

**О. П. Єгоров, М. О. Рибальченко,  
М. В. Михайловський, І. О. Маначин**

**Цифрова обробка сигналів.  
Комп'ютерні методи цифрової  
обробки сигналів в системах  
автоматичного управління**



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ НАУКИ І ТЕХНОЛОГІЙ

О. П. Єгоров, М. О. Рибальченко,  
М. В. Михайловський, І. О. Маначин

Цифрова обробка сигналів.  
Комп'ютерні методи цифрової обробки  
сигналів в системах автоматичного управління

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ДНІПРО  
2024

УДК 681.5.011(075.8)

Ц 75

Авторський колектив:

*Єгоров О. П., Рибальченко М. О., Михайловський М. В., Маначин І. О.*

Рекомендовано Радою якості освітньої діяльності УДУНТ

*Протокол № 10 від «18» червня 2024 р.*

**Ц 75** Цифрова обробка сигналів. Комп'ютерні методи цифрової обробки сигналів в системах автоматичного управління : навч. посіб. / О. П. Єгоров, М. О. Рибальченко, М. В. Михайловський, І. О. Маначин ; за ред. канд. техн. наук, доц. О. П. Єгорова ; Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Електрон. вид. – Дніпро : УДУНТ, 2024. – 132 с.

**ISBN 978-617-8314-38-5 (PDF)**

У матеріалах навчального посібника розглянуто проблеми цифрової обробки інформації на основних етапах отримання інформації, опрацювання керуючого впливу або прийняття рішення. Розглянуто математичні основи дискретного перетворення Фур'є і вейвлет-перетворення.

Теоретичні проблеми цифрової обробки сигналів підкріплені практичними роботами з прямого перетворення Фур'є детермінованого сигналу, із застосування дискретного перетворення Фур'є для адаптивної фільтрації сигналів та з частотного аналізу звукового сигналу.

Призначений для опанування освітньої компоненти «Цифрова обробка сигналів» за спеціальністю 174 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» для ОПП «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» другого (магістерського) рівня вищої освіти.

Лл. 102, табл. 4, бібліогр. 11 назв.

**УДК 681.5.011(075.8)**



Цей твір ліцензовано на умовах Ліцензії Creative Commons [«Attribution-NonCommercial-ShareAlike» 4.0 International \(CC BY-NC-SA 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) ([«Із зазначенням авторства – Некомерційна – Поширення на тих самих умовах» 4.0 Міжнародна](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/))

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
1. ІСТОРІЯ РОЗВИТКУ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ ТА ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ ІНФОРМАЦІЇ.....	8
1.1. Перші обчислювальні пристрої.....	8
1.2. Створення першого комп'ютера IBM PC.....	13
1.3. Розробка операційної системи.....	14
2. МЕТОДИ ПЕРЕДАЧІ ІНФОРМАЦІЇ ТА ВИДИ СИГНАЛІВ.....	15
2.1. Передача інформації.....	15
2.2. Види сигналів.....	18
2.3. Представлення сигналів.....	21
2.4. Вимірювання сигналів.....	30
2.5. Типові цифрові послідовності.....	34
3. ЧАСТОТНА ФОРМА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СИГНАЛІВ.....	37
3.1. Частотна форма подання детермінованих сигналів.....	37
3.2. Індивідуальне завдання № 1. Пряме перетворення Фур'є детермінованого сигналу.....	43
3.3. Визначення частотного спектра дискретного сигналу.....	44
3.4. Побудова частотного спектра сигналу за допомогою дискретного перетворення Фур'є в пакеті Excel.....	48
3.5. Побудова частотного спектра сигналу за допомогою дискретного перетворення Фур'є в пакеті Matlab.....	50
4. ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ.....	56
4.1. Властивість вейвлетів.....	56
4.2. Вейвлет-функції.....	61
4.3. Частотний аналіз сигналів за допомогою вейвлет-перетворення.....	63
5. ЗАСТОСУВАННЯ ДИСКРЕТНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ДЛЯ АДАПТИВНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ СИГНАЛІВ.....	72
6. РАДІОЛОКАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП ВИМІРЮВАННЯ ВІДСТАНІ.....	79
6.1. Радіолокаційна апаратура ближньої дії.....	79
6.2. Цифрова обробка сигналу ближньої радіолокації.....	83
6.3. Цифрова обробка сигналу дальньої радіолокації.....	87
6.4. Індивідуальне завдання № 2. Частотний аналіз звукового сигналу.....	90
7. ЦИФРОВА ОБРОБКА ЧАСОВИХ СИГНАЛІВ.....	95
7.1. Випадковий процес як модель сигналу.....	95
7.2. Випадкові величини та закони їх розподілу.....	100
7.3. Моменти та середні значення реалізацій випадкового процесу.....	106
7.4. Оцінювання середніх значень випадкових величин.....	107
7.5. Нормальний (гаусовський) шум.....	108

7.6. Індивідуальне завдання № 3. Випадкові величини та їх закони розподілу. Моменти та середні значення реалізації випадкового процесу.....	111
<b>8. ОСНОВНІ ФУНКЦІЇ МОВИ ПРОГРАМУВАННЯ MATLAB ДЛЯ ОБРОБКИ ДАНИХ.....</b>	<b>113</b>
8.1. Поняття про суцільне та вибіркоче спостереження.....	113
8.2. Знаходження максимального та мінімального елементів масиву та стандартного відхилення.....	116
8.3. Оператори MatLab.....	117
8.4. Кореляційні функції.....	119
8.5. Приклад використання кореляції для визначення місцезнаходження витоку у трубопроводі.....	125
<b>БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК.....</b>	<b>129</b>
<b>ДОДАТОК.....</b>	<b>130</b>



## ВСТУП

Теорія цифрової обробки сигналів – один з наукових напрямів ХХІ століття, що найбільш активно розвиваються, що поєднує наукові дослідження та інженерну практику. Розвиток цього напрямку призвів до революційних змін у цілій низці областей людської діяльності – комунікації, обробці зображень для медицини, радіолокації, обробці звуку тощо.

