовуватимемо найчастіше.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,5x}{x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,5x}{x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\cos 5x\cdot x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos 5x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{5}{\cos 5x}=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}_{=1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5}{\cos 5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 5x}=5.$$

5. Невизначеності виду $\{1^{\infty}\}$. Друга чудова границя. Число *e*.

Відомо, що коли функція зростає і обмежена зверху, то вона має границю (див. т. 9, п. 10).

Застосуємо цю теорему для числової послідовності $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Легко перевірити, що $x_1=2$; $x_2=2{,}25$; $x_3=2{,}37$; $x_4=2{,}441$; $x_5=2{,}488$. Ми бачимо, що $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5<\ldots$

Крім цього, можна довести, що для всіх n $x_n<3$.

Таким чином, послідовність зростає й обмежена зверху, тому вона має скінченну границю, тобто існує $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Означення. Границею змінної $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ називається число ***e***, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e. \qquad (5)$$

Число ***e*** – ірраціональне, воно дорівнює 2,7182818… Рекомендуємо запам'ятати: $\boxed{e\approx 2{,}72}$.

Якщо у формулі (5) зробити заміну $\dfrac{1}{n}=z$ (тоді $z\to 0$), то формула буде мати вигляд $\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e$. Можна довести, що ці формули справедливі й для змінної x.

Тобто можна записати

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left\{1^{\infty}\right\}=e,\ \text{або}\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left\{1^{\infty}\right\}=e. \qquad (6)$$

Формули (6) називають **другою чудовою границею.**

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3}=\{1^{\infty}\}=\left\{\begin{array}{c}\text{Скористаємося формулою}\\ a^{m+n}=a^m\cdot a^n\end{array}\right\}=$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3}\right]=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}_{=e}\cdot\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3}}_{=1}=e.$$

Надалі, крім формул (6), будемо використовувати й такі формули:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{\frac{x}{m}}=e,\quad \lim_{x\to 0}\left(1+mx\right)^{\frac{1}{mx}}=e.$$

Тут m – деяке число або вираз. Головне, щоб у разі підстановки границі спостерігалася невизначеність $\{1^{\infty}\}$.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що таке невизначеність виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$?
2. Перелічіть усі невизначеності.
3. Якщо $x_n\to 0$, а $y_n\to\infty$, куди прямує дріб $\frac{x_n}{y_n}$?
4. Якщо $x_n\to c$, а $y_n\to 0$, куди прямує дріб $\frac{x_n}{y_n}$?
5. Сформулюйте правило розкриття невизначеності $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.
6. Що таке «критичний множник»?
7. Запишіть першу чудову границю. Яку невизначеність розкриває ця формула?
8. Яку невизначеність розкриває друга чудова границя? Запишіть її формули.

Розв'язання прикладів

Приклад. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2-1}{x^2-5x+2}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2-1}{x^2-5x+2}=\left\{\begin{array}{l}\text{Обчислення границі зводиться}\\ \text{до підстановки граничного}\\ \text{значення аргументу}\end{array}\right\}=$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{2\cdot(-2)^2-1}{(-2)^2-5\cdot(-2)+2}=\frac{7}{16}$$

Але якщо в разі підстановки граничного значення аргументу ми одержує невизначеність, то в кожному випадку відшукання границі необхідне застосування спеціальних методів розв'язування.

В и п а д о к 1. Розкриття невизначеності виду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Розділ 1 (Найпростіші приклади)

Приклад 1. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2+2x-1}{2x^2+x+6}$.

Розв'язання. : $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^2+2x-1}{2x^2+x+6}$={Підставимо граничне значення змінної x і одержимо невизначеність}=$\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$={Найвищий степінь змінної x дорівнює 2. Тому, за правилом, розділимо чисельник і знаменник на x^2}=$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}=$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}}$={усі дроби, які ми одержали, прямують до нуля, коли $x\to\infty$, тому чисельник прямує до 7, а знаменник – до 2}= $\frac{7}{2}$.

Приклад 2.Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+3}{x^3+x^2+3x-1}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+3}{x^3+x^2+3x-1}$={ Підставимо граничне значення змінної x і одержимо невизначеність $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. У цьому прикладі найвищий степінь дорівнює 3. Тому ділимо чисельник і знаменник на x^3}= $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2}{x^3}+\frac{3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}+\frac{3x}{x^3}-\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^3}}$={Тепер чисельник прямує до нуля, а знаменник –до одиниці. А весь дріб – до нуля.}=0.

Приклад 3. Обчислити границю: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+2x+4}{x-8}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+2x+4}{x-8}$={Підставимо граничне значення змінної x і одержимо невизначеність $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Тут найвищий степінь дорівнює 3, тому розділимо чисельник і знаменник на x^3}= $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{4}{x^3}}{\frac{x}{x^3}-\frac{8}{x^3}}=\frac{5+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{\frac{1}{x^2}-\frac{8}{x^3}}$={Чисельник прямує до 5, а знаменник до нуля. А весь дріб прямує до нескінченності}= ∞.

Розділ 2

Приклад 4. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+2x^2+1}{4x^4-x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x\cdot\sqrt{x}+3}{\sqrt{x^3-2x+7}}$; 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^2}{4+7+10+...+(3n+1)}$.

Розв'язання. 1. Маємо невизначеність $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Розділимо чисельник і знаменник на x^5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5+2x^2+1}{4x^4-x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^5+2x^2+1}{x^5}}{\frac{4x^4-x}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^5}}{\frac{4}{x}-\frac{1}{x^4}}=$$

$$!=\left\{\begin{array}{l}\text{Дроби }\ \frac{2}{x^3},\frac{1}{x^5},\frac{4}{x},\frac{1}{x^4}\ \text{ прямують до нуля. Тоді чиселник прямує}\\ \text{до 3, знаменник до нуля, а весь дріб – до нескінченності.}\end{array}\right\}=\infty.$$

2. Цей приклад розв'яжемо тим самим методом. Розділимо чисельник і знаменник на $x^{3/2}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x\cdot\sqrt{x}+3}{\sqrt{x^3-2x+7}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^{3/2}+3}{x^{3/2}}}{\frac{\sqrt{x^3-2x+7}}{x^{3/2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^{3/2}}}{\sqrt{\frac{x^3-2x+7}{x^3}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^{3/2}}}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}+\frac{7}{x^3}}}=2$$

3. У цьому прикладі знаменник дробу є сумою n членів арифметичної прогресії:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)^2}{4+7+10+...+(3n+1)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\left\{S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n=\frac{4+(3n+1)}{2}n=\frac{3n+5}{2}n\right\}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6n+9}{\frac{(3n+5)\cdot n}{2}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6n+9}{3n^2+5n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{6}{n}+\frac{9}{n^2}}{3+\frac{5}{n}}=\frac{2}{3}.$$

Випадок 2. Розкриття невизначеності виду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, яка задана відношенням двох многочленів.

Розділ 1 (Найпростіші приклади)

Приклад 1. Обчислити границю:

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+6x-7}{x^2-1}=${Підставимо граничне значення змінної x і одержимо невизначеність $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Але в цьому прикладі користуватися попереднім методом недоцільно, тому що одержані дроби не будуть прямувати до нуля. Тут підходить метод виділення так званого «критичного множника». Знайти його просто: якщо змінна x прямує до 1, то критичний множник буде x-1. Виділяти його можна таким чином: знайдемо корені рівнянь $x^2+6x-7=0$ і $x^2-1=0$. У першому рівнянні корені x_1=1, x_2=-7. У другому рівнянні корені x_1=1, x_2=-1. А тепер застосуємо формулу: $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$, тут x_1 і x_2 – корені рівняння $ax^2+bx+c=0$.}= $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+7)}{(x-1)(x+1)}$={скорочуємо на критичний множник (x-1) і підставляємо граничне значення змінної x}= $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+7}{x+1}=4.$

Розділ 2

Приклад 2. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+4x+1}{x^2+3x+2}$; 2. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+4x+3}{x^4-7x^2-18}$; 3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x-2}$.

Розв'язання.

1. $$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+4x+1}{x^2+3x+2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\text{За правилом у чисельнику і в знаменнику потрібно}\\ \text{вилучити "критичний множник" } x+1\text{. Для цього}\\ \text{розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники}\\ \text{за формулою}\quad ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),\\ \text{де } x_1,x_2 \text{ - корені тричлена:} 3x^2+4x+1=3(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad x^2+3x+2=(x+1)(x+2)\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{3\cancel{(x+1)}(x+\frac{1}{3})}{\cancel{(x+1)}(x+2)}=\frac{3\cdot(-1+\frac{1}{3})}{(-1+2)}=-2.$$

2. $$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+4x+3}{x^4-7x^2-18}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\text{Тим же способом вилучаємо "критичний множник"}\\ x+3\text{. У знаменнику розв'яжемо біквадратне рівняння:}\\ x^2=t;\quad t^2-7t-18=0;\quad t_1=9, t_2=-2.\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x+1)}{(x^2-9)(x^2+2)}=\lim_{x\to -3}\frac{\cancel{(x+3)}(x+1)}{\cancel{(x+3)}(x-3)(x^2+2)}=\frac{-2}{(-6)\cdot 11}=\frac{2}{66}=\frac{1}{33}.$$

3. $$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x-2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\text{Тут "критичний множник" } x-2,\text{ оскільки } x=2\\ \text{один із коренів чисельника, тоді можна}\\ \text{поділити чисельник на множник } x-2:\end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll} \;\;x^3-3x-2 & \big|\,\underline{x-2} \\ -\underline{x^3-2x^2} & \;\;x^2+2x+1 \\ \qquad 2x^2-3x-2 & \\ \quad -\underline{2x^2-4x\qquad} & \\ \qquad\qquad\quad x-2 & \\ \qquad\qquad -\underline{x-2} & \\ \qquad\qquad\qquad 0. & \end{array}\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+1)}{x-2}=9.$$

В и п а д о к 3. Розкриття невизначеності вигляду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$, у якій є ірраціональний вираз.

Нагадуємо, що метод вилучення «критичного множника» тут застосовувати **н е м о ж н а !**

Розділ 1 (Найпростіші приклади)

Приклад 1. Обчислити границі: 1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$; 2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{1-\sqrt{x-4}}$.

Розв'язання. 1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=$ {Позбавляємося від ірраціональності в чисельнику шляхом множення чисельника і знаменника на спряжений множник $\sqrt{x+1}+2$ }$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=${у чисельнику користуємося формулою $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ }$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\dfrac{1}{4}$).

2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{1-\sqrt{x-4}}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=$ {Позбавляємося тепер від ірраціональності в знаменнику: множимо чисельник і знаменник на спряжений множник $1+\sqrt{x-4}$ }$=$ $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)\left(1+\sqrt{x+4}\right)}{\left(1-\sqrt{x+4}\right)\left(1+\sqrt{x+4}\right)}=${у знаменнику користуємося формулою $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ }$=$ $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)\left(1+\sqrt{x-4}\right)}{1-(x-4)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)\left(1+\sqrt{x-4}\right)}{5-x}=$

$$=-\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)\left(1+\sqrt{x-4}\right)}{x-5}=-\lim_{x\to 5}\left(1+\sqrt{x-4}\right)=-2.$$

Розділ 2

Приклад 2. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$; 2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8-x}-2}{x}$.

Розв'язання.

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\text{Позбавляємося ірраціональності в знаменнику}\\ \text{шляхом множення знаменнника й чисельника}\\ \text{на спряжений множник}\quad \sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}{\left(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}\right)\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}=\left\{\begin{array}{c}\text{У знаменнику застосуємо формулу}\\ (a-b)(a+b)=a^2-b^2\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}{(4+x)-(4-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}{2\cancel{x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{4+0}+\sqrt{4-0}\right)=2.$$

2. $$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\text{Тут ірраціональність наявна і в чисельнику, і в}\\ \text{знаменнику. Тому потрібно помножити чисельник}\\ \text{і знаменник на добуток}\quad \left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\overbrace{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}^{x-4}\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{\underbrace{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}_{(2x+1)-9}\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{\left[(2x+1)-9\right]\left(\sqrt{x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{(2x-8)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(\cancel{x-4})\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2(\cancel{x-4})\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}+3}{2\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{3+3}{2(2+2)}=\frac{3}{4}.$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8-x}-2}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\text{У чисельнику застосуємо формулу}\\ (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3.\\ \text{Нехай }\sqrt[3]{8-x}\text{-}2=a-b.\text{ Тоді домножимо}\\ \text{чисельник і відповідно знаменник}\\ \text{на }a^2+ab+b^2=\left(\sqrt[3]{8-x}\right)^2+\sqrt[3]{8-x}\cdot 2+4\\ \text{і одержимо різницю кубів }a^3-b^3=(8-x)-2^3\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{8-x}-2\right)\left[(\sqrt[3]{8-x})^2+\sqrt[3]{8-x}\cdot 2+4\right]}{x\left[(\sqrt[3]{8-x})^2+\sqrt[3]{8-x}\cdot 2+4\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{8-x}\right)^3-2^3}{x\cdot\left[(\sqrt[3]{8-x})^2+\sqrt[3]{8-x}\cdot 2+4\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8-x-8}{x\left[(\sqrt[3]{8-x})^2+\sqrt[3]{8-x}\cdot 2+4\right]}=-\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left[(\sqrt[3]{8-x})^2+\sqrt[3]{8-x}\cdot 2+4\right]}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[3]{8-x})^2+\sqrt[3]{8-x}\cdot 2+4}=-\frac{1}{2^2+2\cdot 2+4}=-\frac{1}{12}.$$

Випадок 4. Тригонометричні невизначеності виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Перша чудова границя.

Нагадаємо формули:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=1.$$

Розділ 1 (Найпростіші приклади)

Приклад 1. Обчислити границі 1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{x}$; 2. $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 4x}$; 3. $\lim_{x\to 0}\frac{tg 6x}{x}$.

Розв'язання.

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{x}$ ={Підставляємо граничне значення змінної і одержуємо невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Тут буде зручно застосувати формулу $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\alpha x}=1$, де α деяке число. До речі, ця формула найбільш поширена в цьому розділі. Для того щоб її застосувати, потрібно в знаменнику мати $9x$. Множимо знаменник, а тому й чисельник на 9}= $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x\cdot 9}{9x}=9\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{9x}=9\cdot 1=9.$

Надалі метод множення на потрібну сталу буде застосовуватися досить часто.

2. $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 4x}$ ={У цьому прикладі sin4x розташований у знаменнику, але метод множення на потрібну сталу залишається}=

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot 4}{\sin 4x\cdot 4}=\lim_{x\to 0}\frac{4x\cdot 2}{\sin 4x\cdot 4}=\frac{2}{4}\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{tg 6x}{x}$ ={Нагадаємо, що $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}$, і $\lim_{x\to 0}\cos x=1$ }=

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\cos 6x\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\cos 6x}\cdot\frac{\sin 6x\cdot 6}{x\cdot 6}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{\cos 6x}\cdot\frac{\sin 6x}{6x}=6.$$

Розділ 2

Приклад 2. Обчислити границі:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$; 2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 5x}$; 3. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos 5x-\cos 3x}$; 4. $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin\pi x}$.

Розв'язання.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{array}{c}\text{Скористаємося формулою}\\ 1-\cos 2x=2\sin^2 x.\end{array}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}=2\lim_{x\to 0}2\cdot\underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{=1}\cdot 2\cdot\underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{=1}=8.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 5x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\text{Щоб у заданому виразі виділити першу}\\ \text{чудову границю, поділимо чисельник і}\\ \text{знаменник на } x \text{ і матимемо}\end{array}\right\}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 7x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{7\cdot\overbrace{\frac{\sin 7x}{7x}}^{=1}}{5\cdot\underbrace{\frac{\sin 5x}{5x}}_{=1}}=\frac{7}{5}.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos 5x-\cos 3x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\text{У знаменнику скористаємося формулою}\\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.\end{array}\right\}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-2\sin\frac{5x+3x}{2}\sin\frac{5x-3x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-2\sin 4x\cdot\sin x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 4x}\cdot\frac{x}{\sin x}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{4x}{4\cdot\sin 4x}=-\frac{1}{8}.$$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin\pi x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left\{\begin{array}{l}\text{Щоб застосувати першу чудову границю, зробимо заміну}\\ \text{змінної: } x-1=t, \text{тоді при } x\to 1 \text{ змінна } t \text{ буде прямувати}\\ \text{до нуля: } x=t+1, 1-x^2=(1-x)(1+x)=(-t)(1+t+1)=\\ =(-t)(t+2).\end{array}\right\}=$

$$=-\lim_{t\to 0}\frac{t(t+2)}{\sin[\pi+\pi t]}=\{\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\}=-\lim_{t\to 0}\frac{t(t+2)}{-\sin\pi t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\pi}\cdot\underbrace{\frac{\pi\cdot t}{\sin\pi t}}_{=1}\cdot(t+2)=2.$$

В и п а д о к 5. Розкриття невизначеності виду $\{1^\infty\}$. Друга чудова границя.