Цифрова обробка сигналів (ЦОС, DSP – англ. digital signal processing) – способи обробки сигналів на основі чисельних методів з використанням цифрової обчислювальної техніки.

Кожна прикладна сфера застосовує свою техніку цифрової обробки сигналів – алгоритми, математичний апарат, спеціальні технології. Звісно, успіхи у розвитку окремих галузей діяльності істотно впливають на розвиток загальної теорії цифрової обробки сигналів. Тому вивчення теорії цифрової обробки сигналів можна розділити на два основні напрями:

- вивчення загальних положень теорії ЦОС;
- вивчення спеціальних технологій, що відповідають конкретній галузі застосування.

На відміну з інших напрямів комп'ютерних наук, теорія цифрової обробки сигналів працює з унікальним типом даних – сигналами. У більшості випадків сигнали є інформацією різноманітних датчиків, що вимірюють параметри реального світу – сейсмічні коливання, видимі зображення предметів, звукові коливання та інші процеси.

По справжньому, теорія ЦОС стала застосовуватися у 1960 – 1970 роках, коли з'явилися перші обчислювальні машини. Перші комп'ютери були досить громіздкими, дорогими, тому використовувалися для вирішення завдань у найважливіших областях, до яких відносяться:

- радіолокація (радари) та ехолокація (сонари) – для забезпечення завдань державної безпеки;
- нафтовидобуток та нафтопереробка – галузь діяльності з великими капіталовкладеннями та часткою прибутку;
- космічні дослідження – через унікальність досліджуваних сигналів (відсутність повторюваності або дуже великий період повторюваності);
- медичне обладнання (томографія, ультразвукова локація тощо) – питання, пов'язані з життям людини.

Революційний розвиток комп'ютерної техніки у 1980 – 1990 роках суттєво розширив галузі застосування теорії ЦОС. Зараз цифрова обробка сигналів використовується не тільки для вирішення державних або військових завдань, а й у багатьох комерційних та технічних галузях діяльності людини – мобільна телефонія, електронна пошта, системи автоматичного управління, у тому числі виконаних на базі теорій штучного інтелекту та ін.

- космічні дослідження – обробка зображень, стиснення даних, створення різноманітних інтелектуальних датчиків;
- медицина – діагностика (томографія, рентгеноскопія, ультразвук та ін.), аналіз електрокардіограм, зберігання та обробка інформації;
- комерційні напрями – стиснення звуку та зображення для мультимедіа-додатків, створення спецефектів для відео, проведення відеоконференцій та ін.;
- телефонія – стиснення голосу та даних, зменшення впливу відбитого сигналу (ефект луни), комутація сигналів, фільтрація;
- військова техніка – радіолокація, ехолокація (сонари), створення інтелектуальної зброї, кодування систем зв'язку;
- промисловість – розвідка нафти та корисних копалин, контроль та управління різними процесами, неруйнівний контроль, різні системи проектування;
- наукові напрями – сейсмографія, аналіз та обробка даних, спектральний аналіз, моделювання різних процесів.

Відповідно змінюється і ставлення до теорії ЦОС як до науки. Якщо у 1980 роках це була дисципліна, яку вивчали лише науковці, а в 1990 роках її стали викладати для деяких інженерних спеціальностей, то зараз це базова дисципліна, необхідна для підготовки наукових та інженерних кадрів для більшості галузей людської діяльності.

Теорія цифрової обробки сигналів дуже тісно пов'язана з іншими дисциплінами (іноді складно провести чітку межу між ними). До таких дисциплін, наприклад, відносяться:

- теорія передачі інформації;
- чисельний аналіз;
- теорія ймовірності та статистичний аналіз;
- теорія вимірювань;
- аналогова електроніка;
- цифрова електроніка.

Складність технології створення мікропроцесорних систем управління та обробки інформації потребує високого рівня професійної підготовки бакалаврів та магістрів у галузі ЦОС. Радикально змінюється характер роботи інженера – вона дедалі більше зводиться до комп'ютерного моделювання та проектування.

Базова підготовка з ЦОС передбачає вивчення теорії, технологій комп'ютерного моделювання та реалізації алгоритмів на сучасній цифровій елементній базі. В цілому, це дає системне уявлення про технологію створення soft- та hard-продуктів.

Даний навчальний посібник призначений для студентів, які здобувають ступінь магістра в Українському державному університеті науки і технологій за спеціальністю 174 – автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка на освітній програмі «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології». Матеріал посібника охоплює відповідні розділи обов'язкової для вивчення професійної навчальної дисципліни «Цифрова обробка сигналів», забезпечуючи, зокрема, формування таких визначених стандартом вищої освіти програмних компетентностей, як:

- здатність проведення досліджень на відповідному рівні;
- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;
- здатність застосовувати методи моделювання та оптимізації для дослідження та підвищення ефективності систем і процесів керування складними технологічними та організаційно-технічними об'єктами;
- здатність застосовувати спеціалізоване програмне забезпечення та цифрові технології для розв'язання складних задач і проблем автоматизації та комп'ютерно-інтегрованих технологій;
- здатність застосовувати цифрові технології передачі даних в автоматизованих системах різного рівня та призначення, а також сучасні методи і засоби цифрової обробки, дослідження, аналізу сигналів для вирішення різноманітних прикладних задач.

Відповідно до робочої програми засвоєння навчального матеріалу посібника забезпечує досягнення здобувачами вищої освіти таких очікуваних програмних результатів навчання:

- 1) здійснювати реєстрацію та аналізувати дані, отримані в результаті експерименту, базуючись на розумінні методів та алгоритмів цифрової обробки сигналів;
- 2) застосувати спеціалізоване програмне забезпечення та цифрові технології для обробки сигналів за допомогою дискретного перетворення Фур'є;
- 3) здійснювати цифрову обробку сигналів методами вейвлет-перетворення. Застосовувати методи цифрової фільтрації сигналів в алгоритмах обробки сигналів сучасними технічними засобами;
- 4) встановлювати параметри випадкових сигналів, базуючись на результатах аналізу кореляційної функції та спектральної щільності.

Навчальний матеріал посібника міститься у восьми розділах.

Викладення матеріалу супроводжується значною кількістю прикладів, що полегшує його сприйняття та засвоєння. Подано перелік запитань для самоконтролю.



# 1. ІСТОРІЯ РОЗВИТКУ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ ТА ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ ІНФОРМАЦІЇ

## 1.1. Перші обчислювальні пристрої

Створення перших пристроїв та пристосувань, що полегшують виконання операцій рахунку, відноситься до четвертого століття до нашої ери. В античному світі широко використовувався пристрій «абак», який можна вважати прообразом канцелярських рахівниць.

У 1617 р. шотландський математик Джон Непер створив «палички Непера» – пристрій, який виконує множення багатозначних чисел на однозначні. У XVII сторіччі Блез Паскаль, а пізніше Готфрід Лейбніц створили механічні обчислювальні машини. На відміну від машини Паскаля, яка виконувала тільки додавання та віднімання, машина Лейбніца виконувала також множення та поділ, зведення в ступінь та витяг квадратного кореня. Відомо також створення у 1742-1756 рр. М. В. Ломоносовим механічних лічильників та реєстрів. У 60-90-х роках XIX століття академіком П. Л. Чебишевим було розроблено кілька механічних обчислювачів. У 1874 р. інженер В. Т. Однер створив механічний арифмометр оригінальної конструкції.

Визначний внесок у розвиток обчислювальної техніки зробив англійський математик Чарльз Беббідж (1792-1871 рр.). У 1822 р. він виготовив діючу модель машини, названої ним «різниця», яка дозволяла обчислювати з точністю до восьми знаків значення поліномів другого ступеня. Ця машина відрізнялася від арифмометрів Паскаля та Лейбніца тим, що при переході до розрахунків наступного значення функції не вимагалось втручання людини. У 1833 р. Беббідж задумав створити «аналітичну машину», яка б не тільки виконувати один раз задану дію, а й здійснювати цілу програму обчислень. Машина Беббіджа містила всі основні частини сучасних обчислювальних машин. Дочка Байрона леді Лавлейс розробила перші програми для машини Беббіджа. Вона може вважатися першим програмістом.

Чарльз Беббідж був першим, хто здогадався використовувати для запису команд і чисел у машині набір отворів, що вибиваються певним чином на картці або стрічці. Проект Беббіджа випереджав технічні можливості його реалізації і, тому, не привернув уваги тодішніх інженерів. Лише приблизно через 100 років конструктори повернулися до ідей Ч. Беббіджа.

Важливе місце в історії обчислювальної техніки займає Герман Холлеріт, який використовував для обробки результатів перепису населення США в 1890 році створену ним машину і перфокарти як носії інформації.

З ім'ям Холлерита пов'язано також заснування першої компанії, що спеціалізується на виробництві перфокарт та лічильно-перфораційних пристроїв. Згодом ця фірма була перетворена на фірму IBM.

Незважаючи на те, що всі, здавалося б, передумови для створення швидкодіючих лічильних машин були очевидними, перші ЕОМ з'явилися лише в сорокових роках 20-го століття. Це пояснювалося необхідністю створення як адекватного теоретичного базису, так і відповідних технічних систем, заснованих на радіоелектроніці. Наприкінці 30-х років англійський математик Алан Т'юрінг показав, що різні проблеми можуть бути вирішені за допомогою машин, якщо ці проблеми або завдання можуть бути виражені за допомогою кінцевої кількості операцій. У 1940 р. американському математику Норберту Вінеру приходить думка використовувати в обчислювальних машинах не десяткову систему числення, а двійкову. У цьому випадку будь-яке число можна записати лише за допомогою двох цифр – одиниці і нуля. З того часу двійкова система числення, так само як і бінарна логіка (розроблена Джорджем Булем), що оперує судженнями, які можуть бути розкладені на послідовність питань, що вимагають відповіді лише у формі «так» або «ні» («так» можна позначити одиницею, а «ні» – нулем) стали грати ключову роль у обчислювальній техніці.

До кінця 30-х років відносяться і перші спроби використовувати в обчислювальних машинах електронні елементи. Питання полягало в тому, як моделювати логічні елементи машини. Це можна було робити за допомогою електромеханічних реле, але в такому разі швидкість рахунку машини залишалася невисокою – близько сотень та тисяч мілісекунд на одну операцію. Така швидкість була характерна для перших обчислювальних машин, збудованих у 40-х роках. Використання електронних ламп для конструювання логічних елементів дозволило підвищити швидкість машин на три порядки. Перша ЕОМ, що використовує тригери (логічні елементи) на електровакуумних тріодах – ЕНІАК (скорочення від англійської назви «електронний числовий інтегратор і обчислювач») – була створена Пенсільванському університеті в 1945 р. під керівництвом Джорджа Маучлі. Незважаючи на те, що її робота була заснована на десятковій системі числення, її швидкість здавалася тоді фантастичною – 0,2 мс на операцію складання. 1946 рік був значною мірою переломним для розвитку обчислювальної техніки.

Відомий американський математик і фізик Джон фон Нейман висунув та обґрунтував перспективи створення нових ЕОМ, у яких передбачався перехід на двійкову систему числення, а також введення та зберігання програми у пам'яті ЕОМ аналогічно даним. Ідеї Неймана та будівництво під його керівництвом нової ЕОМ – ЕДВАК – вплинули на подальший розвиток обчислювальної техніки. Зауважимо, що швидкість нової машини в 4 рази перевищувала швидкість ЕНІАК.