Нагадаємо формули:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e;\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{\frac{x}{m}}=e;\quad \lim_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{mx}}=e.$$

Розділ 1(Найпростіші приклади)

Приклад 1.Обчислити границі: 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{4x}$;4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+7x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Розв'язання. По-перше, нагадаємо потрібні формули й перенумеруємо їх:

$$1)\ a^{m+n}=a^m\cdot a^n;\quad 2)\ a^{m-n}=\frac{a^m}{a^n};\quad 3)\ a^{m\cdot n}=\left(a^m\right)^n.$$

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}$ ={застосуємо першу формулу}= =

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5}=$ {отримали добуток двох границь: перша (друга чудова границя) прямує до числа е, друга- до 1}=е.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$ ={застосуємо третю формулу}=$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^3=$ {у квадратних дужках маємо другу чудову границю, яка дорівнює е}=e^3.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{4x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{4x}$ ={у показнику степеня потрібно мати дріб $\frac{x}{-2}$ }={ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{\frac{x}{-2}(-8)}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{\frac{x}{-2}}\right]^{(-8)}$ ={у квадратних дужках маємо другу чудову границю}=$e^{-8}=\frac{1}{e^8}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+7x)^{\frac{1}{x^2}}$ ={Зауважимо, що тут $x\to 0$ і формула другої чудової границі дещо зміниться }=$\lim\limits_{x\to 0}(1+7x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+7x)^{\frac{1}{7x}\cdot\frac{7}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+7x)^{\frac{1}{7x}}\right]^{\frac{7}{x}}$ ={у квадратних дужках маємо другу чудову границю, тобто e }=$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{7}{x}}$ ={ $\frac{7}{x}\to\infty$ }=∞
.

Зауваження. Приклади, у яких застосовується друга чудова границя, потребують використання однієї з двох формул:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{m}{x}\right)^{\frac{x}{m}}=e,\qquad \lim_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{1}{mx}}=e.$$

Якщо їх уважно розглянути – можна зробити висновок: **у дужках** обов'язково наявна складова **1+,** а далі **деякий вираз**, який прямує до нуля. Показник степеня – прямує у нескінченність і, головне, вираз у дужках і показник степеня пов'язані формулою обернено-пропорційної залежності. Наприклад, якщо в першій формулі в дужках стоїть вираз $\frac{9}{x+2}$, то в показнику степеня повинно бути $\frac{x+2}{9}$. Якщо в другій формулі в дужках $4x^2$, то в показнику степеня $\frac{1}{4x^2}$. Це правило застосовується і для більш складних прикладів.

Розділ 2

Приклад 2. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x+1}\right)^x$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-5}\right)^{3x^2-1}$;

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{x\cdot\left[\ln(5x+2)-\ln 5x\right]\right\}$; 5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(9-8x\right)^{\frac{3}{x-1}}$.

Розв'язання. 1. Переконаємося спочатку, що $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x+1}\right)=1$, а $\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$. Тобто, наявна невизначеність $\left\{1^\infty\right\}$. Перетворимо вираз так, щоб скористатися другою чудовою границею.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x+1}\right)^x=\left\{1^\infty\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-3)}{2x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{(-3)}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-3}\cdot\frac{-3}{2x+1}\cdot x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-3x}{2x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x}{2x+1}}=e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{2+\frac{1}{x}}}=e^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{e^3}}=\frac{1}{e\cdot\sqrt{e}}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}=\left\{1^\infty\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\sin x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e^1=e.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-5}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{5}{x}}=1,$ тобто основа прямує до одиниці.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-5}\right)^{3x^2-1}=\left\{1^\infty\right\}=\left\{\begin{array}{l}\text{Далі можна виділити цілу частину дробу, а можна}\\ \text{додати до основи і відняти від неї одиницю.}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3}{x-5}-1^{\backslash x-5}\right)^{3x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3-x+5}{x-5}\right)^{3x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x-5}\right)^{3x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x-5}\right)^{\frac{x-5}{8}\cdot\frac{8}{x-5}\cdot\left(3x^2-1\right)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{8(3x^2-1)}{x-5}}=e^{8\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{x-5}}=e^{8\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}}=$$

$$=e^{8\cdot\infty}=e^\infty=\infty.$$

4. Спочатку спростимо вираз:

$$\ln(5x+2)-\ln 5x=\left\{\ln x-\ln y=\ln\frac{x}{y}\right\}=\ln\frac{5x+2}{5x}=\ln\left(1+\frac{2}{5x}\right).$$

Тепер перейдемо до розв'язування прикладу:

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{x\cdot\left[\ln(5x+2)-\ln 5x\right]\right\}=\left\{\begin{array}{l}\text{У квадратних дужках маємо}\\ \text{невизначеність виду}\{\infty-\infty\}\end{array}\right\}=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\ln\left(1+\frac{2}{5x}\right)=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Використаємо властивість}\\ a\cdot\ln x=\ln x^{a}\end{array}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{2}{5x}\right)^{x}=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{5x}\right)^{x}=\{1^{\infty}\}=$$

$$=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{5x}\right)^{\frac{5x}{2}\cdot\frac{2}{5x}\cdot x}=\ln\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{2x}{5x}}=\ln e^{\frac{2}{5}}=\frac{2}{5}\ln e=\frac{2}{5},\ \text{оскільки}\ \ln e=1.$$

5. Знайдемо границі основи функції і показника функції:

$$\lim_{x\to1}\left(9-8x\right)=1,\quad \lim_{x\to1}\frac{3}{x-1}=\infty.$$

Маємо невизначеність $\{1^{\infty}\}$. Але для того щоб скористатися другою чудовою границею, потрібно, щоб $x\to\infty$ або $x\to0$. Тому зробимо заміну: $x-1=t$.

$$\lim_{x\to1}\left(9-8x\right)^{\frac{3}{x-1}}=\{1^{\infty}\}=\left\{\begin{array}{l}x-1=t,\ \text{звідси}\quad x=t+1.\\ \text{Якщо}\ \ x\to1,\ \text{то}\ t\ \ \text{буде}\\ \text{прямувати до нуля.}\end{array}\right\}=\lim_{t\to0}\left[9-8(t+1)\right]^{\frac{3}{t}}=$$

$$=\lim_{t\to0}(9-8t-8)^{\frac{3}{t}}=\lim_{t\to0}(1-8t)^{\frac{3}{t}}=\left\{1^{\infty}\right\}=\lim_{t\to0}\left(1+(-8t)\right)^{\frac{1}{-8t}\cdot(-8t)\cdot\frac{3}{t}}=\lim_{t\to0}e^{\frac{-24\cancel{t}}{\cancel{t}}}=$$

$$=e^{-24}=\frac{1}{e^{24}}.$$

Випадок 6. Розкриття невизначеності виду $\{\infty-\infty\}$.

Приклад. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to-2}\left[\frac{1}{2+x}-\frac{12}{8+x^{3}}\right]$; 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^{2}+1}-x\right)$.

Розв'язання. 1. Різницю приведемо до спільного знаменника.

$$\lim_{x\to-2}\left[\frac{1}{2+x}-\frac{12}{8+x^{3}}\right]=\left\{\infty-\infty\right\}=\lim_{x\to-2}\left[\overset{4-2x+x^{2}\,/}{}\ \frac{1}{2+x}-\frac{12}{8+x^{3}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{4-2x+x^{2}-12}{(2+x)(4-2x+x^{2})}=\lim_{x\to-2}\frac{x^{2}-2x-8}{(2+x)(4-2x+x^{2})}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Вилучимо "критичний}\\ \text{множник"}\quad x+2\end{array}\right\}=\lim_{x\to-2}\frac{\cancel{(x+2)}\,(x-4)}{\cancel{(2+x)}\,(4-2x+x^{2})}=\lim_{x\to-2}\frac{x-4}{4-2x+x^{2}}=$$

$$=\frac{-2-4}{4+4+4}=-\frac{1}{2}.$$

$$2.\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\{\infty-\infty\}=\left\{\begin{array}{l}\text{Будемо розглядати задану функцію як дріб із}\\ \text{знаменником, який дорівнює одиниці.}\\ \text{Позбавимося від ірраціональності}\\ \text{в чисельнику шляхом множення чисельника і}\\ \text{знаменника на спряжений множник } \sqrt{x^2+1}+x.\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Невизначеності немає;}\\ \text{знаменник прямує до нескінченності.}\end{array}\right\}=0.$$

Зауваження. Розкриття останніх трьох невизначеностей $\{0\cdot\infty\}, \{0^0\}, \{\infty^0\}$ буде розглянуто в іншому розділі математики.

Приклади для самостійного розв'язання

Приклад 1. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x^2+x}{x^3-4x+1}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{2x^3+5x^2-1}}{3x-2}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-8}{\sqrt[4]{2x^6+x^4+3}}$.

Приклад 2. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3-5x^2+9x-1}{16x^3+2x+5}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}}{2x^2-5}$; 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{(n+2)^2}$.

Приклад 3. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x^2-5x-2}{x^2+3x-10}$; 2. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$; 3. $\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^4-x^2-1}{x^4-1}$.

Приклад 4. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x^2+4x+3}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{6x^2-5x+1}{8x^3-1}$; 3. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^4-2x^2+1}{x^2+x}$.

Приклад 5. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$; 3. $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}-3}$.

Приклад 6. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{8+x}-3}$; 2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2-\sqrt{x^2+4}}{x^2-3x}$;

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+9}-3}$.

Приклад 7. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\mathrm{tg}\,9x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\mathrm{tg}\,2x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\cdot\sin 2x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,x-\sin x}{x^2}$.

Приклад 8. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 9x}{x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\cdot\sin x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$.

Приклад 9. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x+2}\right)^{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-3}{3x+2}\right)^{x-1}$;

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{2}\cdot\left[\ln(x-1)-\ln x\right]$; 4. $\lim\limits_{x\to 3}\left(7-2x\right)^{\frac{2}{x-3}}$.

Приклад 10. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{4x+5}\right)^{x+1}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{3+x}$;

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x+3)\cdot\left[\ln(x+2)-\ln x\right]$; 4. $\lim\limits_{x\to 2}\left(2x-3\right)^{\frac{3x}{x-2}}$.

Приклад 11. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right]$; 2. $\lim\limits_{x\to +\infty}x\cdot\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)$.

Приклад 12. Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^3}{x^2-5}-x\right]$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

Відповіді:

Приклад 1.1. ∞; 2. $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}$; 3.0. **Приклад 2.** 1. 0,5; 2. 0; 3. 0,5.

Приклад 3. 1.1; 2. $-\dfrac{2}{3}$; 3. $\dfrac{3}{2}$. **Приклад 4.** 1. 3; 2. $\dfrac{1}{12}$; 3 0.

Приклад 5. 1. $\dfrac{1}{2}$; 2.7; 3. $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. **Приклад 6.** 1. 6; 2. 0; 3. 10; 4. 3.

Приклад 7. 1. $\dfrac{1}{9}$; 2. 2; 3. $\dfrac{1}{2}$; 4. 0. **Приклад 8.** 1. 3; 2. 0; 3. 0,5; 4. $2\cos a$.

Приклад 9. 1. e^5; 2. $e^{\frac{5}{3}}$; 3.- $\dfrac{1}{2}$; 4. e^{-4}. **Приклад 10.** 1**. ;**$\sqrt{e}$ 2. $e^{-1}=\dfrac{1}{e}$; 3. ;e^4 4. e^6.

Приклад 11. 1.1; 2. $\frac{5}{2}$. **Приклад 12.** 1. 0; 2. 0.

13. ПОРІВНЯННЯ НЕСКІНЧЕННО МАЛИХ ФУНКЦІЙ

Розглянемо дві нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$, які є функціями одного й того самого аргументу.

Означення 1. Якщо відношення $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ прямує до скінченої границі $A \neq 0$, $A \neq 1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають **нескінченно малими одного порядку**.

Приклад. Нехай $\alpha(x) = \sin 3x$, $\beta(x) = x$ і $x \to 0$. Знайдемо границю відношення:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} 3\cdot\underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{=1} = 3,\ A \neq 0.$$

Тобто $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі одного порядку.

Зауважимо, що при $x \to 0$ нескінченно малі x, $\sin mx$, $\operatorname{tg} nx$ є нескінченно малими одного порядку.

Означення 2. Якщо відношення $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ прямує до нуля, тобто якщо $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ $\left(\text{а } \lim\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \infty\right)$, то $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою вищого порядку** відносно $\beta(x)$, а $\beta(x)$ – нескінченно малою нижчого порядку відносно $\alpha(x)$.

Приклад. Нехай $\alpha(x) = (x-4)^3$, $\beta(x) = x-4$, $x \to 4$. Знайдемо границю відношення: $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-4)^3}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4}(x-4)^2 = 0$.

Тобто $\alpha(x)$ – нескінченно мала вищого порядку відносно $\beta(x)$.

Означення 3. Якщо відношення $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ прямує до одиниці, тобто якщо $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то нескінченно малі називають **еквівалентними** і пишуть $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Приклад. Нехай $\alpha(x) = \sin x$, $\beta(x) = x$, $x \to 0$.

Тоді $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, тому $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Наведемо найбільш поширені еквівалентні нескінченно малі. Якщо $x \to 0$

, то $x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$.

Зауваження. Якщо відношення $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не має границі, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ не можна порівнювати.

ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Наведіть означення нескінченно малих одного порядку.
2. У якому випадку одна нескінченно мала буде вищого порядку, ніж інша?
3. Які нескінченно малі називають еквівалентними? Наведіть приклади еквівалентних нескінченно малих функцій.

Розв’язання прикладів

Приклад. Знайти границі за допомогою еквівалентних нескінченно малих:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x(e^x-1)}$; 3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{arctg}(x-3)}{x^2-3x}$.

Розв’язання. 1. Скористаємося еквівалентністю нескінченно малих величин: $\sin x \sim x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 4x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{4x} = \frac{5}{4}.$$

2. Аналогічно $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2} = 2\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^2 \sim 2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{2}$; $e^x - 1 \sim x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x(e^x-1)} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x\cdot x} = \frac{1}{2}.$$

3. $x \sim \operatorname{arctg} x$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\operatorname{arctg}(x-3)}{x^2-3x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 3}\frac{\operatorname{arctg}(x-3)}{x(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x\cdot(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{x} = \frac{1}{3}.$$

Приклади для самостійного розв’язання

Приклад 1. Знайти границі за допомогою еквівалентних нескінченно малих:

1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\operatorname{tg} 7x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(1+x)}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\operatorname{arctg}\frac{x}{5}}$.

Приклад 2. Знайти границі за допомогою еквівалентних нескінченно малих:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2 4x}{x\cdot\ln(1+x)}$.

Приклад 3. Довести еквівалентність нескінченно малих функцій при $x \to 0$:

1. $e^{3x}-e^{4x}\sim -x$; 2. $\arcsin\frac{x}{3}\sim\frac{\operatorname{tg}2x}{6}$; 3. $\operatorname{arctg}\frac{7}{4}x\sim -\frac{7}{8}(e^{-2x}-1)$.

Відповіді:

Приклад 1. 1. $\frac{3}{7}$; 2. 2; 3. 5**.**

Приклад 2. 1. 10; 2. 16.

14. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ У ТОЧЦІ

Поняття границі функції пов'язане з іншим важливим поняттям математичного аналізу – **неперервністю** функції.

Розглянемо графік функції $y=f(x)$ на відрізку $[a,b]$ (рис. 50). Цей графік можна накреслити одним рухом олівця, без відриву від паперу. Тобто цей графік інтуїтивно можна назвати неперервним графіком.

Тепер розглянемо другий графік (рис. 51).

Його природньо назвати «розривним». Він складається з двох неперервних частин (у точці *c* доведеться відірвати олівець від паперу).

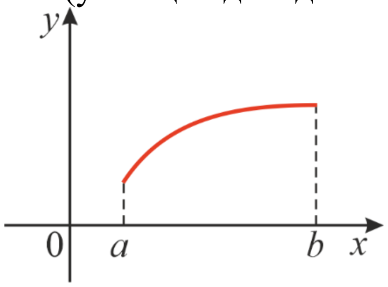


Рис.50

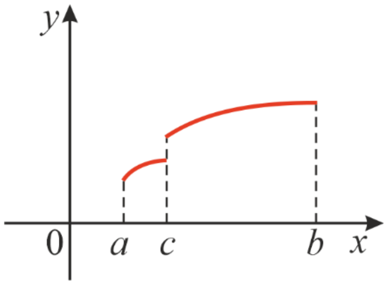


Рис.51

Після передмови перейдемо до строгого означення неперервності.

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки і нехай $y_0=f(x_0)$ (рис. 52).

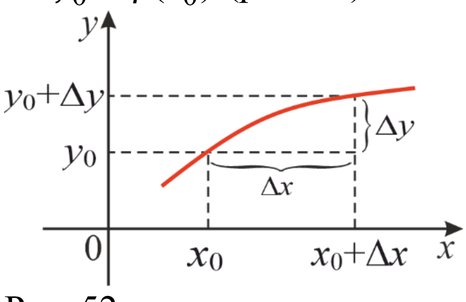


Рис. 52

Візьмемо в цьому околі близьку до x_0 іншу точку *x* і запишемо її у вигляді

$x = x_0 + \Delta x$, де Δx – число додатне або від'ємне, яке будемо називати **приростом** незалежної змінної x у точці x_0.

Знайдемо відповідне значення функції: $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$.

Звідси $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - y_0$, або $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Значення Δy будемо називати **приростом** функції $f(x)$ у точці x_0, який відповідає приросту аргументу Δx.

Тепер нехай Δx прямує до нуля. Тоді точка $x_0 + \Delta x$ буде прямувати до точки x_0 і очевидно $\Delta y \to 0$.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається **неперервною** у точці $x = x_0$, якщо вона визначена в цій точці і в деякому її околі і якщо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \tag{7}$$

тобто **нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції.**

Рівність (7) можна записати інакше:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right] = 0, \text{ або } \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0),$$

або

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{8}$$

Рівність (8) була одержана на основі того, що $x = x_0 + \Delta x$ і якщо $\Delta x \to 0$, то очевидно $x \to x_0$. Таким чином,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0).$$

Тобто для того щоб знайти границю неперервної функції при $x \to x_0$, достатньо у вираз функції підставити замість аргументу *x* його значення x_0.