Ідеї Вінера, викладені в його знаменитій книзі «Кібернетика, або управління і зв'язок у тварині та машині», що з'явилася в 1948 році, виявилися вельми продуктивними, і з їх допомогою вдалося створити

загальну теорію інформації та зв'язку, що застосовується в різних областях – від фізики до біології та мовознавства.

Розробка першої вітчизняної ЕОМ із програмою, що запам'ятовується, почалася в 1947 р. в Києві, в інституті електротехніки АН УРСР, під керівництвом академіка С. А. Лебедева (1902-1974 рр.). Практичне використання цієї машини, названої МЕСМ (мала електронна лічильна машина), почалося у 1951 році.

Серійне виробництво ЕОМ почалося практично одночасно: в США перші серійні машини ІВМ-701 і ЦМУАС з'явилися у 1951 р., а в СРСР у 1952-1953 рр. було створено прототипи перших ЕОМ – БЕСМ-1, «Стріла», М-2.

Говорячи про сфери застосування перших цифрових ЕОМ, слід зазначити, що з науковими розрахунками досить чітко позначилася інша дуже широка сфера застосування ЕОМ – економічні розрахунки. З'явилися ЕОМ, спеціально сконструйовані цих цілей. В основному це були машини послідовної дії: послідовно виконують операції над десятковими числами, представленими у двійковій формі. Для цього використовувалася двійково-десятькова система числення. Особливістю цих машин було також те, що вони мали великі, порівняно з ЕОМ для наукових розрахунків, можливості обробки буквеної інформації. Машини цього типу набули широкого поширення.

У своєму розвитку від перших електронних обчислювальних машин із програмним управлінням до сучасних ЕОМ обчислювальна техніка пройшла кілька етапів. З кожним таким етапом зазвичай пов'язують поняття «покоління» ЕОМ.

До першого покоління ЕОМ (приблизно 1950-1958 рр.) відносяться лампові ЕОМ.

Перші пристрої, що запам'ятовують, будувалися на основі електронних ламп, електронно-променевих трубок та магнітних барабанів і стрічок.

Дискретні електронні елементи на лампах були громіздкими, малонадійними, відрізнялися високою вартістю та великим енергоспоживанням. Усе це значно обмежувало можливості побудови складних механізмів ЕОМ (обчислювальних, керівних тощо). ЕОМ першого покоління працювали в однопрограмному режимі, було відсутнє поєднання роботи окремих пристроїв у часі, що поряд з низькою швидкістю елементів негативно позначалося на загальній продуктивності ЕОМ.

До другого покоління належать напівпровідникові ЕОМ (приблизно 1959-1967 рр.), у яких електронні лампи були замінені транзисторами. Транзистор, один із найчудовіших приладів ХХ ст., був винайдений у 1947 р. трьома американськими фізиками: У. Шоклі, Д. Бардінім та У. Браттейном. Їм вдалося створити твердотільний електронний підсилювач, який виконував всі функції електронної лампи, але не мав її недоліків, таких як розжарений катод, необхідність наявності вакууму в робочому обсязі тощо. У технології виготовлення ЕОМ широко застосовувалися методи друкарського монтажу.

У ЕОМ другого покоління були застосовані нові принципи та засоби організації роботи машин: поєднання операції введення та виведення даних з обчисленнями на центральному процесорі, підвищення швидкодії процесора за рахунок паралельного у часі виконання частин однієї-двох команд.

Структурно-логічні рішення, закладені в найбільш досконалі ЕОМ другого покоління, зробили природним одночасне введення та виконання кількох програм, так зване мультипрограмування. З цим режимом роботи ЕОМ пов'язане поняття пакетної обробки інформації: в ЕОМ завантажується пакет кількох програм із відповідними даними. Керуючі програми, призначені для реалізації режиму мультипрограмування, розроблені для низки ЕОМ у 60-х роках, є прообразом операційних систем ЕОМ, що належать до третього покоління.

Програми для перших ЕОМ склалися мовою команд, використовуваному індивідуально кожної конкретної машини. У процесі вдосконалення ЕОМ такий метод стає не лише незручним, а й непридатним, якщо йдеться про опис складних алгоритмів. Тому паралельно з технічним удосконаленням ЕОМ йде робота зі створення універсальних мов, придатних широкого класу машин. Важливу роль розвитку програмування зіграли роботи математиків А. А. Ляпунова і М. Р. Шура-Бура, які створили 1952-1953 рр. операторний метод програмування. Надалі були розроблені універсальні мови АЛГОЛ, ФОРТРАН, КОБОЛ.

У 1960-х з'явилися інтегральні схеми. Інтегральна технологія дозволила в єдиному технологічному процесі створювати на мініатюрній монокристалічній пластинці напівпровідника (кремнію, германію) значну кількість логічних елементів.

Якщо перші інтегральні схеми мали малий рівень інтеграції (кілька логічних елементів на кристалі), то в 70-х роках з'явилися схеми середнього рівня інтеграції, що містять від кількох десятків до кількох сотень елементів. Наступний етап інтегральної технології пов'язаний з створенням ВІС – великих інтегральних схем (тисячі елементів).

До третього покоління ЕОМ (друга половина 60-х років) відносять машини, побудовані на інтегральних схемах. Характерною особливістю цього етапу розвитку обчислювальної техніки є розробка сімей програмно-сумісних ЕОМ, що відрізняються великою продуктивністю, максимальним обсягом оперативної пам'яті, складом периферійного обладнання. Такі сімейства ЕОМ дозволили вирішити завдання раціонального (з погляду витрат) вибору ЕОМ для різноманітних конкретних застосувань.