Приклад. Довести, що функція $y = \sin x$ неперервна в точці x_0.

Розв'язання. Нехай $y_0 = \sin x_0$. Надамо аргументу x приріст Δx і знайдемо відповідний приріст функції Δy:

$y_0 + \Delta y = \sin(x_0 + \Delta x)$; $\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - y_0$; $\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0$.

Перетворимо різницю на добуток(за допомогою тригонометричної формули):

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\sin\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2} \cdot \cos\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Перейдемо до границі, коли $\Delta x \to 0$.

Тоді $\sin\frac{\Delta x}{2} \to 0$, а $\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \to \cos x_0$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)=0\,.$$

Тобто функція $y=\sin x$ за означенням неперервна в точці x_0.

Однобічна неперервність

Означення. Функція $y=f(x)$ називається **неперервною зліва** в точці x_0, якщо вона визначена в деякому напівінтервалі $(a,x_0]$ і

$$\lim_{x\to x_0^{-0}} f(x)=f(x_0).$$

Означення. Функція $y=f(x)$ називається **неперервною справа** в точці x_0, якщо вона визначена в деякому напівінтервалі $[x_0,b)$ і

$$\lim_{x\to x_0^{+0}} f(x)=f(x_0).$$

На основі вище розглянутих означень можна сформулювати **критерій неперервності** функції $y=f(x)$ у точці x_0:

Функція $y=f(x)$ неперервна в точці x_0 тоді й тільки тоді, коли виконуються такі умови:

1) функція визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки;

2) існують однобічні границі в точці x_0 і виконуються рівності:

$$\lim_{x\to x_0^{-0}} f(x)=\lim_{x\to x_0^{+0}} f(x)=f(x_0)\,. \qquad (9)$$

Увага!

У рівності (9) останнє значення $f(x_0)$, а не $f(x)$!.

15. ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ, НЕПЕРЕРВНИХ У ТОЧЦІ

Теорема 1. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні в точці x_0. Тоді функції $f(x)\pm\varphi(x)$, $f(x)\cdot\varphi(x)$, $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ (якщо $\varphi(x_0)\neq 0$) – також неперервні в точці x_0.

Доведемо, наприклад, неперервність суми двох функцій.

Доведення. Оскільки $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні в точці x_0, то на основі рівності (9) можна записати:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \quad \text{і} \quad \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)\,.$$

Тепер скористаємося теоремою 3 із п. 10:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)+\varphi(x)\right]=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=f(x_0)+\varphi(x_0)\,.$$

Тобто сума $f(x)+\varphi(x)$ є неперервна функція в точці x_0.

Як наслідок зауважимо, що доведення буде правильним і для будь-якої кількості скінченного числа доданків.

В окремому випадку наголосимо, що коли функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, то функція $C \cdot f(x)$, де C – деяка стала величина, буде теж неперервною в точці x_0.

Теорема 2 (про неперервність складної функції).
Нехай функція $u(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $f(u)$ неперервна в точці $u_0 = u(x_0)$. Тоді складна функція $f[u(x)]$ буде неперервною в точці x_0.

Теорема 3 (**про неперервність елементарних функцій**).
Будь-яка елементарна функція неперервна в кожній точці, у якій вона визначена.

Зазначимо, що в курсі вищої математики ми розглядаємо тільки елементарні функції

Теорема 3 дуже важлива. Зміст її в тому, що не потрібно перевіряти на неперервність функцію в **кожній** точці. Достатньо знайти область визначення функції і в **кожній точці цієї області функція буде неперервною**.

Із теорем також випливає, що функції, які одержані з елементарних за допомогою скінченного числа арифметичних операцій і операції композиції функцій, будуть теж неперервні в кожній точці своїх областей визначення.

16. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ НА ПРОМІЖКУ

Означення. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в кожній точці інтервалу (a,b), то кажуть, що функція **неперервна на цьому інтервалі**.

Означення. Функція $y = f(x)$ називається **неперервною на відрізку** $[a,b]$, якщо вона неперервна на інтервалі (a,b), неперервна справа в точці a і неперервна зліва в точці b.

17. ТОЧКИ РОЗРИВУ ФУНКЦІЇ ТА ЇХНЯ КЛАСИФІКАЦІЯ

Для визначення неперервності функції $y = f(x)$ у точці x_0 будемо користуватись критерієм неперервності (9):

$$\lim_{x \to x_0^{-0}} f(x) = \lim_{x \to x_0^{+0}} f(x) = f(x_0).$$

Точка $x = x_0$, у якій хоча б одна з умов критерію не виконується, називається **точкою розриву** функції $f(x)$, а сама функція – **розривною** в точці $x = x_0$.

17.1. Розрив I роду

Функція $y = f(x)$ має **розрив I роду** в точці x_0, якщо:

1) існують скінченні однобічні границі $\lim\limits_{x \to x_0^{-0}} f(x) = A$ і $\lim\limits_{x \to x_0^{+0}} f(x) = B$, але $A \neq B$ (рис. 53);

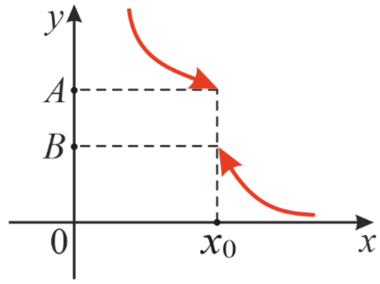


Рис. 53

2) однобічні границі існують, скінченні й рівні між собою, тобто $A = B$, але вони не дорівнюють значенню функції в точці x_0 (рис. 54);

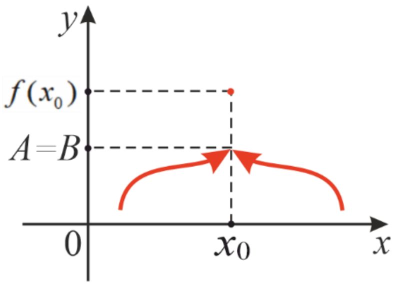


Рис. 54

3) однобічні границі існують, скінченні й рівні між собою $A = B$, але значення функції $f(x)$ у точці x_0 не визначено, тобто $f(x_0)$ – не існує (рис. 55).

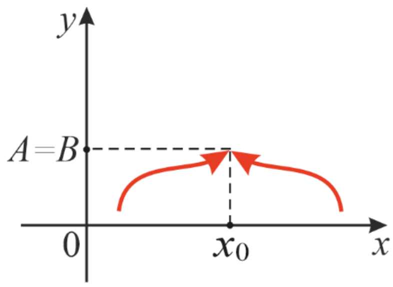


Рис.55

У першому випадку x_0 – точка **неусувного** розриву. Величину $|A - B|$ називають **стрибком** функції.

У випадках 2 і 3 точку $x = x_0$ називають точкою **усувного** розриву. Досить довизначити функцію лише в одній точці x_0, прийнявши $f(x_0) = A = B$, щоб одержати функцію, неперервну в точці x_0. Зрозуміло, що ми одержимо вже іншу функцію, але різниця між заданою функцією й одержаною буде лише в одній точці x_0.

17.2. Розрив II роду

Означення. Точка x_0 називається **точкою розриву II роду**, якщо **хоча б одна** з однобічних границь не існує або дорівнює нескінченності.

Наприклад (рис. 56-58),

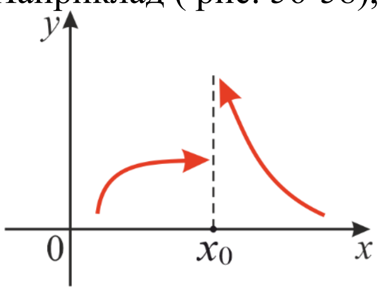


Рис.56

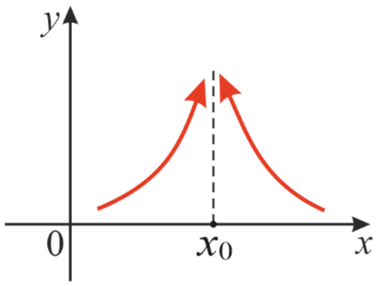


Рис.57

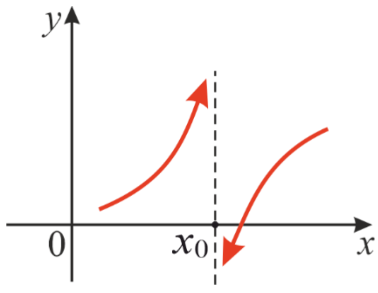


Рис.58

$\lim\limits_{x\to x_0^{+0}} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0^{-0}} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^{+0}} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0^{-0}} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^{+0}} f(x)=-\infty$

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Наведіть означення неперервності функції $y=f(x)$ в точці x_0.
2. У чому полягає правило граничного переходу для неперервної функції?
3. Що таке однобічні неперервності?
4. Сформулюйте критерій неперервності функції.
5. Сформулюйте теорему про неперервність елементарних функцій.
6. Яка функція називається неперервною на інтервалі?
7. Що таке неусувний розрив? Що таке стрибок функції?
8. Сформулюйте означення розриву II роду.

Розв'язання прикладів

Приклад 1. За допомогою означення неперервності функції в точці довести, що функція $y=4x^3$ неперервна в точці x_0.

Розв'язання. Нехай Δx приріст аргументу *x*.

Знайдемо відповідний приріст функції:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=4(x_0+\Delta x)^3-4x_0^3=$$
$$=4\left[x_0^3+3x_0^2\Delta x+3x_0\cdot\Delta x^2+\Delta x^3-x_0^3\right]=4\Delta x\left(3x_0^2+3x_0\cdot\Delta x+\Delta x^2\right).$$

Скористаємося означенням неперервності функції в точці: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[4\Delta x\left(3x_0^2+3x_0\cdot\Delta x+\Delta x^2\right)\right]=0,$ тобто функція $y=4x^3$ неперервна в точці x_0.

Приклад 2. Довести, що функція $y=x^2-3x+5$ неперервна на $(-\infty,\infty)$.

Розв'язання. Скористаємося теоремами 1 і 3, п. 15.

Функції $y_1=x^2,\ y_2=3x,\ y_3=5$ елементарні.

Область визначення цих функцій – уся числова вісь, тобто $(-\infty,\infty)$. Тому (за теоремою 3) ці функції неперервні на інтервалі $(-\infty,\infty)$. Функція $y=x^2-3x+5$ як сума неперервних функцій (теорема 1) буде теж неперервною на $(-\infty,\infty)$.

Приклад 3. Дослідити на неперервність функцію $y=\dfrac{1}{x-3}$ на інтервалі (a,b), якщо:

1) $(a,b)=(-5,2)$;

2) $(a,b)=(1,4)$.

Розв'язання.

1. За означенням функція $f(x)$ називається неперервною на інтервалі, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу. Задана функція елементарна. Область її визначення $(-\infty,3)\bigcup(3,+\infty)$. Тому функція буде неперервною в кожній точці числової осі за винятком точки $x=3$ (теорема 3, п. 15). Тому на інтервалі $(-5,2)$ функція $y=\dfrac{1}{x-3}$ буде неперервною (точка $x=3$ не належить цьому інтервалу).

2. У цьому випадку точка $x=3$ належить інтервалу $(1,4)$, тому в цій точці функція має розрив. За допомогою критерію неперервності (9) визначимо, якого виду розрив має функція $y=\dfrac{1}{x-3}$ в точці $x_0=3$.

Знайдемо границю зліва:

$$\lim_{x\to 3^{-0}}\frac{1}{x-3}=\left\{\ \underset{x\ \longrightarrow\ 3}{\longrightarrow\bullet\longrightarrow}\ \right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Різниця } x-3\to 0 \text{ і за знаком вона буде від'ємною.}\\ \text{Тобто знаменник за знаком від'ємний і прямує}\\ \text{до нуля, а увесь дріб буде прямувати до } -\infty.\end{array}\right\}=-\infty.$$

Знайдемо границю справа:

$$\lim_{x\to 3^{+0}}\frac{1}{x-3}=\left\{\ \underset{3\ \longleftarrow\ x}{\longrightarrow\bullet\longrightarrow}\ \right\}=\left\{\begin{array}{l}\text{Різниця } x-3\to 0\\ \text{за знаком додатна.}\end{array}\right\}=\infty.$$

За означенням у точці $x_0=3$ функція має розрив другого роду (значення функції в точці x=3 не існує). Зробимо схематичний рисунок поведінки функції в околі точки $x_0=3$ (рис. 65). Зауважимо, що було б достатньо знайденої границі зліва, щоб визначитись з видом розриву. Але для схематичного рисунку ми знайшли ще й границю справа.

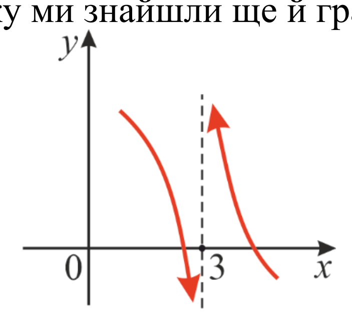


Рис. 65

Приклад 4. Дослідити на неперервність функцію. Побудувати графік.

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<2,\\ 3-x, & x\geq 2.\end{cases}$$

Розв'язання. Функція $f(x)$ на проміжку $(-\infty, 2)$ задана виразом $y_1 = x^2$, а на проміжку $[2, +\infty)$ – виразом $y_2 = 3 - x$. Функції y_1 і y_2 неперервні на усій числовій осі, а тому й на відповідних проміжках. Задана функція може мати розрив тільки в точці, де змінюється її аналітичний вираз, тобто в точці $x_0 = 2$. Дослідимо функцію в цій точці (за допомогою критерію (9)).

$$\lim_{x \to 2^{-0}} f(x) = \lim_{x \to 2^{-0}} x^2 = 4, \qquad \lim_{x \to 2^{+0}} f(x) = \lim_{x \to 2^{+0}} (3 - x) = 1.$$

Таким чином, у точці $x_0 = 2$ функція має розрив І роду. Границя зліва не дорівнює границі справа. Розрив неусувний, стрибок функції $|A - B| = 3$. Побудуємо графік функції (рис. 66).

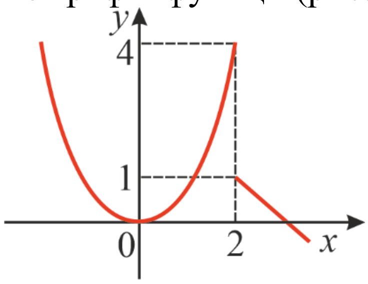


Рис. 66

Приклад 5. Дослідити на неперервність функцію $f(x) = 5^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. Область визначення цієї функції – уся дійсна вісь, за винятком **точки** $x = 0$**. Тому функція** $f(x) = 5^{\frac{1}{x}}$ **буде неперервною всюди, за винятком** точки $x_0 = 0$. Визначимо, якого роду розрив має функція в цій точці. Спочатку нагадаємо графік показникової функції $y = a^x$, $a > 1$ (рис. 67).

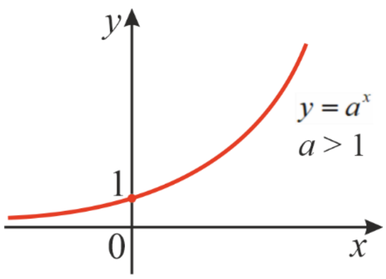


Рис. 67

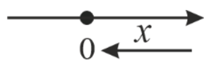
Коли аргумент $x \to +\infty$, то функція $a^x \to +\infty$.

Коли аргумент $x \to -\infty$, то функція $a^x \to 0$.

А тепер дослідимо на неперервність функцію $f(x) = 5^{\frac{1}{x}}$ за допомогою критерію (10):

$$\lim_{x \to 0^{-0}} 5^{\frac{1}{x}} = \left\{ x \to 0 \right\} = \left\{ \frac{1}{x} \to -\infty, \text{ а } 5^{\frac{1}{x}} \to 0 \right\} = 0;$$

$$\lim_{x\to 0^{+0}} 5^{\frac{1}{x}} = \left\{ \qquad \right\} = \left\{ \frac{1}{x} \to +\infty, \text{ а } 5^{\frac{1}{x}} \to \infty \right\} = \infty.$$



Зауважимо, що значення функції в точці $x_0 = 0$ не існує. Маємо розрив другого роду в цій точці. Побудуємо схематичний графік поведінки функції в околі точки $x_0 = 0$ (рис. 68).

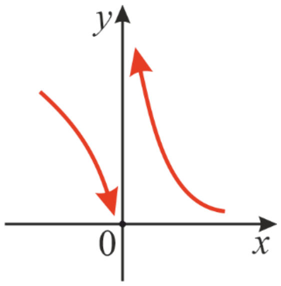


Рис. 68

Приклад. За якого значення A функція $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \le \dfrac{\pi}{4} \\ A \cdot x, & x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$ буде неперервна? Побудувати її графік.

Розв'язання. Функції $y_1 = \cos x$ і $y_2 = Ax$ неперервні на $(-\infty, \infty)$. Єдина точка, у якій може не виконуватися критерій неперервності, це точка $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Знайдемо однобічні границі й значення функції в точці $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^{-0}} \cos x = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{4}^{-0}} A\cdot x = A\cdot\frac{\pi}{4}; \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Для того щоб функція була неперервною в точці $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$, необхідно, щоб виконувались рівності: $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = A\cdot\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Звідси $A = \dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

Тільки за такого значення A функція буде неперервною. Побудуємо її графік (рис. 69).