Прикладами таких сімейств ЕОМ є ІОМ 360/370 (США) та ЄС ЕОМ. Ці машини відрізнялися розвиненими операційними системами. Інтегральна технологія та техніка мікропрограмного управління зумовили можливість збільшити кількість апаратно реалізованих операцій.

Новий етап використання ЕОМ пов'язаний з появою швидкодіючих і дуже ємних пристроїв (на магнітних стрічках і дисках, а потім у вигляді

монокристалу), що дозволило зберігати величезні обсяги інформації. Заради справедливості слід зазначити, що ця властивість сама по собі ще не дозволила б перейти до ефективного режиму виконання інформаційно-логічних завдань, якби одночасно не було вирішено питання швидкого пошуку інформації в цих масивах. Остання задача отримала своє рішення в 60-х роках, коли на базі розроблених відповідних програмних засобів почали з'являтися автоматизовані інформаційні системи, які стали прообразом баз даних.

При створенні та експлуатації ЕОМ перших двох поколінь мало вирішувалося питання забезпечення віддаленого доступу до ЕОМ. Поява баз даних та різке підвищення потужності обчислювальних ресурсів поставило на порядок денний завдання, пов'язане із забезпеченням доступу декількох користувачів, розташованих географічно в різних точках, до однієї бази даних.

Відбулося фактичне злиття ЕОМ із системами передачі даних. Для споживача це означало можливість звернення до будь-якої ЕОМ (і відповідної бази даних) незалежно від географічного розташування цієї ЕОМ.

Тут доречно звернутися до іншої аналогії, пов'язаної з об'єднанням енергетичних установок у єдину регіональну (а потім державну та міждержавну) мережу. Об'єднання в єдину систему таких засобів, як інформаційно-обчислювальні потужності, програмні системи, бази даних та системи зв'язку: телефонні, супутникові, оптико-волоконні та інші канали, мало колосальний вплив на саму концепцію організації зберігання та доступу до систем інформації – баз знань. У цих системах будь-який споживач у довільний момент часу має доступ до спеціально організованих інформаційних масивів, які розташовані у відповідних інформаційно-обчислювальних центрах практично будь-якій точці земної кулі. З іншого боку, можливо навіть більш важливе значення набуває дедалі ширше використання обчислювальних і комунікаційних засобів у побуті.

Таким чином, інформаційна інфраструктура, заснована на злитті ЕОМ, систем зв'язку (у тому числі космічного) та баз знань, стає найважливішим фактором у подальшому розвитку електронної та обчислювальної техніки.

ЕОМ дедалі ширше застосовують у плануванні виробництва, організаційному управлінні на виробничих підприємствах, торгівлі, в науково-дослідних установах.

Поява у великій кількості різних класів ЕОМ високого технічного рівня стало найважливішою технічною базою кібернетики («мистецтва управління»). Змістом цієї науки є загальні закони отримання, передачі, зберігання та обробки інформації.

## 1.2. Створення першого комп'ютера IBM PC

До випуску персонального комп'ютера (PC) фірма IBM вже мала кілька невеликих комп'ютерів. Одним з перших був комп'ютер System/23 Datamaster із процесором 8085A фірми Intel. Цей процесор був попередником процесора 8088, розробленим для ПК. Іншим невеликим комп'ютером був Displaywriter, що був автономний спеціалізований текстовий процесор на базі мікропроцесора 8086.

До 1980 року вже кілька фірм випускали невеликі комп'ютери на базі процесорів типу 8086 і 8088. Такі комп'ютери купували любителі та ентузіасти. У фірмі IBM кілька працівників вирішили розробити новий мікрокомп'ютер для нової сфери ринку. У травні 1980 р. два вищі керівники фірми, голова Френк Кері та президент Джон Опель вирішили, що такий комп'ютер став би цінним доповненням виробничої лінії фірми IBM. Вони поставили завдання створити такий комп'ютер.

Для створення комп'ютера було організовано групу, що складається з тринадцяти співробітників. Цей проект отримав назву «Група тринадцять». Коли ця група взялася за справу, ринок мікрокомп'ютерної техніки був зайнятий декількома фірмами, серед яких лідували фірма Apple Computer з комп'ютером Apple II і фірма Tandy з обчислювальним пристроєм TRS-80. Після аналізу співробітники фірми IBM вирішили, що для завоювання ринку має бути створений новий комп'ютер.

Вони почали працювати над макетним зразком і одночасно шукали відповідну назву для нового обчислювального пристрою. Після пошуків зупинилася на описову назву Personal Computer (персональний комп'ютер).

Керівником проекту був призначений Філіп Дон Естрідж, який був природженим лідером та виявився ідеальним керівником. Працюючи в гігантській фірмі, де нормою були тривалі розробки та власна технологія, Естрідж зміг менш ніж за рік створити найвідкритішу систему персонального комп'ютера фірми IBM. Найвидатнішим внеском Естріджа виявилася підтримка принципу відкритої системи. Будь-хто міг розробляти адаптери та периферійні пристрої для нового комп'ютера. Як пояснив один із розробників першого PC, була поставлена мета «зробити PC настільки доступним, щоб будь-хто, хто захотів би розробляти апаратні та програмні засоби, міг це здійснити». По суті, відкрита архітектура PC дозволяла численним фірмам випускати сумісні комп'ютери, які зараз називаються клонами.

Більшість людей, особливо співробітники фірми IBM, вважають Дона Естріджа як батька PC.

При розробці PC більшість підходів у розробці виявилися успішними, але було і два важливі обмеження. Перший стосувався ширини шини. На той час вже з'явилися 16-бітові адаптери та периферійні пристрої, але вони були дорогими. Природним вибором для PC повинен би бути 16-бітовий процесор 8086. Однак щоб знизити вартість PC, розробники віддали перевагу

процесору 8088, який функціонально еквівалентний процесору 8086, але має 8-бітову шину. Спочатку при початковому розвитку персональних комп'ютерів таке обмеження на шину було прийнятним. Однак незабаром з'явилися продуктивніші процесори, і 8-ми бітова шина стала вузьким місцем, оскільки знижувала продуктивність комп'ютера.