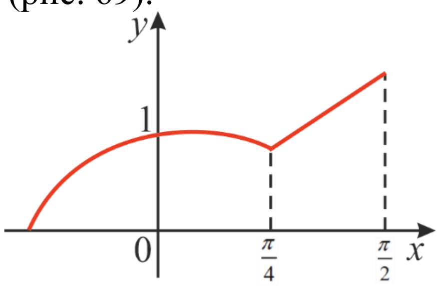


Рис. 69

Приклади для самостійного розв'язання

Приклад 1. У яких точках функції 1) $f(x)=\dfrac{1}{4+5x}$, 2) $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$, 3) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-7x}$, 4) $f(x)=\dfrac{x+7}{x^2+6x}$ будуть розривними?

Приклад 2. Дослідити на неперервність функції. Побудувати графіки функцій:

1) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{5}{2}x, & x<-2,\\ 9-x^2, & x\ge -2.\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}2+x, & x\le 0,\\ 2, & 0<x\le 1,\\ \ln x, & x>1.\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}-3x, & x\le 0\\ x^2+2, & 0<x\le 1\\ 3, & x>1.\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases}2, & x<-3\\ e^x, & x\ge -3.\end{cases}$

Приклад 3. За якого значення a функція $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\le -1,\\ x+a, & x>-1.\end{cases}$ буде неперервною? Побудувати графік функції.

Приклад 4. За якого значення A функція $f(x)=\begin{cases}2x+A, & x<\dfrac{\pi}{2},\\ \sin x, & x\ge\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ буде неперервною? Побудувати графік функції.

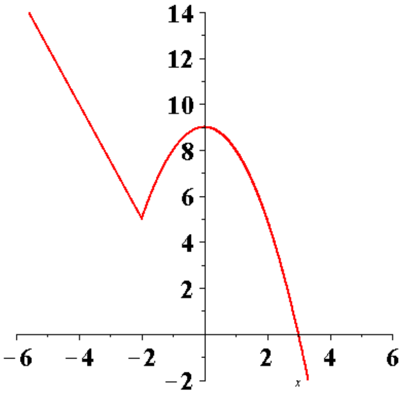
Приклад 5. Дослідити на неперервність функції. Побудувати схематичні графіки поведінки функцій в околі точок розриву:

1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x-15}$; 2) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-25}$; 3) $f(x)=e^{\frac{3}{7-x}}$; 4) $f(x)=2^{\frac{1}{7x-5}}$; 5) $f(x)=\dfrac{|5-x|}{5-x}$; 6) $f(x)=\dfrac{|3x-1|}{3x-1}$.

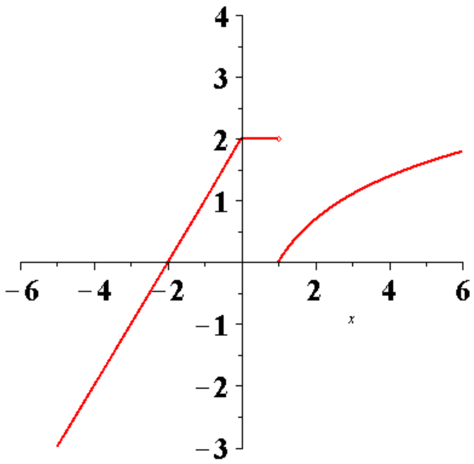
Відповіді:

Приклад 1.1)x=-0,8; 2)x=2; 3)x=0, x=7; 4)x=0, x=-6.

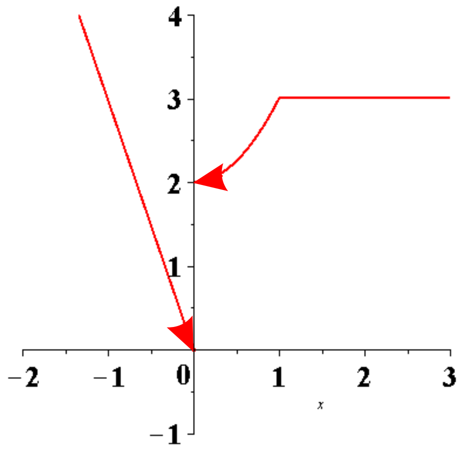
Приклад 2. 1)У точці *x*=-2 функція неперервна.



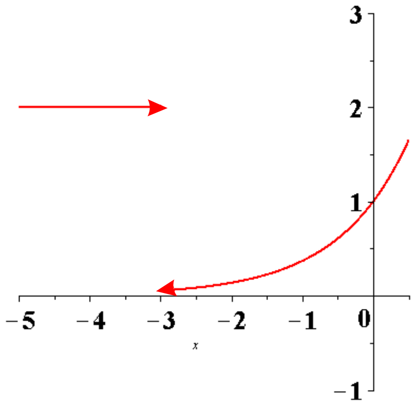
2) У точці $x=0$ функція неперервна, у точці $x=1$ функція має розрив першого роду, неусувний. Стрибок функції дорівнює 2.



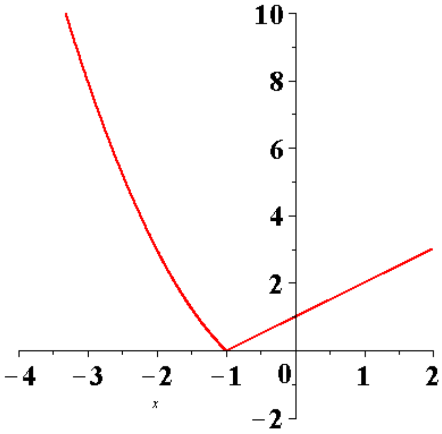
3)У точці $x = 0$ функція має розрив першого роду, неусувний. Стрибок дорівнює 2. У точці $x = 1$ функція неперервна.



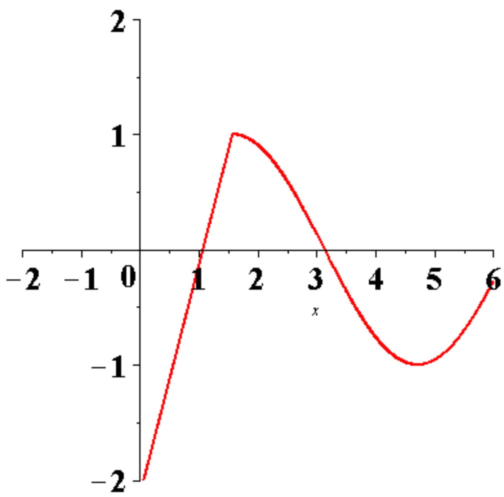
4) У точці $x = -3$ функція має розрив першого роду, неусувний.



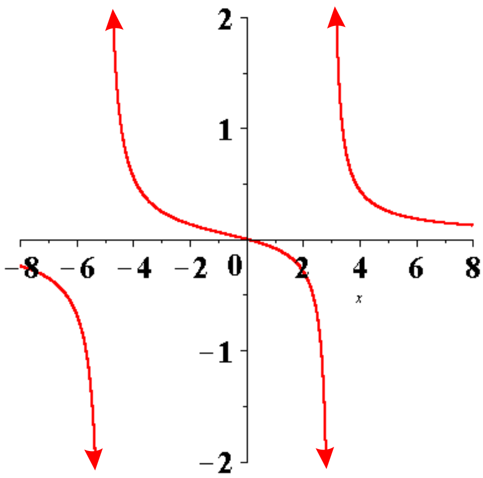
Приклад 3. $a=1$.



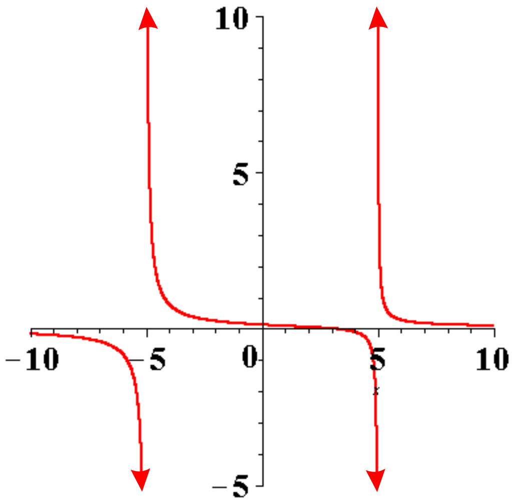
Приклад 4. $A=1-\pi$.



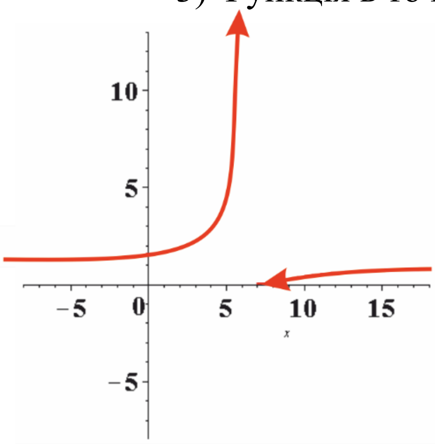
Приклад 5.1) Функція в точках $x=-5$ і $x=-3$ має розрив другого роду.



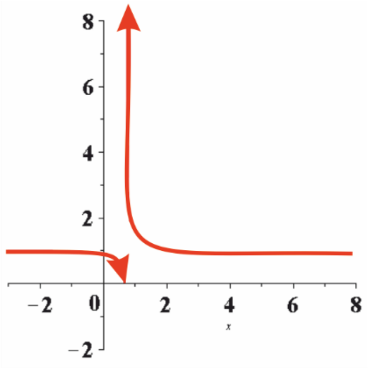
2) Функція в точках $x = -5, x = 5$ має розрив другого роду.



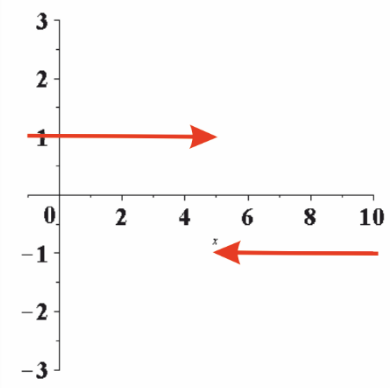
3) Функція в точці $x = 7$ має розрив другого роду.



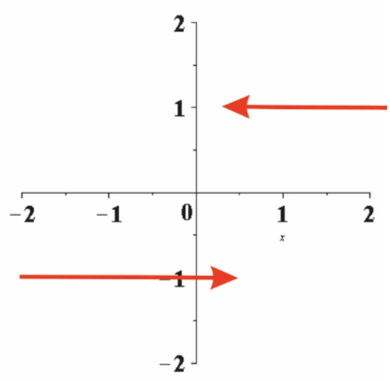
4) Функція в точці $x = \frac{5}{7}$ має розрив другого роду.



5) Функція в точці $x=5$ має розрив першого роду.



6) Функція в точці $x=\frac{1}{3}$ має розрив першого роду.



18. ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЙ, НЕПЕРЕРВНИХ НА ВІДРІЗКУ

Теорема (про корінь функції). Нехай функція $f(x)$ визначена й неперервна на відрізку $[a,b]$ і на кінцях цього відрізка набуває значень, різних за знаком. Тоді між a і b знайдеться хоча б одна точка c ($a<c<b$), у якій значення функції буде дорівнювати нулю: $f(c)=0$.

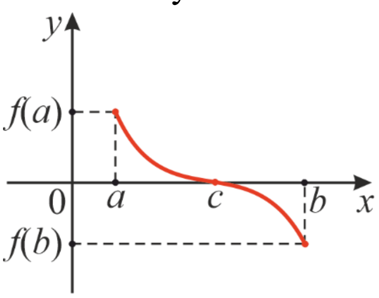


Рис. 59

Нехай, наприклад, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ (рис. 59). Із геометричних міркувань очевидно, що графік неперервної функції повинен перетнути вісь Ox хоча б в одній точці $c \in (a,b)$, тобто $f(c) = 0$.

Теорема (про проміжне значення). Нехай функція $f(x)$ визначена й неперервна на $[a,b]$ і на кінцях цього відрізка набуває значень: $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тоді, яке б не було число C, що міститься між A і B, знайдеться таке значення c $(a < c < b)$, що $f(c) = C$ (рис. 60).

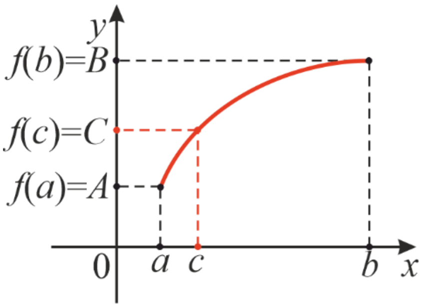


Рис. 60

Теорема (перша теорема Вейєрштрасса). Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a,b]$. Тоді ця функція буде **обмеженою** на цьому відрізку, тобто існує число $M > 0$ таке, що для будь-якого $x \in [a,b]$ виконується нерівність: $|f(x)| \le M$ (рис. 61).

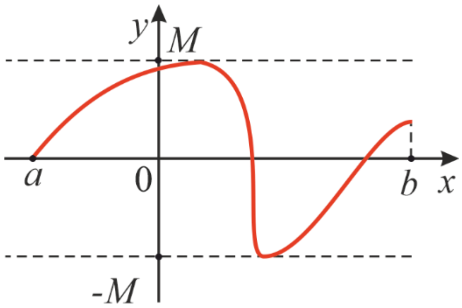


Рис. 61

Зауважимо, що коли функція неперервна не на відрізку $[a,b]$, а на інтервалі (a,b) або напівінтервалі $[a,b)$ (або $(a,b]$), то вона може бути й необмеженою. Наприклад, функція $y = \dfrac{1}{x}$ неперервна на напівінтервалі $(0,1]$, але не обмежена на ньому, тому що $\lim\limits_{x \to 0^{+0}} \dfrac{1}{x} = \infty$ (рис. 62).

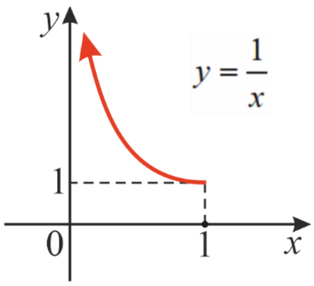


Рис. 62

Теорема (друга теорема Вейєрштрасса про найбільше і найменше значення). Нехай функція $y = f(x)$ визначена й неперервна на відрізку $[a,b]$. Тоді на цьому відрізку знайдеться хоча б одна точка $x = x_1$ така, що значення функції в цій точці буде задовольняти нерівність $f(x_1) \geq f(x)$,(де x – будь-яка інша точка відрізка) і знайдеться хоча б одна точка $x = x_2$ така, що $f(x_2) \leq f(x)$(де x – будь-яка інша точка відрізка).

Значення $f(x_1)$ будемо називати **найбільшим** значенням функції $f(x)$ на $[a,b]$**,** значення $f(x_2)$ – **найменшим** значенням функції $f(x)$ на $[a,b]$**.** Позначимо $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$ (рис. 63). Найбільше(найменше) значення на відрізку може досягатися декілька разів. Зауважимо, що на іншому відрізку найбільше й найменше значення функції будуть іншими.

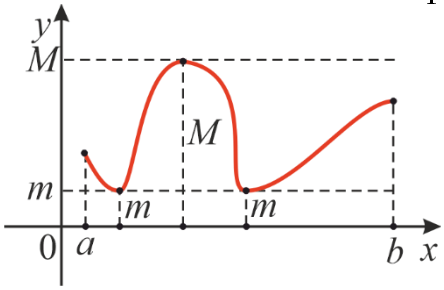


Рис. 63

Зауважимо, що твердження теореми можуть не виконуватись, якщо розглядати функцію на інтервалі (напівінтервалі), а не на відрізку. Так, наприклад, якщо розглядати функцію $y = x^2$ на напівінтервалі $[0,1)$, то функція не матиме свого найбільшого значення. (Немає крайньої правої точки: яку б ми не взяли точку x_1, близьку до одиниці, обов'язково знайдеться точка x_2, яка ще більше наближена до одиниці, тобто $y_1 < y_2$ (рис. 64)).

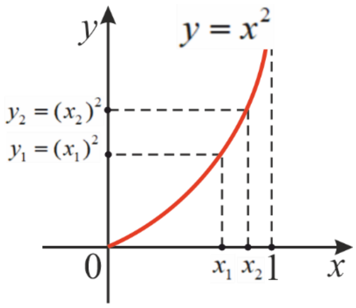


Рис. 64

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Сформулюйте властивості функцій, неперервних на відрізку. Наведіть геометричні ілюстрації цих властивостей.
2. Що таке найбільше і найменше значення функції на відрізку?

ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ

Завдання 1

1 *a*, *b*, *c*, *d*, *e* – визначити значення функцій у точках і побудувати ці точки в декартовій (прямокутній) системі координат;

1 *f* – знайти значення функції;

2 – знайти область визначення функцій;

3 – побудувати графіки функцій (використовуючи графіки елементарних функцій);

4 – складну функцію зобразити за допомогою ланцюжка, складеного із основних елементарних функцій і, навпаки, з елементарних функцій скласти складну функцію.

Варіант 1

1. *a*) $f(x) = 2 - 3x - 2x^2$; $x = -2; 0; 0,5; 1$;

b) $f(x) = x\sin 2x$; $x = 0; \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}$;

c) $x + 5y - 2 = 0$; $x = -5; -2; 0; 1; 3$;

d) $\begin{cases} x = 2 - t^2, \\ y = t - 1 \end{cases}$ $t = 0; 1; 1,5; 3; 5$; e) $y = \begin{cases} 8x - 1, & -\infty < x \le 0, \\ x^2, & 0 < x < 2, \\ x^3 + 1, & 2 \le x < \infty \end{cases}$ $x = -1; 0; 1; 2; 3$;

f) $f(x) = 1 - x^2 - x^3$; $f(0) = ?$, $f(-3) = ?$, $f\left(\frac{2}{3}\right) = ?$, $f(2x) = ?$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = ?$.

2. *a*) y=cos3x; *b*) $y = \frac{x+1}{x^2 - 1}$; *c*) $y = \sqrt{3 - x}$.

3. *a*) $y = \mathrm{ctg}(x + 1)$; *b*) $y = \sqrt{2x - 5}$.

4. *a*) $y = \arcsin^2(\cos x)$; *b*) $y = \sqrt{u}$, $u = \mathrm{tg}\, v$, $v = \frac{x+1}{x}$.

Варіант 2

1. *a*) $f(x) = 2 + 3x + x^2$; $x = -2; 0; 0,5; 1$;

b) $f(x) = x\cos x$; $x = 0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}$;

c) $x^2 - y + 2 = 0$; $x = -5; -2; 0; 1; 3$;

d) $\begin{cases} x = t + 2, \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$ $t = -1; 0; 2; 5; 6$; *e*) $y = \begin{cases} x + 2, & -\infty < x \le -1, \\ \sqrt{x}, & -1 < x < 2, \\ x - 1, & 2 \le x < \infty \end{cases}$ $x = -2; -1; 0; 2; 3$;

f) $f(x)=x^2+x+\frac{1}{x}$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)=?$, $f(-3)=?$, $f(-7x+8)=?$, $f(-x)=?$, $f\left(\frac{1}{x}\right)=?$.

2. *a*) $y=\sqrt{1+\sin^2 x}$; *b*) $y=\frac{2}{\sqrt[3]{8-x}}$; *c*) $y=\ln(5-x^2)$.

3. *a*) $y=5\sin(x-1)$; *b*) $y=x^2+2x+1$.

4. *a*) $y=\operatorname{arctg}^2(\ln x)$; *b*) $y=\ln u$, $u=\sin 2v$, $v=x-1$.

Варіант 3

1. *a*) $f(x)=|3x+2|$; $x=-2;-1;0;1;3$;

   b) $f(x)=\sin^2 2x$; $x=0;\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}$;

   c) $\ln x+5y-2=0$; $x=\frac{1}{e};e^7;\frac{1}{2};1;3e$;

   d) $\begin{cases}x=t^2+t,\\ y=t-1\end{cases}$ $t=-1;0;2;3;5$;

   e) $y=\begin{cases}3, & -\infty<x<-1,\\ x+1, & -1\le x<0,\\ x^3-1, & 0\le x<\infty\end{cases}$ $x=-2;-1;-0,5;0;1$;

   f) $f(x)=x^3+x^2-x+1$; $f(0)=?$, $f(-1)=?$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=?$, $f(2x)=?$, $f\left(\frac{1}{x}\right)=?$

.

2. *a*) $y=e^{1-8}$; *b*) $y=\frac{x+1}{3x^2+x}$; *c*) $y=\arccos x$.

3. *a*) $y=e^{x-2}$; *b*) $y=\ln(x+2)-1$.

4. *a*) $y=\sin(2\ln x)$; *b*) $y=\sqrt[3]{u}$, $u=\operatorname{ctg} v$, $v=\frac{x+1}{x}$.

Варіант 4

1. *a*) $f(x)=2+3x+2x^2$; $x=-2;0;0,5;1$;

   b) $f(x)=x+\sin 2x$; $x=0;\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}$;

   c) $e^x+y-1=0$; $x=-2;-1;0;1;\ln 3$;

   d) $\begin{cases}x=t^2+1,\\ y=t+2\end{cases}$ $t=-1;-0,5;0;2;3$;

$e)$ $y=\begin{cases}-x+2, & -\infty<x\le -1,\\ 1, & -1<x<2,\\ 2x+1, & 2\le x<\infty\end{cases}$ $\quad x=-2;-1;0;0,5;2$;

$f)$ $f(x)=\ln(x+1)$; $f(0)=?$, $f(-1)=?$, $f(e^2+2e)=?$, $f(x-1)=?$, $f(e^x-1)=?$.

2. $a)$ $y=x^4+x^2+\sqrt{x}$; $\quad b)$ $y=\dfrac{x+1}{7x+2}$; $\quad c)$ $y=\ln(1-x^2)$.

3. $a)$ $y=\sin 2x+1$; $\quad b)$ $y=2^{x-3}$.

4. $a)$ $y=\ln^2(\sin x)$; $\quad b)$ $y=\sqrt{u}$, $u=\arccos v$, $v=5x$.

Варіант 5

1. $a)$ $f(x)=3x-|2-2x^2|$; $\quad x=-2;0;0,5;1$;

$b)$ $f(x)=\mathrm{tg}\,2x+1$; $\quad x=0;\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}$;

$c)$ $x^2+5y^2-1=0$; $\quad x=-5;-2;0;1;3$;

$d)$ $\begin{cases}x=t+1,\\ y=-t\end{cases}$ $t=-1;0;2;4;5$; $e)$ $y=\begin{cases}x+1, & -\infty<x<-10,\\ x^2, & -10\le x\le -5,\\ -x, & -5<x<\infty\end{cases}$ $\quad x=-11;-10;-5;0;1$

;

$f)$ $f(x)=e^x$; $f(0)=?$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=?$, $f(3)=?$, $f(\ln x)=?$, $f(-x)=?$.

2. $a)$ y=arctg4x; $\quad b)$ $y=\dfrac{x+1}{3x-2}$; $\quad c)$ $y=e^{\frac{1}{x^2}}$.

3. $a)$ $y=2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$; $\quad b)$ $=x^2+5$.

4. $a)$ $y=e^{arctg\,2x}$; $\quad b)$ $y=u^{-1}$, $u=\sin v$, $v=(x+2)^2$.

Варіант 6

1. $a)$ $f(x)=|-x|$; $\quad x=-2;-1;0;3;5$;

$b)$ $f(x)=x\cos^2 2x$; $\quad x=0;\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}$;

$c)$ $x+5\ln y-2=0$; $\quad x=-3;-1;5\ln 4+2;2;7$;

$d)$ $\begin{cases}x=1-t,\\ y=t^2+t\end{cases}$ $\quad t=-1;0;2;3;5$;

$e)$ $y=\begin{cases} 2-3x, & -\infty < x < 0, \\ 3, & 0 \le x \le 2, \\ x-5, & 2 < x < \infty \end{cases}$ $\quad x=-1;0;0,5;2;3;$

$f)$ $f(x)=\sin x+2x;$ $f(0)=?,$ $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=?,$ $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=?,$ $f(\arcsin x)=?,$ $f(-x)=?.$

2. $a)$ $y=arctg\sqrt{x};$ $\quad b)$ $y=\dfrac{1}{\ln(x-2)};$ $\quad c)$ $y=e^{\frac{1}{x^2+3x}}.$

3. $a)$ $y=|\sin x|;$ $\quad b)$ $y=\dfrac{1}{x}+1.$

4. $a)$ $y=\dfrac{1}{\sin(x-x^2)};$ $\quad b)$ $y=u^3,$ $u=\ln v,$ $v=5^{x-1}.$

Варіант 7

1. $a)$ $f(x)=2-3x-2x^2;$ $\quad x=-2;0;0,5;1;$

$b)$ $f(x)=x+\operatorname{tg}2x;$ $\quad x=0;\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{8};\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4};$

$c)$ $4^x-y-2=0;$ $\quad x=-1;-0,5;0;1;3;$

$d)$ $\begin{cases} x=t^3, \\ y=|t+1| \end{cases}$ $t=-2;-1;0;3;5;$ $e)$ $y=\begin{cases} 3x, & -\infty < x \le -3, \\ x^2, & -3 < x < -1, \\ -2x, & -1 \le x < \infty \end{cases}$ $x=-4;-3;-2;0;1;$

$f)$ $f(x)=\arcsin x;$ $f(0)=?,$ $f(-1)=?,$ $f(1)=?,$ $f(\sin x)=?,$ $f(\cos x)=?.$

2. $a)$ $y=\sqrt{9x^2-1};$ $\quad b)$ $y=\dfrac{x+1}{x};$ $\quad c)$ $y=\operatorname{arctg}(x+2).$

3. $a)$ $y=2(x-1)^2+1;$ $\quad b)$ $y=\operatorname{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right).$

4. $a)$ $y=\ln^2(e^{-x});$ $\quad b)$ $y=u-2u^2,$ $u=\dfrac{1}{v},$ $v=2^x.$

Варіант 8

1. $a)$ $f(x)=1+3x-2x^2;$ $\quad x=-2;0;0,5;1;$

$b)$ $f(x)=x\ln 2|x|;$ $\quad x=-1;\dfrac{1}{2};1;\dfrac{e}{2};-\dfrac{e^2}{8};$

$c)$ $x+2\sin y+2=0;$ $\quad x=-3;-2;0;-\dfrac{3}{2};$

$d)$ $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=t-1 \end{cases}$ $t=0;2;4;8;16$; $e)$ $y=\begin{cases} 3x-2, & -\infty<x<-1, \\ 2-x, & -1\le x<2, \\ x^2, & 2\le x<\infty \end{cases}$ $x=-2;-1;0;2;3$;

$f)$ $f(x)=\mathrm{tg}\,2x$; $f(0)=?$, $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=?$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=?$, $f(\mathrm{arctg}\,x)=?$, $f\left(-\frac{x}{2}\right)=?$, $f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=?$.

2. $a)$ $y=\sqrt{x^2+2x-3}$; $b)$ $y=\frac{2-x}{7x+2}$; $c)$ y=sin2x.

3. $a)$ $y=\mathrm{arctg}\,x+\frac{\pi}{2}$; $b)$ $y=\sqrt{x-3}+1$.

4. $a)$ $y=\left(\sin(\cos x)\right)^{-1}$; $b)$ $y=u^3$, $u=1-v^2$, $v=\sin x$.

Варіант 9

1. $a)$ $f(x)=-2x^2+2-7x$; $x=-2;0;0,5;1$;

$b)$ $f(x)=x-\sin 2x$; $x=0;\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}$;

$c)$ $\sin x+y-1=0$; $x=-\frac{3\pi}{2};-\pi;0;\frac{\pi}{3};3\pi$;

$d)$ $\begin{cases} x=t^2-t+1, \\ y=2t \end{cases}$ $t=-1;0;1;2,5;4$;

$e)$ $y=\begin{cases} 3-x, & -\infty<x\le-2, \\ 5, & -2<x\le 0, \\ x^2, & 0<x<\infty \end{cases}$ $x=-2;-1;0;1;2$;

$f)$ $f(x)=x^2+3x$; $f(-1)=?$, $f(1)=?$, $f\left(\frac{1}{3}\right)=?$, $f(4x)=?$, $f(x-2)=?$.

2. $a)$ $y=\sqrt[3]{\sin x}$; $b)$ $y=\frac{2}{3+x^2}$; $c)$ $y=\mathrm{arctg}\,\frac{x}{5}$.

3. $a)$ $y=\cos(x+1)-1$; $b)$ $y=\sqrt{x+4}$.

4. $a)$ $y=2^{\mathrm{tg}^2 x}$; $b)$ $y=\frac{3}{1+u}$, $u=\mathrm{arctg}\,v$, $v=\frac{x^2}{2}$.

Варіант 10

1. $a)$ $f(x)=-3x+2x^2-4$; $x=-1;0;0,5;\frac{2}{5}$;

$b)$ $f(x)=\arcsin 2x$; $\quad x=-\frac{1}{4};0;\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}$;

$c)$ $|x|-3y-1=0$; $\quad x=-5;-2;0;1;10$;

$d)$ $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos t \end{cases}$ $t=0;\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}$; $e)$ $y=\begin{cases} 2, & -\infty<x\le-2, \\ x^2+1, & -2<x\le 1, \\ x, & 1<x<\infty \end{cases}$ $x=-3;-2;0;1;2$;

$f)$ $f(x)=e^x$; $f(0)=?$, $f(-3)=?$, $f\left(\frac{2}{5}\right)=?$, $f(x)\cdot f(-x)=?$, $f(x+1)=?$.

2\. $a)$ $y=\arcsin x$; $\quad b)$ $y=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$; $\quad c)$ $y=\ln(4-3x)$.

3\. $a)$ $y=\mathrm{arctg}(x-1)$; $\quad b)$ $y=(x+4)^2-2$.

4\. $a)$ $y=\sin^2(e^x)$; $\quad b)$ $y=\frac{1}{u}$, $u=\arccos v$, $v=2^{x+1}$.

Варіант 11

1\. $a)$ $f(x)=2+3x+4x^2$; $\quad x=-2;0;0,5;\frac{3}{5}$;

$b)$ $f(x)=x+\arcsin x$; $\quad x=-\frac{1}{2};0;1;\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$c)$ $xy=e^x$; $\quad x=-5;-2;0;1;\ln 3$;

$d)$ $\begin{cases} x=t+t^2, \\ y=-t \end{cases}$ $t=-2;0;1;3;5$; $\quad e)$ $y=\begin{cases} 3x, & -\infty<x\le 1, \\ 1-x^2, & 1<x<3, \\ -x, & 3\le x<\infty \end{cases}$ $x=-1;0;1;2;3$.

$f)$ $f(x)=\sin 2x$; $f(0)=?$, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=?$, $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=?$, $f(\arcsin x)=?$, $f\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=?$.

2\. $a)$ $y=\frac{7-x}{x^2-6}$; $\quad b)$ $y=x+\sqrt{-x}$; $\quad c)$ $y=\mathrm{tg}x$.

3\. $a)$ $y=e^{x+1}+1$; $\quad b)$ $y=2\cos 2x$.

4\. $a)$ $y=\mathrm{tg}\ln(\sin x)$; $\quad b)$ $y=2^u$, $u=\frac{1}{v^2}$, $v=\cos(x-1)$.

Варіант 12

1\. $a)$ $f(x)=2^{-x}$; $\quad x=-2;0;0,5;1$;

$b)$ $f(x)=\cos 2x\cdot\sin 2x$; $\quad x=0;\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}$;

$c)$ $3x^2+5y^2=15$; $\quad x=-\frac{3}{2};-2;0;1;\frac{2}{3}$;

$d)$ $\begin{cases} x=3-t, \\ y=t^2 \end{cases}$ $t=0;1;1{,}5;3;5$; $\quad e)$ $y=\begin{cases} 1-x, & -\infty<x\le -2, \\ x^2, & -2<x<0, \\ x, & 0\le x<\infty \end{cases}$ $x=-2;-1;0;2;3$;

$f)$ $f(x)=2x+\sqrt{x}$; $f(0)=?$, $f(-4)=?$, $f(16)=?$, $f(x+3)=?$, $f\left(\frac{4}{x^2}\right)=?$.

2. $a)$ $y=\lg(x^2+1)$; $\quad b)$ $y=\frac{x}{4x^2-5}$; $\quad c)$ $y=\sqrt[3]{x-1}$.

3. $a)$ $y=(x-2)^2$; $\quad b)$ $y=\sin 2x+1$.

4. $a)$ $y=\sin^2(\operatorname{tg} x)$; $\quad b)$ $y=\sqrt{u}$, $u=\sin v$, $v=x^3$.

Варіант 13

1. $a)$ $f(x)=\left|2x+3\right|$; $\quad x=-2;-1;0;3;5$;

$b)$ $f(x)=\sin 3x$; $\quad x=0;\frac{\pi}{18};\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{9};\frac{\pi}{6}$;

$c)$ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$; $\quad x=-2;-1;0;1;2$;

$d)$ $\begin{cases} x=t+2, \\ y=2-t \end{cases}$ $t=-1;0;1;2;3$; $\quad e)$ $y=\begin{cases} -5+x, & -\infty<x<-1, \\ x^3, & -1\le x<1, \\ 3-x, & 1\le x<\infty \end{cases}$ $x=-2;-1;0;1;2$

;

$f)$ $f(x)=\sin 2x+x$; $f(0)=?$, $f\left(-\frac{10}{4}\pi\right)=?$, $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=?$, $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=?$, $f\left(\frac{1}{x}\right)=?$.

2. $a)$ $y=3x^3+x$; $\quad b)$ $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x+8}}$; $\quad c)$ $y=\ln(1-x)$.

3. $a)$ $y=x^3+2$; $\quad b)$ $y=3^{x-2}$.

4. $a)$ $y=e^{\operatorname{tg} 2x}$; $\quad b)$ $y=\operatorname{tg} u$, $u=2^v$, $v=x-1$.

Варіант 14

1. $a)$ $f(x)=\sqrt{x+x^2}$; $\quad x=0;1;\frac{3}{4};5$;

$b)$ $f(x)=\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$; $x=0;\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{9};\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}$;

$c)$ $x^2+y^2=16$; $x=-4;-2;0;1;3$;

$d)$ $\begin{cases} x=3t+1, \\ y=t^2+2 \end{cases}$ $t=1;2;0;3;5$; $e)$ $y=\begin{cases} 1-x, & -\infty<x\le -2, \\ x^2, & -2<x\le 3, \\ -5, & 3<x<\infty \end{cases}$ $x=-3;-2;0;3;5$;

$f)$ $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x-1}$; $f(0)=?$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=?$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=?$, $f(2a+b)=?$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=?$

.

2. $a)$ $y=2x+\sqrt{x^2+1}$; $b)$ $y=\ln(x+2)$; $c)$ $y=\dfrac{x+5}{x^2+5}$.

3. $a)$ $y=(x+2)^2-3$; $b)$ $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

4. $a)$ $y=\sin^2 x^3$; $b)$ $y=\sqrt{u}$, $u=\ln v$, $v=x^2$.