Друге обмеження було набагато важливіше. Операційна система PC (DOS) могла використовувати для програм і даних лише 640 кбайт пам'яті. Це обмеження на той час здавалося несуттєвим, тому що в першому PC було всього 64 кбайт пам'яті. Процесор 8088 може адресувати 1 Мбайт, але таку пам'ять у невеликому комп'ютері тоді неможливо було передбачити. У 1980 р. навіть дорогі міні-комп'ютери мали пам'ять лише 0,5...1 Мбайт. Тільки великі комп'ютери, які коштували мільйони доларів, були мегабайти пам'яті.

Передбачаючи майбутнє зростання потреби в операційній пам'яті, розробники PC помножили розмір пам'яті PC на 10. Вони вважали, що навряд чи хтось використовуватиме більше 640 кбайт, тому адреси від 640 кбайт до 1 Мбайт зарезервували для спеціальних цілей.

### **1.3. Розробка операційної системи**

До роботи над проектом PC, фірма IBM сама розробляла операційні системи для своїх комп'ютерів. Однак швидко стало очевидним, що вона сама не встигне швидко розробити операційну систему для PC, «група тринадцяти» почала розглядати альтернативи. У той час партнери по фірмі Microsoft Білл Гейтс і Поль Алєн були відомими фахівцями у сфері мікрокомп'ютерів. Вони вже постачали мову Бейсік для обчислювальних машин, і фірма IBM запропонувала Гейтсу розробити для нового PC мови Бейсік та Фортран.

До серпня 1981 р. була закінчена також дискова операційна система DOS. Вона стала основною операційною системою IBM PC. Незважаючи на те, що в ній були відсутні сучасні можливості, наприклад, підкаталоги та підтримка жорсткого диска, PC DOS 1.0 виявилася успішною. Ідеї Гейтса 1980 р. до сих пір впливають використання PC. До речі, DOS ніколи не була єдиною операційною системою для PC. Вже до кінця 1982 р. було 6 інших операційних систем, включаючи CP/M, UCSD p-System і два різновиди UNIX.

У серпні 1981 р. фірма IBM оголосила про створення свого першого персонального комп'ютера.

#### **Контрольні запитання та завдання**

1. В яких роках з'явилися перші ЕОМ?
2. Хто вважається батьком персональних комп'ютерів?
3. Які два суттєвих обмеження виявились при розробці ПК?

## 2. МЕТОДИ ПЕРЕДАЧІ ІНФОРМАЦІЇ ТА ВИДИ СИГНАЛІВ

### 2.1. Передача інформації

У техніці мають справу з формалізованою інформацією, яка називається даними. Отримання, обробка, передача та зберігання різноманітної інформації – неодмінна умова роботи будь-якої вимірювальної, інформаційної та управляючої системи [1,2]. Наприклад, передача інформації від датчика, що контролює якийсь параметр технологічного процесу, до керуючого пристрою і від керуючого пристрою до виконавчого механізму, що впливає на технологічний процес.

Інформація надходить в систему у вигляді повідомлень. Під повідомленням розуміють сукупність знаків чи первинних сигналів, що містять інформацію.

Як правило, джерело інформації та пристрій, що її приймає, розташовуються на якійсь відстані. Тому виникає завдання передачі інформації у просторі з використанням спеціальних пристроїв – ліній зв'язку. Розглянемо структурну схему (рис. 2.11) одноканальної системи передачі даних.

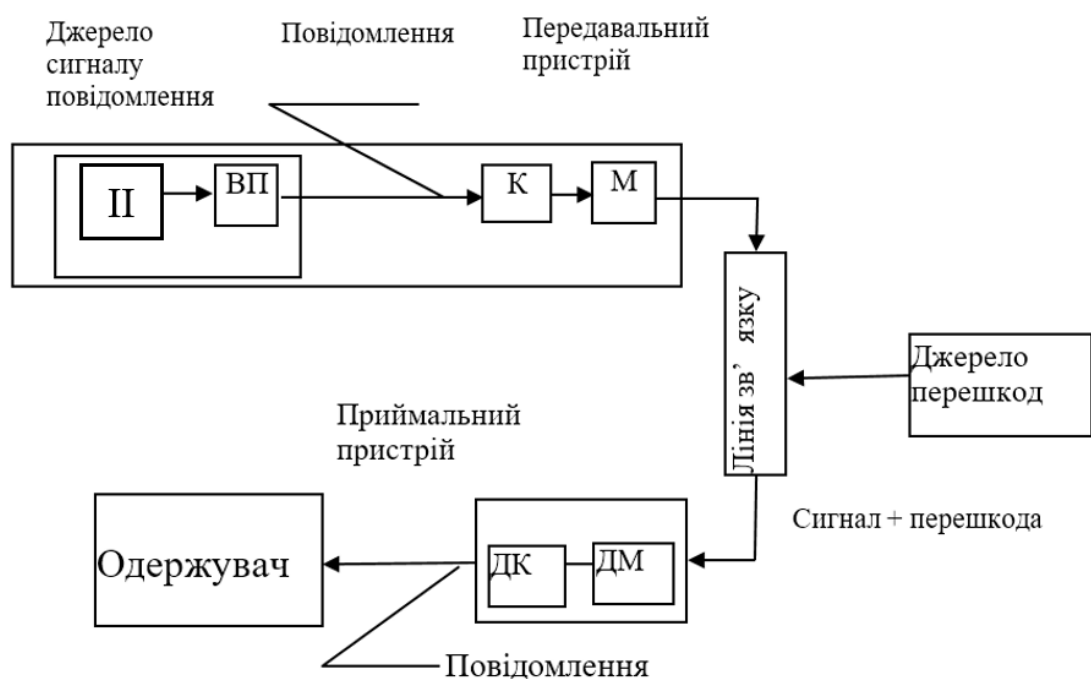


Рис. 2.1. Одноканальна система передачі даних:  
П – джерело повідомлення; ВП – вимірювальний перетворювач;  
К – кодуєчий пристрій; М – модулятор; ДМ – демодулятор;  
ДК – декодуєчий пристрій



При взаємодії об'єктів, а нас буде цікавити взаємодія технологічних об'єктів та технічних пристроїв (датчиків), що отримують інформацію про стан цих об'єктів, інформація передається у вигляді сигналів. Сигнал є носієм інформації.

Відповідно до ДСТУ 2938-94: «Сигнал – це зміна фізичної величини, яка використовується для передачі даних». Таким чином, сигнал утворюється на основі деякої фізичної величини (електромагнітні або акустичні коливання, електрична напруга тощо), що традиційно називається енергетичним носієм, за рахунок зміни одного або декількох її параметрів у часі. Можна вважати, що сигнал – це матеріально-енергетичне втілення повідомлення.

При цьому сигнали можуть бути як природними, так і штучно створюваними з певною метою. Природними є, наприклад, світлові сигнали, що дозволяють бачити світ довкола себе, або космічне випромінювання. Прикладом спеціально створених сигналів може бути перетворення неелектричного параметра, наприклад, механічної сили в електричний сигнал, який змінюється залежно від величини цієї сили.

Спочатку в технічних системах фізичні параметри джерела інформації П за допомогою вимірювального перетворювача ВП перетворюються, як правило, в електричний сигнал (див. рис. 2.1).

Дискретні повідомлення формуються внаслідок послідовної видачі джерелом окремих елементів символів. Безперервні повідомлення описуються функціями часу, що приймають безліч значень. При обробці інформації цифровими пристроями безперервні повідомлення перетворюються на дискретні.

Для передачі по лінії зв'язку необхідно сформувати сигнал, відповідальний вимогам цієї лінії. Перетворення повідомлення в сигнал, зручний для передачі цим каналом зв'язку, називають кодуванням К. Операцію відновлення повідомлення прийнятого сигналу називають декодуванням ДК (див. рис. 2.1).

Для забезпечення простоти та надійності розпізнавання зразкових сигналів їх кількість доцільно скоротити до мінімуму. Тому, як правило, вдаються до операції перетворення вихідних знаків, з яких складено повідомлення в інший алфавіт із меншим числом знаків – такий алфавіт називають алфавітом символів. Так як алфавіт символів менший, ніж алфавіт знаків, то кожному знаку відповідає деяка послідовність символів, яка називається кодовою комбінацією, число символів кодової операції називають її значимістю, число ненульових символів – вагою. Аналогічно операції зіставлення символів зі знаками вихідного алфавіту використовується термін декодування. У найпростішій системі зв'язку кодує, а отже, і декодує пристрої можуть бути відсутніми.

Передавальний пристрій здійснює перетворення безперервних повідомлень або знаків на сигнали, зручні для передачі по лінії зв'язку (або для зберігання в деякому пристрої). При цьому один або кілька параметрів

вибраного сигналу-носія змінюють відповідно до інформації, що передається. Такий процес називають модуляцією М. Зворотне перетворення сигналів на символи здійснюється демодулятором ДМ (див. рис. 2.1).

Під лінією зв'язку розуміють будь-яке фізичне середовище (електричний провідник або електромагнітне поле у просторі, повітря, рідину, тверде тіло), що забезпечує передачу сигналів від передавального до приймаючого пристрою. Сигнали на виході ліній зв'язку можуть відрізнитися від переданих внаслідок під впливом перешкод або, просто, згасання. Перешкодами називають будь-які впливи, що спотворюють повідомлення, що передається. Наприклад, при передачі електричного сигналу по дроту він може спотворюватися за рахунок наведень від електромагнітних полів сильноточного обладнання, що знаходиться недалеко від лінії зв'язку.

Для передачі від групи джерел, зосереджених в одному місці, до групи одержувачів, розташованих у іншому, доцільно використовувати лише одну лінію зв'язку. Лінія зв'язку, що використовується передачі інформації від двох і більше джерел, називається багатоканальною.

Каналом називається модель передачі від джерела до приймача, яка характеризується частотою доступу до лінії зв'язку, частотним діапазоном пропускання, типом обміну, напрямом обміну, вимогою до обробки помилок.

Лінія зв'язку характеризується також пропускною спроможністю – найвищою швидкістю, з якою можна передавати інформацію в цьому каналі. Вона вимірюється в Вd (бодах) – кількості дискретних станів сигналу на секунду. Так, швидкість передачі послідовності двійкових сигналів вимірюється в біт/с.

Канал зв'язку, що використовує звичайні телефонні лінії, мають такі характеристики: низькошвидкісний 0...600 біт/с, середньошвидкісний 600...1200 біт/с, високошвидкісний 4800...9600 біт/с. Смуга частот пропускання сигналу телефонних мереж становить від 300 до 3400 Гц.

Передача дискретних електричних сигналів по провідних лініях зв'язку на великі відстані утруднена. Будь-який провідник є інерційним, оскільки має реактивний опір. Внаслідок цього прямокутна форма фронту цього сигналу спотворюється. Тому при передачі інформації на великі відстані дискретні сигнали модулюються – перетворюються на безперервні (аналогові). Параметри несучого (безперервного сигналу) вибираються відповідно до характеристик ліній зв'язку.

Таким чином, дані – це інформація у формалізованому, кількісному вигляді; повідомлення – частина інформації (даних); сигнал – фізичний процес, що несе повідомлення.