Варіант 15

1. $a)$ $f(x)=|3-2x|$; $x=-2;-1;2;\dfrac{4}{7}$;

$b)$ $f(x)=\cos 2x-\sin 2x$; $x=0;\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{8};\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}$;

$c)$ $6x+y^2-1=0$; $x=-\dfrac{1}{6};-1;0;-2;3$;

$d)$ $\begin{cases} x=t+e, \\ y=t^2-1 \end{cases}$ $t=-1;0;2;4;5$; $e)$ $y=\begin{cases} 2x, & -\infty<x\le -1, \\ 1-x, & -1<x\le 2, \\ x^2, & 2<x<\infty \end{cases}$ $x=-2;-1;0;2;3$;

$f)$ $f(x)=\cos 2x$; $f(0)=?$, $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=?$, $f\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)=?$, $f\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=?$, $f\left(-\dfrac{x}{2}\right)=?$.

2. $a)$ $y=2x^2+x+\sqrt{x}$; $b)$ $y=\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x-1}$; $c)$ $y=\dfrac{1}{\ln(x^2-3)}$.

3. $a)$ $y=\sin 2x$; $b)$ $y=(x+1)^2-4$.

4. $a)$ $y=\mathrm{tg}^2(x^2+1)$; $b)$ $y=\sin u$, $u=2v$, $v=x-1$.

Варіант 16

1. *a*) $f(x)=x^3-x$; $x=-2;-1;0;1$;

b) $f(x)=\sin(\pi-3x)$; $x=0;\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{9};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}$;

c) $x^2+y^2=4$; $x=-1;0;\frac{1}{2};1,5;2$;

d) $\begin{cases} x=2t+t^2, \\ y=t+1 \end{cases}$ $t=-1;0;2;4;5$; *e*) $y=\begin{cases} 2-x, & -\infty<x\le -1, \\ x+5, & -1<x\le 2, \\ x, & 2<x<\infty \end{cases}$ $x=-2;-1;0;2;3$;

f) $f(x)=x^2+\frac{1}{x}+\sqrt{2x}$; $f(1)=?$, $f\left(\frac{9}{8}\right)=?$, $f(3a-2)=?$, $f\left(\frac{x}{2}\right)=?$, $f(x+1)=?$.

2. *a*) $y=\frac{2x+3}{(2x-1)^2}$; *b*) $y=2^{\frac{1}{x}}$; *c*) $y=\sqrt[3]{x+7}$.

3. *a*) $y=(x+3)^2$; *b*) $y=e^x-1$.

4. *a*) $y=2\cos e^{x^2}$; *b*) $y=u^3$, $u=\sin v$, $v=2x$.

Варіант 17

1. *a*) $f(x)=|2-x|$; $x=-1;0;2;3$;

b) $f(x)=\operatorname{tg}x^2$; $x=0;\sqrt{\frac{\pi}{6}};\sqrt{\frac{\pi}{4}};\sqrt{\frac{\pi}{3}};\sqrt{\frac{\pi}{2}}$;

c) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$; $x=0;-1;-2;1;2$;

d) $\begin{cases} x=2t-1, \\ y=1-t^2 \end{cases}$ $t=-2;0;1;3;4$; *e*) $y=\begin{cases} 1-x, & -\infty<x\le 3, \\ x^2+1, & 3<x<4, \\ 3, & 4\le x<\infty \end{cases}$ $x=0;3;3,5;4;5$;

f) $f(x)=\frac{x}{x+1}+x$; $f(0)=?$, $f\left(-\frac{1}{3}\right)=?$, $f(4)=?$, $f(x+10)=?$, $f\left(\frac{7}{x}\right)=?$.

2. *a*) $y=\sin\sqrt{x}$; *b*) $y=\frac{x-1}{9+x^2}$; *c*) $y=\ln(x-x^2)$.

3. *a*) $y=\operatorname{ctg}x-\frac{\pi}{2}$; *b*) $y=(x-1)^3$.

4. *a*) $y=x^{\sin x^2}$; *b*) $y=\sqrt[3]{u}$, $u=\operatorname{arctg}\frac{1}{v}$, $v=x^2$.

Варіант 18

1. $a)$ $f(x)=3^{x-1}$; $x=-\dfrac{1}{2};0;1;2$;

$b)$ $f(x)=\operatorname{ctg}2x$; $x=0;\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{8};\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}$;

$c)$ $x^2+y^2=1$; $x=-1;-\sqrt{0,36};-0,8;0;\sqrt{\dfrac{3}{4}}$;

$d)$ $\begin{cases} x=t-3, \\ y=-t^2 \end{cases}$ $t=-3;-1;0;2;4$; $e)$ $y=\begin{cases} -3, & -\infty<x<-1, \\ x+5, & -1\le x<1, \\ x^2, & 1\le x<\infty \end{cases}$ $x=-2;-1;0;1;2$;

$f)$ $f(x)=x-\cos x$; $f(0)=?$, $f\left(-\dfrac{9\pi}{4}\right)=?$, $f\left(\dfrac{8\pi}{3}\right)=?$, $f(-2x)=?$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}+b\right)=?$.

2. $a)$ $y=5^{\sqrt{x}}$; $b)$ $y=\dfrac{x+1}{2x^2-32}$; $c)$ $y=\ln(1+x^2)$.

3. $a)$ $y=(x+3)^2-2$; $b)$ $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

4. $a)$ $y=\sin\operatorname{tg}x^2$; $b)$ $y=3u$, $u=\sqrt{v}$, $v=\ln x$.

Варіант 19

1. $a)$ $f(x)=|x-1|$; $x=-3;-1;0;1$;

$b)$ $f(x)=\sqrt{1+\sin^2 2x}$; $x=0;\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{8};\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}$;

$c)$ $x^2-y^2-4=0$; $x=2;3;-3;\sqrt{20};-\sqrt{13}$;

$d)$ $\begin{cases} x=3t+3, \\ y=-t \end{cases}$ $t=-1;0;0,5;2;4$;

$e)$ $y=\begin{cases} -x, & -\infty<x<-3, \\ x^2, & -3\le x\le 2, \\ 3+x, & 2<x<\infty \end{cases}$ $x=-4;-3;2;3;10$;

$f)$ $f(x)=x+\sqrt{x+1}$; $f(0)=?$, $f\left(-\dfrac{1}{4}\right)=?$, $f(8)=?$, $f(a+2b)=?$, $f(3x)=?$.

2. $a)$ $y=\ln(1-x^2)$; $b)$ $y=\dfrac{x}{(5-3x)^2}$; $c)$ $y=\sqrt{9+x^2}$.

3. $a)$ $y=\ln(x+2)$; $b)$ $y=\sin x+1$.

4. $a)\ y=\sqrt{\sin\ln x}$; $b)\ y=e^{u},\ u=v^{2},\ v=\operatorname{tg}x$.

Варіант 20

1. $a)\ f(x)=1+4x-\frac{1}{2}x^{2}$; $x=-2;0;0,5;\frac{1}{3}$;

$b)\ f(x)=\cos^{2}2x$; $x=0;\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}$;

$c)\ x+y^{2}-1=0$; $x=-24;-15;-8;-3;0$;

$d)\ \begin{cases}x=(t+3)^{2},\\ y=t-1\end{cases}$ $t=-3;0;1;2;5$;

$e)\ y=\begin{cases}x, & -\infty<x\le-1,\\ 2x-1, & -1<x\le1,\\ 1-x^{2}, & 1<x<\infty\end{cases}$ $x=-2;-1;0;1;3$;

$f)\ f(x)=\cos 2x$; $f\left(\frac{7\pi}{4}\right)=?$, $f\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=?$, $f(x-4)=?$, $f(2x)=?$, $f\left(\frac{\pi}{x}\right)=?$

.

2. $a)\ y=\frac{1}{10x-3}$; $b)\ y=\sqrt{2-x^{2}}$; $c)\ y=e^{\sqrt{3+x}}$.

3. $a)\ y=(2x)^{3}+1$; $b)\ y=\cos\frac{x}{2}$.

4. $a)\ y=\sin e^{\operatorname{tg}x}$; $b)\ y=u^{2},\ u=\ln v,\ v=\arccos x$.

Варіант 21

1. $a)\ f(x)=|x|$; $x=-3;-1;0;5$;

$b)\ f(x)=\sin^{2}x$; $x=0;\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}$;

$c)\ 3x^{2}+2y^{2}=6$; $x=-1;-0,5;0;0,5;1$;

$d)\ \begin{cases}x=2t^{2}+t-1,\\ y=2-t\end{cases}$ $t=-1;0;2;4;6$;

$e)\ y=\begin{cases}3x-1, & -\infty<x<-5,\\ x+1, & -5\le x<0,\\ x^{3}, & 0\le x<\infty\end{cases}$ $x=-6;-5;-2;0;2$;

$f)\ f(x)=x+\frac{1}{x}$; $f\left(-\frac{2}{3}\right)=?$, $f(-2)=?$, $f(x-7)=?$, $f\left(\frac{a}{b}\right)=?$, $f\left(\frac{4}{x}\right)=?$.

2. $a)$ $y=\dfrac{x-1}{x^2-4}$; $b)$ $y=\ln(x+2)$; $c)$ $y=\sqrt{3x+4}$.

3. $a)$ $y=(x-3)^2+2$; $b)$ $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

4. $a)$ $y=\ln \operatorname{tg}^2 x$; $b)$ $y=3u$, $u=v^3$, $v=\sin x$.

Варіант 22

1. $a)$ $f(x)=x^2+3x+5$; $x=-3;-1;0;2$;

$b)$ $f(x)=x\sin\dfrac{x}{2}$; $x=0;\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2};\dfrac{2\pi}{3};\pi$;

$c)$ $2x-y+1=0$; $x=-1;0;3;10;15$;

$d)$ $\begin{cases} x=3t, \\ y=t^2-1 \end{cases}$ $t=-2;0;1;1,5;3$;

$e)$ $y=\begin{cases} 2-x^2, & -\infty<x\le-3, \\ x+1, & -3<x<3, \\ x^3, & 3\le x<\infty \end{cases}$ $x=-5;-2;0;3;5$;

$f)$ $f(x)=(x+1)(x-2)+\dfrac{1}{x}$; $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=?$, $f(2)=?$, $f(c)=?$, $f(2+x)=?$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=?$.

2. $a)$ $y=-x^2+3$; $b)$ $y=\dfrac{1}{x^3+x}$; $c)$ $y=\sqrt{-x+1}$.

3. $a)$ $y=\dfrac{1}{x}+3$; $b)$ $y=2\ln(x-1)$.

4. $a)$ $y=3^{\operatorname{tg}3x}$; $b)$ $y=5u$, $u=\sqrt[3]{v}$, $v=\operatorname{tg}x$.

Варіант 23

1. $a)$ $f(x)=5x-2x^2$; $x=-5;-3;0;\dfrac{2}{7}$;

$b)$ $f(x)=x\sin x$; $x=0;\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2};\dfrac{2\pi}{3}$;

$c)$ $c)$ $3x+2y-1=0$; $x=-8;-3,5;-1,5;0;3$;

$d)$ $\begin{cases} x=t-1, \\ y=2-t^2 \end{cases}$ $t=-1;0;3;4,2;5$;

$e)$ $y=\begin{cases} 2x, & -\infty<x\le-3, \\ x^2, & -3<x<2, \\ 1-x, & 2\le x<\infty \end{cases}$ $x=10;-1;0,5;2,5;2$;

f) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$; $f(-1)=?$, $f(3)=?$, $f(a)=?$, $f(2x)=?$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=?$.

2. *a*) $y=\ln\left[x(x-3)\right]$; *b*) $y=\dfrac{2-x}{x}$; *c*) $y=\sqrt{7-5x}$.

3. *a*) $y=\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; *b*) $y=\sqrt{x+4}$.

4. *a*) $y=\sin^3\ln(x-1)$; *b*) $y=\sin u$, $u=\sqrt{v}$, $v=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Варіант 24

1. *a*) $f(x)=x^3-3x^2+1$; $x=-\dfrac{3}{2};-2;0;1$;

b) $f(x)=\sqrt{x\sin 2x}$; $x=0;\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{8};\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}$;

c) $3x-7y+3=0$; $x=-3;-1;0;5;10$;

d) $\begin{cases} x=t+5, \\ y=1-t^2 \end{cases}$ $t=-1;0;0,5;2;5$;

e) $y=\begin{cases} 3-x, & -\infty<x\le 0, \\ x^3, & 0<x<1, \\ 2x, & 1\le x<\infty \end{cases}$ $x=-1;0;0,5;1;2$;

f) $f(x)=x+x^3$; $f(-4)=?$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=?$, $f\left(\dfrac{a}{b}\right)=?$, $f(4x)=?$, $f(x-2)=?$.

2. *a*) $y=\dfrac{1}{x^2+5x}$; *b*) $y=\sqrt[3]{x+3}$; *c*) $y=e^{-3x}$.

3. *a*) $y=-x^2+5$; *b*) $y=2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

4. *a*) $y=\sqrt{\cos(x-1)}$; *b*) $y=u^2$, $u=\sin v$; $v=x^3$.

Варіант 25

1. *a*) $f(x)=-x^2-3x+5$; $x=-3;-1;0;\dfrac{5}{4}$;

b) $f(x)=x\arcsin x$; $x=0;\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};1$;

c) $2x-y+1=0$; $x=-1;0;3;10;15$.

d) $\begin{cases} x=3t, \\ y=t^2-1 \end{cases}$ $t=-2;0;1;1,5;3$;

$$e)\ y=\begin{cases}8x-2, & -\infty<x<-4,\\ x^3+1, & -4\le x<-2,\\ 2x, & -2\le x<\infty\end{cases}\qquad x=-5;-4;-3;-2;3;$$

$f)$ $f(x)=\sin x+\cos x$; $f(0)=?$, $f\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=?$, $f(\pi)=?$, $f(3x)=?$, $f(x+\pi)=?$

.

2. $a)$ $y=\sin x$; $b)$ $y=\frac{x+1}{x^3-8}$; $c)$ $y=\sqrt{3+2x}$.

3. $a)$ $y+2=x^2$; $b)$ $y=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

4. $a)$ $y=3\cdot 2^{\arcsin x^2}$; $b)$ $y=2u$, $u=\sin v$, $v=e^x$.

Варіант 26

1. $a)$ $f(x)=3-x-x^2$; $x=-3;-1;0;\frac{2}{3}$;

$b)$ $f(x)=3x\ln x$; $x=\frac{1}{2};1;e;e^2;10$;

$c)$ $3x+2y+8=0$; $x=-8;-3;0;2;5$;

$$d)\ \begin{cases}x=5t+1,\\ y=3-t^2\end{cases}\qquad t=-2;-0,5;0;3;5;$$

$$e)\ y=\begin{cases}x^2-x, & -\infty<x\le-1,\\ x+1, & -1<x\le 2,\\ 2x, & 2<x<\infty\end{cases}\qquad x=-2;-1;0;2;3;$$

$f)$ $f(x)=x^{\frac{1}{2}}-\frac{x+1}{x-1}$; $f(25)=?$, $f(0)=?$, $f\left(\frac{1}{b^2}\right)=?$, $f(x^2)=?$, $f(x-1)=?$.

2. $a)$ $y=3x(x+3)$; $b)$ $y=\frac{x}{9x^2-1}$; c) $y=\sqrt{1+x^3}$.

3. $a)$ $y-1=\cos x$; $b)$ $y=3^{x+2}$.

4. $a)$ $y=\arcsin e^{x^2}$; $b)$ $y=-u$, $u=\sqrt{v+1}$, $v=x^3$.

Варіант 27

1. $a)$ $f(x)=x^2-3x+2$; $x=-5;-\frac{2}{7};0;3$;

$b)$ $f(x)=2x\sin 2x$; $x=0;\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}$;

$c)$ $2y+5x+1=0$; $x=-8;-3;0;1;4$;

$d)$ $\begin{cases} x=t+1, \\ y=t^2-1 \end{cases}$ $t=-2;-0,5;0;3;5$;

$e)$ $y=\begin{cases} x+5, & -\infty<x<-2, \\ x^2-1, & -2\le x<3, \\ x-3, & 3\le x<\infty \end{cases}$ $x=-3;-2;0;3;5$;

$f)$ $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}+e^x$; $f(1)=?$, $f(-3)=?$, $f(a)=?$, $f(-x)=?$, $f(x+1)=?$.

2. $a)$ $y=\ln(2x-1)$; $b)$ $y=\dfrac{x-2}{x}$; $c)$ $y=(x^4+1)^{\frac{1}{2}}$.

3. $a)$ $y=(x+2)^3$; $b)$ $y=e^{x-1}$.

4. $a)$ $y=\operatorname{tg}^2(x^2+3x)^3$; $b)$ $y=u^{-1}$, $u=3^v$, $v=x^2$.

Варіант 28

1. $a)$ $f(x)=8-x^3+x$; $x=-5;2;0;\dfrac{3}{5}$

$b)$ $f(x)=2x\operatorname{ctg}x$; $x=0;\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}$;

$c)$ $x+5y-1=0$; $x=-3;-1;0;2;5$;

$d)$ $\begin{cases} x=5-3t, \\ y=t+t^2 \end{cases}$ $t=-2;-0,5;0;3;5$;

$e)$ $y=\begin{cases} x+5, & -\infty<x<-2, \\ x^2-1, & -2\le x<3, \\ x-3, & 3\le x<\infty \end{cases}$ $x=-3;-2;0;3;5$;

$f)$ $f(x)=2x+\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$; $f(4)=?$, $f(9)=?$, $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=?$, $f(x^2+6x+9)=?$, $f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=?$.

2. $a)$ $y=8x-x^2$; $b)$ $y=\ln(x^2-4)$; $c)$ $y=e^{\sqrt{x+1}}$.

3. $a)$ $y+5=x^3$; $b)$ $y=\ln(x+3)$.

4. $a)$ $y=\operatorname{arctg}(\sqrt{\ln x})$; $b)$ $y=e^u$, $u=\sqrt{v}$, $v=\sin x$.

Варіант 29

1. $a)$ $f(x) = -(x^2 + x^3) + 5$; $x = -4; -2; 0; \frac{3}{2}$;

$b)$ $f(x) = x \operatorname{tg} x$; $x = 0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}$;

$c)$ $10x - 3y + 1 = 0$; $x = -8; -3; 0; 2; 5$;

$d)$ $\begin{cases} x = 2t + 3, \\ y = 3 - t \end{cases}$ $t = -1; 0; 3; -10; 20$;

$e)$ $y = \begin{cases} x^2 - 1, & -\infty < x \le -3, \\ x, & -3 < x < 0, \\ -\sqrt{x}, & 0 \le x < \infty \end{cases}$ $x = -5; -3; 0; 1; 4$;

$f)$ $f(x) = (x+1)^2 + x$; $f(0) = ?$, $f(5) = ?$, $f(d) = ?$, $f(-x) = ?$, $f(x^2) = ?$.

2. $a)$ $y = \frac{2}{\sqrt{3x-7}}$; $b)$ $y = \sqrt{x^2 - 16}$; $c)$ $y = e^{x+1}$.

3. $a)$ $y = (x+1)^2 - 3$; $b)$ $y = 2\sin x$.

4. $a)$ $y = e^{2\sin x}$; $b)$ $y = 3u$, $u = \operatorname{tg}^2 v$, $v = e^x$.

Варіант 30

1. $a)$ $f(x) = x^3 - x^2 + 1$; $x = -10; -\frac{2}{5}; 0; 7$;

$b)$ $f(x) = x\cos x$; $x = 0; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}$;

$c)$ $5x - y + 3 = 0$; $x = -7; -1; 0; 4; 5$;

$d)$ $\begin{cases} x = t^2 + t, \\ y = t - 2 \end{cases}$ $t = -3; 0; 2; 5; 10$;

$e)$ $y = \begin{cases} x - 3, & -\infty < x \le -1, \\ x^3, & -1 < x \le 0, \\ 5 - x^3, & 0 < x < \infty \end{cases}$ $x = -2; -1; -0,5; 0; 1$;

$f)$ $f(x) = x + \frac{2}{x} + \sqrt{x}$; $f(4) = ?$, $f\left(\frac{1}{9}\right) = ?$, $f(x^4) = ?$, $f\left(\frac{25}{b^2}\right) = ?$, $f(5x) = ?$.

2. $a)$ $y = x^2(1-x)$; $b)$ $y = \ln(x+8)$; $c)$ $y = \frac{x}{2 - x^2}$.

3. $a)$ $y = x^3 - 1$; $b)$ $y = \sqrt{x+2}$.

4. $a)$ $y = \ln^2 \sin(x-1)$; $b)$ $y = u^3$, $u = \operatorname{tg} v$, $v = x^2$.

Завдання 2

1, 2, 3, 4, 5, 6 – обчислити границі функції;

7 – порівняти нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$;

8, 9 – дослідити функції на неперервність. Знайти точки розриву функцій і визначити їх тип. Зобразити поведінку функції в околі точки розриву (приклад 8) і побудувати графік функції (приклад 9).

Варіант 1

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2}{n^2+1}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+4}}{7n\sqrt{n}+1}$. 3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot\sin 3x}{\mathrm{tg}^2\, 5x}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-5}\right)^{3x-1}$. 6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{tg}\, x$.

7. $\alpha(x)=\sin 3x$, $\beta(x)=\sqrt{1+x}-1$, якщо $x\to 0$.

8. $y=\dfrac{5}{x-1}$. 9. $y=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2, & \text{якщо} \quad x\le 2,\\ x+1, & \text{якщо} \quad x>2.\end{cases}$

Варіант 2

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n+3)^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+5}{\sqrt{n^2+3}}$. 3. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+8x+15}{3x^2+14x-5}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 4x\cdot\sin x}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{x}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\ln x-\ln(x+2)\right)$.

7. $\alpha(x)=\cos x-\cos 2x$, $\beta(x)=1-\cos x$, якщо $x\to 0$.

8. $y=\dfrac{x^2}{x+1}$. 9. $y=\begin{cases}3^{\frac{1}{x-1}}, & \text{якщо} \quad x<1,\\ x-3, & \text{якщо} \quad x\ge 1.\end{cases}$

Варіант 3

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n+1}{5n^2+4}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^4+1}}$. 3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x^2-3x-10}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x-3}$. 6. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x-1\right)\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

7. $\alpha(x)=\sin(x-2)$, $\beta(x)=\sqrt{2+x}-2$, якщо $x\to 2$.

8. $y=\dfrac{1}{1-x^3}$.

9. $y=\begin{cases} x+4, & \text{якщо} \quad x<-1, \\ x^2+2, & \text{якщо} \quad -1\le x\le 1, \\ 2x, & \text{якщо} \quad x\ge 1. \end{cases}$

Варіант 4

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2+(n-2)^2}{n^2+2n-1}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+4}{\sqrt{4n+3}}$.
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+7x-8}{x^3-1}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^3}$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{3x}-x}$.
7. $\alpha(x)=\operatorname{arctg}3x$, $\beta(x)=x$, якщо $x\to 0$.
8. $y=\dfrac{1}{(x+1)^2}$.
9. $y=\begin{cases} 2^{\frac{1}{x-1}}, & \text{якщо} \quad x<1, \\ x-2, & \text{якщо} \quad x\ge 1. \end{cases}$

Варіант 5

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+n+5}{2n^3+1}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+5n+1}}{n+4}$.
3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{2x^2+x-10}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\operatorname{ctg}^2 3x$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+3}\right)^{x+2}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+2\sin x\right)^{\frac{1}{x}}$.
7. $\alpha(x)=\operatorname{tg}\pi x$, $\beta(x)=x+2$, якщо $x\to -2$
8. $y=\dfrac{1}{4-x^2}$.
9. $y=\begin{cases} 2x+1, & \text{якщо} \quad x\le 0, \\ \sin x, & \text{якщо} \quad x>0. \end{cases}$

Варіант 6

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+4}{n^2+n}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9n^2+1}+\sqrt{n^2+4}}{2n+3}$.
3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x^2}{\sin 2x\cdot\operatorname{tg}4x}$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+1}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}$.
7. $\alpha(x)=\operatorname{arctg}2x$, $\beta(x)=\sin 3x$, якщо $x\to 0$.
8. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.
9. $y=\begin{cases} 9^{\frac{1}{x-2}}, & \text{якщо} \quad x<2, \\ x, & \text{якщо} \quad x\ge 2. \end{cases}$

Варіант 7

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-5n+4}{2n^2-3n+7}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{n}+4}{\sqrt{4n^3+5n+1}}$.
3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^4+2x+1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 4x}{5x^2}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+2}\right)^x$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty} x\big(\ln(x+2)-\ln(x+5)\big)$.

7. $\alpha(x)=\sin x-\cos x$, $\beta(x)=1-\operatorname{tg} x$, якщо $x\to\dfrac{\pi}{4}$.

8. $y=\dfrac{16}{x^2(x-4)}$. 9. $y=\begin{cases} x+2, & \text{якщо} \quad x\le -1, \\ x^2+1, & \text{якщо} \quad -1<x\le 1, \\ 3-x, & \text{якщо} \quad x>1. \end{cases}$

Варіант 8

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-5n+1}{3n+7}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^5+4}}{7n\sqrt[3]{n^2}+1}$. 3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{5x^2}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+x+1}{x^3+2}\right)^{2x}$. 6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{5x}-x}{x-5}$.

7. $\alpha(x)=1-x^2$, $\beta(x)=\sin\pi x$, якщо $x\to 1$.

8. $y=4^{\frac{1}{x^2-1}}$. 9. $y=\begin{cases} -x, & \text{якщо} \quad x\le 0, \\ -(x-1)^2, & \text{якщо} \quad 0<x<2, \\ x-3, & \text{якщо} \quad x\ge 2. \end{cases}$

Варіант 9

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-(n-1)^2}{(n+1)^2-n^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{8n^3+3n^2-1}}{5n+1}$. 3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\operatorname{tg}^2 3x}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$. 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$.

7. $\alpha(x)=1-x$, $\beta(x)=\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{2}$, якщо $x\to 1$.

8. $y=\dfrac{x}{x^3-8}$. 9. $y=\begin{cases} x+2, & \text{якщо} \quad x\le 3, \\ 4^{\frac{1}{3-x}}, & \text{якщо} \quad x>3. \end{cases}$

Варіант 10

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3-2n^2+41}{n^3+10n^2+12}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n+3}{\sqrt{n^4+n^3+1}}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{\operatorname{tg}5x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{3x^2+4x-7}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{2x+1}$. 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\cdot\sin x}$.

7. $\alpha(x) = 1 - \sin\frac{x}{2}$, $\beta(x) = \pi - x$, якщо $x \to \pi$.

8. $y = 2^{-\frac{1}{x^2}}$.

9. $y = \begin{cases} \cos x, & \text{якщо} \quad x \le 0, \\ x^2 + 1, & \text{якщо} \quad 0 < x < 1, \\ x, & \text{якщо} \quad x \ge 1. \end{cases}$

Варіант 11

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+7)^2 + (n+2)^2}{(3n+2)^2 + (4n+1)^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n+7}}{4n+3}$. 3. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5x - 14}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{6x^2}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x-9}\right)^{2x-3}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{x+8} - \sqrt{7x+2}}$.

7. $\alpha(x) = 1 - 2\cos x$, $\beta(x) = \pi - 3x$, якщо $x \to \frac{\pi}{3}$.

8. $y = \frac{x+3}{9 - x^2}$.

9. $y = \begin{cases} -2x, & \text{якщо} \quad x \le 0, \\ x^2 + 1, & \text{якщо} \quad 0 < x \le 1, \\ x, & \text{якщо} \quad x > 1. \end{cases}$

Варіант 12

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^4 + n - 5}{4n^4 - 2n - 11}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+7}{\sqrt{n^2 + 2n + 3}}$.

3. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^2 + 3x + 2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 8x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x+1}{3x-5}\right)^{2x+1}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1} (9x - 8)^{\frac{1}{1-x}}$.

7. $\alpha(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$, $\beta(x) = x^3$, якщо $x \to 0$.

8. $y = \frac{1}{x(x+6)}$.

9. $y = \begin{cases} 4^{\frac{1}{x-1}}, & \text{якщо} \quad x < 1, \\ x + 2, & \text{якщо} \quad x \ge 1. \end{cases}$

Варіант 13

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3 - x^2 + 2x + 1}{6x^3 + x^2 - x + 1}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3 + 3n + 1}}{n\sqrt{n} + 2}$. 3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos 4x}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x^2}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{6x + 5x^2} - \sqrt{5x^2 + 1}\right)$.

7. $\alpha(x) = 1 - \cos x$, $\beta(x) = x^2$, якщо $x \to 0$.

8. $y=\dfrac{4-x}{x(x-2)}$.

9. $y=\begin{cases}2x+1, & \text{якщо} \quad x\le 0,\\ x^2-3, & \text{якщо} \quad x>0.\end{cases}$

Варіант 14

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+10)^2+(2n+1)^2}{(n+6)^2-(n+1)^2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt{n^3}}{5n\sqrt{n}+3}$.

3. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cdot\operatorname{tg}2x}{1-\cos x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-5x}{3x^2-5x+7}\right)^{x+1}$.

6. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+3\sin^2 x\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

7. $\alpha(x)=x^2-25$, $\beta(x)=\sqrt{4+x}-3$, якщо $x\to5$.

8. $y=\dfrac{2x+3}{x^2-25}$.

9. $y=\begin{cases}2x-1, & \text{якщо} \quad x\le 1,\\ 3^{\frac{1}{1-x}}, & \text{якщо} \quad x>1.\end{cases}$

Варіант 15

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-3)^2-(n+5)^2}{(n+1)^2+(2n+3)^2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{n}+4}{\sqrt{4n^3+5n+1}}$.

3. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\cdot\sin5x}{\operatorname{tg}^2 3x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x-3}{10x-1}\right)^{5x}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\ln x-\ln(x+2)\right)$.

7. $\alpha(x)=\sin5x$, $\beta(x)=\sin2x$, якщо $x\to0$.

8. $y=\dfrac{7}{x-3}$.

9. $y=\begin{cases}3^{\frac{1}{x}}, & \text{якщо} \quad x<0,\\ x+2, & \text{якщо} \quad x\ge 0.\end{cases}$

Варіант 16

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^2-2n}{(n+1)^2-(n+4)^2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+5n+1}}{n+4}$.

3. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3x-10}{2x^2+x-10}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\cos5x-\cos x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x-2}\right)^{x}$.

6. $\lim\limits_{x\to2}\left(2x-3\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

7. $\alpha(x)=\sin\pi x$, $\beta(x)=1-x^2$, якщо $x\to1$.

8. $y=5^{\frac{1}{x(x-2)}}$.

9. $y=\begin{cases}x^2-10, & \text{якщо} \quad x\le 4,\\ 3^{\frac{1}{4-x}}, & \text{якщо} \quad x>4.\end{cases}$

Варіант 17

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2}{(n+1)^2-(n-1)^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{n}+n+5}{\sqrt{n^3+2}}$. 3. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{20+x-x^2}{3x^2-11x-20}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\,3x}{2x^2}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x+5}\right)^{2x}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

7. $\alpha(x)=\sqrt{x}-1$, $\beta(x)=\sin\pi x$, якщо $x\to1$.

8. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}}$. 9. $y=\begin{cases}2x+1, & \text{якщо} \quad x\le0,\\ x^2-3, & \text{якщо} \quad x>0.\end{cases}$

Варіант 18

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^2+(n+4)^2}{(n+3)^2-(n+4)^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+4}{\sqrt{4n+3}}$. 3. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-3x-18}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 5x}{10x\cdot\mathrm{tg}\,3x}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+5}\right)^{x+4}$. 6. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{9x+7}-4}{x^2-1}$.

7. $\alpha(x)=x^2-1$, $\beta(x)=\sin2\pi x$, якщо $x\to1$.

8. $y=\dfrac{x+3}{x^2-3x+2}$. 9. $y=\begin{cases}-x, & \text{якщо} \quad x\le0,\\ x^2, & \text{якщо} \quad 0<x\le2,\\ x+1, & \text{якщо} \quad x>2.\end{cases}$

Варіант 19

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n+2)^2}{(n+4)^2+(n+5)^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^5+4}}{7n\sqrt[3]{n^2}+1}$. 3. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4-x^2}{x^2+9x-22}$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos2x-1}{x\cdot\sin2x}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+4}\right)^{2x+5}$. 6. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+3x^2\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

7. $\alpha(x)=x-8$, $\beta(x)=\sqrt[3]{x}-2$, якщо $x\to8$.

8. $y=\dfrac{1}{x^2+x-6}$. 9. $y=\begin{cases}2x-5, & \text{якщо} \quad x\le5,\\ 8^{\frac{1}{5-x}}, & \text{якщо} \quad x>5.\end{cases}$

Варіант 20

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)^2-(n-2)^2}{n^2+2n-3}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^6+3n+1}}{5n^2+1}$. 3. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4x^2-5x-21}{2x^2-3x-9}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\sin^2 5x}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+6}\right)^{2x+3}$. 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{2x}+2\right)+\ln 2x}{x}$.

7. $\alpha(x)=3-\sqrt{5+x}$, $\beta(x)=\sin\dfrac{\pi x}{4}$, якщо $x\to 4$.

8. $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$. 9. $y=\begin{cases}-x, & \text{якщо } x\le 0,\\ \sin x, & \text{якщо } 0<x\le\pi,\\ x-2, & \text{якщо } x>\pi.\end{cases}$

Варіант 21

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n-2)^2}{(n+4)^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{\sqrt{n^2+1}}$. 3. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2+2x-48}{36-x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\operatorname{tg} x}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{2x+3}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty}2x\big(\ln(x+3)-\ln x\big)$.

7. $\alpha(x)=1-\sqrt{5-x}$, $\beta(x)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$, якщо $x\to 4$.

8. $y=\dfrac{1}{x(x+4)}$. 9. $y=\begin{cases}x+3, & \text{якщо } x\le 1,\\ 4^{\frac{1}{1-x}}, & \text{якщо } x>1.\end{cases}$

Варіант 22

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2}{(n+1)^2-(n-1)^2}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+6}}{5n\sqrt{n}+1}$. 3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+7x+5}{x^3+1}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^4 2x}{x^2}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x^2}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2}\big(\ln(x-1)-\ln x\big)$.

7. $\alpha(x)=x^2-2x$, $\beta(x)=\sqrt{2x+5}-3$, якщо $x\to 2$.

8. $y=\dfrac{x+2}{(x-1)^2}$. 9. $y=\begin{cases}-(x+1), & \text{якщо } x\le -1,\\ (x+1)^2, & \text{якщо } -1<x\le 0,\\ x, & \text{якщо } x>0.\end{cases}$

Варіант 23

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^2+5n^2}{3n^2+4n}$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+1}{\sqrt{n^4+1}}$. 3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+3x+2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 6x}{x\cdot\sin x}$. 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-7}\right)^{3x+2}$. 6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2+x-30}{\sqrt{3x+1}-4}$.

7. $\alpha(x)=2-\sqrt{9-x}$, $\beta(x)=\sin\frac{2\pi}{5}x$, якщо $x\to 5$.

8. $y=\frac{x+2}{x^2-9}$.

9. $y=\begin{cases} x^2-2, & \text{якщо } x\le 2,\\ 2^{\frac{1}{2-x}}, & \text{якщо } x>2.\end{cases}$

Варіант 24

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+2n)^2-8n^2}{(1+2n)^2+4n^2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+5}{\sqrt{5n+2}}$.

3. $\lim\limits_{x\to -4}\frac{5x^2+9x-44}{2x^2+5x-12}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 5x}{1-\cos x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x}\right)^x$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty} x\big(\ln(x+2)-\ln(x+3)\big)$.

7. $\alpha(x)=x^2-1$, $\beta(x)=\operatorname{tg}\pi x$, якщо $x\to 1$.

8. $y=\frac{1}{(x+3)^2}$.

9. $y=\begin{cases} -x^2, & \text{якщо } x\le 0,\\ \operatorname{tg}x, & \text{якщо } 0<x\le\frac{\pi}{4},\\ 2, & \text{якщо } x\ge\frac{\pi}{4}.\end{cases}$

Варіант 25

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n+1)^2}{(n-1)^3-(n+1)^3}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n+1}}{n+2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2+4x-39}{9-x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x+\sin 2x}{3x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x-5}\right)^{x+2}$.

6. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2+x}{1-\sqrt{x+3}}$.

7. $\alpha(x)=\cos 5x-\cos x$, $\beta(x)=\sqrt{4+x}-2$, якщо $x\to 0$.

8. $y=\frac{2x+1}{1-x^3}$.

9. $y=\begin{cases} 2^{\frac{1}{x+3}}, & \text{якщо } x<-3,\\ x+5, & \text{якщо } x\ge -3.\end{cases}$

Варіант 26

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(6-n)^2+(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+1}+\sqrt{n^2+3}}{5n+2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2+x-21}{x^2-9}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin 2x\cdot\operatorname{tg}x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x-7}{6x+4}\right)^{3x+2}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\ln(\frac{x}{3}+1)-\ln\frac{x}{3}\right)$

.

7. $\alpha(x)=\cos 3x-\cos x$, $\beta(x)=\sin^2 x$, якщо $x\to 0$.

8. $y=\dfrac{4x^2+9}{x}$.

9. $y=\begin{cases} x^2-2, & \text{якщо} \quad x\le 2, \\ x+3, & \text{якщо} \quad x>2. \end{cases}$

Варіант 27

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-n)^3+(1+n)^3}{(1+n)^2-(1-n)^2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7+n\sqrt{n}}{\sqrt{4n^3+3n+1}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{27-x^3}{x^2+2x-15}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+1}\right)^{3x-2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$.

7. $\alpha(x)=x^2+2x-3$, $\beta(x)=\sqrt{4+x}-2$, якщо $x\to 1$.

8. $y=\dfrac{1}{(x-3)(x+2)}$.

9. $y=\begin{cases} 2x-3, & \text{якщо} \quad x\le 3, \\ 2^{\frac{1}{3-x}}, & \text{якщо} \quad x>3. \end{cases}$

Варіант 28

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3+n)^3+(4+n)^3}{(3+n)^2-(4+n)^2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{8n^3+5n^2-1}}{2n+1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9x^2-x-34}{x^2+x-6}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x^2\sin 2x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+9}{x}\right)^{2x+5}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

7. $\alpha(x)=x^3-8$, $\beta(x)=1-\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{8}$, якщо $x\to 2$.

8. $y=\dfrac{11}{x^2-1}$.

9. $y=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2, & \text{якщо} \quad x\le 4, \\ x+1, & \text{якщо} \quad x>4. \end{cases}$

Варіант 29

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+(2+n)^2}{(1-n)^2-(1+n)^2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+7n+3}{\sqrt{n^4+n^3+5}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin^2 3x}{\sin^3 5x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-2}{6x-1}\right)^{x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{2x}-5\right)+\ln 2x}{3x}$.

7. $\alpha(x)=\sqrt{x+7}-3$, $\beta(x)=x^2+x-6$, якщо $x\to 2$.

8. $y=\dfrac{1}{x^2+10x+21}$.

9. $y=\begin{cases} x-5, & \text{якщо} \quad x\le 2, \\ 4^{\frac{1}{2-x}}, & \text{якщо} \quad x>2. \end{cases}$

Варіант 30

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n+5}}{4n+7}$.

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-2x-16}{4x^2-16}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\, 9x}{5x^2}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

7. $\alpha(x)=1-\cos^2 x$, $\beta(x)=2x^2$, якщо $x\to 0$.

8. $y=\dfrac{x+5}{x^2-4}$.

9. $y=\begin{cases}\sqrt{x}, & \text{якщо} \quad x<4,\\ 1, & \text{якщо} \quad x\ge 4.\end{cases}$

ПРИКЛАДИ ТЕСТІВ

Теоретичні питання

1. Якщо кожному значенню x із множини X відповідає тільки одне значення y із множини Y, то кажуть:

a) на множині Y задана функція $y=f(x)$;

b) на множині X задана функція $y=f(x)$;

c) на множині X задана функція $x=f(y)$;

d) на множині Y задана функція $x=f(y)$.

2. Якщо функція задана у вигляді $z=\varphi(y)$, то:

a) y – аргумент, z – функція;

b) y – функція, z – аргумент;

c) $\varphi(y)$ – аргумент, z – функція;

d) y – аргумент, $z(\varphi)$ – функція.

3. Нерівність $|x|>a$ еквівалентна нерівностям:

a) $-a<x<a$; b) $x>-a, x>a$; c) $x<-a, x>a$; d) $x<-a, x<a$.

4. Нерівність $|x|<a$ еквівалентна нерівностям:

a) $a<x<-a$; b) $-a\le x\le a$; c) $x<-a, x>a$; d) $-a<x<a$.

5. Область визначення функції $y=f(x)$ це:

a) множина значень x, для яких функція $y=f(x)$ додатна;

b) множина значень x, для яких функція $y=f(x)$ існує;

c) множина значень x, для яких функція $y=f(x)$ не дорівнює нулю;

d) множина значень y, для яких функція $y=f(x)$ існує.

6. Функція $y=f(x)$ називається парною, якщо для будь-яких x:

a) $f(-x) = f(x)$ і її графік симетричний відносно початку координат;

b) $f(-x) = -f(x)$ і її графік симетричний відносно початку координат;

c) $f(-x) = f(x)$ і її графік симетричний відносно осі *Ox*;

d) $f(-x) = f(x)$ і її графік симетричний відносно осі *Oy*.

7. Функція $y = f(x)$ називається спадною на деякому інтервалі, якщо для будь-яких значень x_1 і x_2 із інтервалу таких, що:

a) $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$;

b) $x_1 \le x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$;

c) $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$;

d) $x_1 > x_2$, виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.

8. Функція $y = f(x)$ називається монотонною на деякому інтервалі, якщо на цьому інтервалі:

a) функція зростаюча;

b) функція зростаюча або спадна;

c) функція спадна;

d) функція стала.

9. Яка з перелічених функцій буде обмеженою?

a) $y = \mathrm{tg}\, x$; b) $y = \cos x$; c) $y = \ln x$; d) $y = x^3$.

10. Яка з перелічених функцій буде зростаючою?

a) $y = \log_3 x$; b) $y = -x$; c) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; d) $y = 3$.

11. Задана функція $y = 3^x$. Тоді обернена до неї функція буде мати вигляд:

a) $y = \frac{1}{3^x}$; b) $x = 3^y$; c) $x = \log_3 y$; d) $x = \frac{1}{3^y}$.

12. Графік функції $y = f(x) + a$ ($a > 0$) можна одержати із графіка функції $y = f(x)$, якщо його паралельно зсунути:

a) вздовж осі *Ox* ліворуч;

b) вздовж осі *Ox* праворуч;

c) вздовж осі *Oy* униз;

d) вздовж осі *Oy* догори.

13. Графік функції $y = f(x + a)$ (де $a < 0$) можна одержати із графіка функції $y = f(x)$, якщо його паралельно зсунути:

a) вздовж осі *Ox* ліворуч;

b) вздовж осі *Ox* праворуч;

c) вздовж осі *Oy* униз;

d) вздовж осі *Oy* догори.

14. Послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно малою, якщо

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \infty$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0{,}00001$.

15. Якщо $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція, а $f(x)$ – обмежена, то їх добуток:

a) буде нескінченно малою функцією;
b) буде обмеженою функцією;
c) буде прямувати до -∞;
d) буде сталою величиною.

16. Яка з перелічених послідовностей буде нескінченно малою?

a) $x_n = (-1)^n \cdot (n+5)$; b) $x_n = (n+5)^{-1}$;

c) $x_n = \dfrac{1}{e^{100000}}$; d) $x_n = \cos\dfrac{\pi n}{4}$.

17. Яка з перелічених послідовностей буде нескінченно великою?

a) $x_n = 5^{100000}$; b) $x_n = n \cdot \cos\dfrac{\pi n}{2}$; c) $x_n = 2^n$; d) $x_n = 2^{-n^2}$.

18. Який з перелічених нижче виразів не буде невизначеністю?

a) $\infty - \infty$; b) ∞^0; c) $\dfrac{\infty}{\infty}$; d) $\dfrac{\infty}{0}$.

19. Перша чудова границя має вигляд:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 0$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = \text{const}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

20. Нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються еквівалентними, якщо:

a) $\lim\left[\alpha(x)\cdot\beta(x)\right] = 0$; b) $\lim\left[\alpha(x)\cdot\beta(x)\right] = 1$;

c) $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$; d) $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.

Відповіді: 1. b); 2. a); 3. c); 4. d); 5. b); 6. d); 7. c); 8. b); 9. b); 10. a); 11. c); 12. d); 13. b); 14. b); 15. a); 16. b); 17. c); 18. d); 19. d); 20. c).

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДІВ

1. Чому дорівнює $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+5x-1}{3x^2+2}$?

Варіанти відповіді: a) 0; b) ∞; c) $\dfrac{2}{3}$; d) $-\dfrac{1}{2}$.

2. Чому дорівнює $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+4}{8x^2+2x+1}$?

Варіанти відповіді: a) 0; b) ∞; c) $\dfrac{3}{8}$; d) 4.

3. Чому дорівнює $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}} \dfrac{4x-1}{2x+x^2}$?

Варіанти відповіді: a) 2; b) 0; c) ∞; d) –1.

4. Чому дорівнює $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin 4x}$?

Варіанти відповіді: a) 0; b) $\dfrac{1}{4}$; c) 4; d) 1.

5. Чому дорівнює $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin 2x}{x}$?

Варіанти відповіді: a) 2; b) $\frac{1}{2}$; c) 0; d) ∞.

6. Чому дорівнює $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$?

Варіанти відповіді: a) 0; b) 3; c) -2; d) 1.

7. Чому дорівнює $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$?

Варіанти відповіді: a) $\dfrac{1}{4}$; b) 4; c) 0; d) -2.

8. Чому дорівнює $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$?

Варіанти відповіді: a) $3e$; b) 3; c) $\dfrac{1}{3}$; d) e^3.

9. Чому дорівнює $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{5}{x}\right)^{x}$?

Варіанти відповіді: a) $5e$; b) $\frac{1}{e^5}$; c) e^5; d) $\frac{e}{5}$.

10. Чому дорівнює $\lim\limits_{x\to 0} (1+8x)^{\frac{2}{x}}$?

Варіанти відповіді: a) $16e$; b) 16; c) $\frac{e}{16}$; d) e^{16}.

Відповіді: 1. c); 2. a); 3. b); 4. b); 5. c); 6. b); 7. a); 8. d); 9. b); 10. d).

ДОДАТОК 1. КОРИСНІ ФОРМУЛИ

Таблиця значень тригонометричних функцій sinα , cosα , tgα , ctgα для деяких кутов

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$180°$	$270°$	$360°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	0	–	0
$\mathrm{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	–	0	–

Формули скороченого множення

Формула квадрата суми: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Формула квадрата різниці: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Формула куба суми: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Формула куба різниці: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Формула різниці квадратів: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Формула суми кубів: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

Формула різниці кубів: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Розв’язання квадратних алгебраїчних рівнянь

Для розв’язання повного квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ треба обчислити дискримінант: $D = b^2 - 4ac$.

1) Якщо D>0, то рівняння має два різних дійсних кореня x_1 та x_2, які обчислюються за формулою: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

2) Якщо D=0, то рівняння має два однакових кореня $x_1 = x_2$, які обчислюються за формулою: $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$.

3) Якщо D<0, то рівняння не має дійсних коренів.

Теорема Вієта

Сума коренів зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$: $x_1 + x_2 = -p$, добуток коренів цього рівняння: $x_1 \cdot x_2 = q$.

Дії з логарифмами

Логарифмом числа N за заданою основою *a* називають показник степеня *x*, до якого треба піднести основу, для того, щоб отримати число N:

$$\log_a N = x, \quad a > 0, a \neq 1.$$

З означення $\log_a N = x$ можна отримати рівність $a^x = N$..

Властивості логарифмів:

1) будь-яке додатне число за будь-якою основою a $(a > 0, a \neq 1)$ має тільки один логарифм;

2) за будь-якою основою a $(a > 0, a \neq 1)$ від'ємні числа не мають логарифмів;

3) за будь-якою основою a $(a > 0, a \neq 1)$ $\log_a 1 = 0$;

4) логарифм самої основи дорівнює 1;

5) логарифм добутку двох чисел $x_1, x_2, (x_1 > 0, x_2 > 0)$ за будь-якою основою a $(a > 0, a \neq 1)$ дорівнює сумі логарифмів цих чисел за тією ж основою a:

$$\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2;$$

6) логарифм частки двох чисел $x_1, x_2, (x_1 > 0, x_2 > 0)$ за будь-якою основою a $(a > 0, a \neq 1)$ дорівнює різниці логарифмів цих чисел за тією ж основою a:

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2;$$

7) логарифм степеня дорівнює добутку показника степеня m на логарифм його основи: $\log_a x^m = m \log_a x, x > 0, a > 0, a \neq 1$;

8) для будь-яких чисел $x > 0, a > 0, a \neq 1$: $\log_{a^m} x = \frac{\log_a x}{m}$;

9) для будь-яких чисел $x > 0, a > 0, a \neq 1, m \neq 0$: $\log_a \sqrt[m]{x} = \frac{\log_a x}{m}$;

10) для будь-яких чисел $x > 0, a > 0, a \neq 1, m \neq 0$: $\log_{a^m} x^m = \log_a x$;

11) для будь-яких чисел $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$: $\log_a b \cdot \log_b a = 1$;

12) для будь-яких чисел $x > 0, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$: $\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b x$.

ДОДАТОК 2. НАТУРАЛЬНІ ЛОГАРИФМИ

Означення. Логарифм деякого числа N, який обчислюється по основі **e**, називається натуральним логарифмом цього числа й позначається через $\ln N$, тобто $\log_e N = \ln N$.

У багатьох випадках зручніше використовувати натуральні логарифми, ніж, наприклад, знайомі із середньої школи десяткові логарифми. Знайдемо формулу, яка зв'язує натуральні й десяткові логарифми.

За означенням $N = e^{\ln N}$. Прологарифмуємо цю рівність по основі 10.

$$\lg N = \lg e^{\ln N} \quad \text{або} \quad \lg N = \ln N \cdot \lg e.$$

У таблицях десяткових логарифмів знайдемо $\lg e \approx 0,43429\ldots$ Тому

$$\lg N \approx 0,434 \cdot \ln N = M \cdot \ln N. \qquad (*)$$

Число $\boxed{M \approx 0,434}$ називається **модулем переходу** від натуральних логарифмів до десяткових.

Ця формула дозволяє знаходити десятковий логарифм числа N, якщо відомий натуральний логарифм N. Рівність (*) можна записати в іншому вигляді:

$$\ln N = \frac{1}{M} \cdot \lg N \cong \frac{\lg N}{0,434} = \frac{1}{0,434} \cdot \lg N \approx 2,302 \lg N.$$

Тобто це формула переходу від десяткових до натуральних логарифмів.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. Вища математика : підручник. 2-ге вид., стереотип. Київ : Техніка, 2000. Ч. 1 : Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення. 592 с.

2. Давидов М. О. Курс математичного аналізу : підручник. Київ : Вища школа, 1990. Ч. 1 : Функції однієї змінної. 383 с.

3. Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз : підручник : у 2 ч. Київ : Вища школа, 1992. Ч. 1. 494 с.

4. Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. Математичний аналіз : підручник : у 2 ч. Київ : Вища школа, 1993. Ч. 2. 375 с.

Навчальне видання

Бусарова Тетяна Миколаївна, Гришечкіна Тетяна Сергіївна,

Звонарьова Ольга Віталіївна, Семенець Галина Іванівна

Вища математика. Математичний аналіз. Частина 1

Навчальний посібник

Електронне видання

Комп’ютерна верстка О. О. Котова
Дизайн обкладинки Т. С. Гришечкіна

Експертний висновок склав д-р техн. наук, проф. В. М. Кузнецов

Зареєстровано НМВ УДУНТ (реєстр. № 657 від 18.09.2023)

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 7,09. Обл.-вид. арк. 2,14.
Зам. №101

Видавець: Український державний університет науки і технологій.
вул. Лазаряна, 2, ауд. 2216, ауд. 263 (наукова бібліотека)
м. Дніпро, 49010.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 7709 від 14.12.2022

2023

УДУНТ

ISBN 978-617-8314-46-0