## 2.2. Види сигналів

Через сигнали можна передати будь-яке складне повідомлення. Сигнал може перетворюватися без зміни змісту інформації з однієї фізичної форми в іншу, зручнішу для передачі каналу зв'язку та обробки в комп'ютері.

Сигнали можна класифікувати за такими ознаками:

- Ступенем визначеності – детерміновані (визначені) та випадкові (стохастичні). Детерміновані сигнали точно визначені будь-якої миті часу, а випадкові – неможливо точно передбачити.
- Структурою часової зміни – безперервні (аналогові) та уривчасті (дискретні).
- Роллю інформації, що передається – адреси, дані та управління.
- Особливостями спектрального подання – низькочастотні та високочастотні, вузькосмугові та широкосмугові.
- Способом перетворення – кодовані, декодовані, посилені, дискретизовані тощо.
- Налаштуванням до виду зв'язку – телеграфні та телефонні, радіолокаційні та радіосигнали, внутрішньо- та міжмашинні.
- Характером зміни кодованих сигналів у синхронізовані моменти часу – потенційні та імпульсні.

Будь-які повідомлення, з якими ми маємо справу в теорії інформації, є сукупністю відомостей про деяку фізичну систему. Наприклад, на вхід системи управління частотою обертання валу двигуна повинна подаватися інформація про задану та фактичну частоту обертання якоря двигуна, його струму. У разі двигуна, ці сигнали описують стан фізичної системи.

У технічних інформаційних системах найбільшого поширення набули такі носії як електрична напруга або струм. Наприклад, у цифровій обчислювальній машині інформація подається у вигляді електричних цифрових сигналів. Тому, розглядаючи надалі моделі сигналів, для конкретності співвідноситимемо їх з електричними сигналами.

В аналогових електричних сигналах інформація зазвичай передається за рахунок модуляції гармонійних коливань згідно із законом  $u(t) = A(t) \sin [\omega(t) t + \varphi(t)]$ . При цьому амплітуда  $A(t)$ , частота  $(t)$  і фаза  $\varphi(t)$  називаються інформативними параметрами.

При амплітудній модуляції амплітуда несучого сигналу змінюється залежно від вихідного знаку повідомлення (рис. 2.2). Частота несучого сигналу, відповідно до теореми Котельникова, повинна бути як мінімум удвічі вищою за частоту зміни символів.

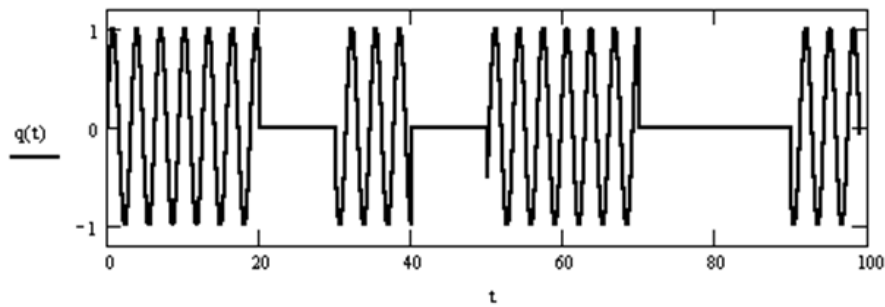


Рис. 2.2. Амплітудна модуляція

Наведемо приклад передачі дискретного повідомлення шляхом амплітудної модуляції у пакеті Mathcad.

Задаємо частоту і функцію несучого сигналу

$$\omega := 2 \quad f(t) := \sin(\omega \cdot t)$$

Задаємо дискретне повідомлення

$$X := (1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)^T$$

Тоді довжина повідомлення

$$L := \text{length}(X) \quad L = 10$$

Задаємо тривалість компонент дискретного повідомлення  $l := 10$

Тоді тривалість усього повідомлення дорівнює  $T := L \cdot l \quad T = 100$

$$T := 0, 0.01 \dots T - 1$$

Модулюємо несучу заданим повідомленням

$$q(t) := \begin{cases} k \leftarrow \text{floor}\left(\frac{t}{l}\right) \\ X_k \cdot f(t) \end{cases}$$

У системах передачі інформації фазомодульованими сигналами реалізується як двійкова, так і багатопозиційна модуляція. При передачі даних фазомодульованим носієм змінюється різниця фаз сигналу в точках відліку або фаза сигналу стосовно фази немодульованого сигналу (рис. 2.3).

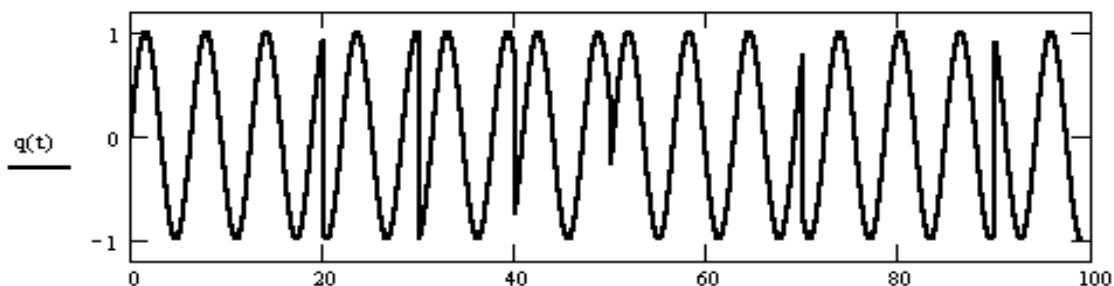


Рис. 2.3. Фазова модуляція

Наведемо приклад передачі дискретного повідомлення шляхом фазової модуляції у пакеті Mathcad.

Задаємо частоту і функцію несучого сигналу

$$\omega := 1 \quad f(t) := \sin(\omega \cdot t)$$

Задаємо дискретне повідомлення

$$X := (1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)^T$$

Тоді довжина повідомлення

$$L := \text{length}(X) \quad L = 10$$

Задаємо тривалість компонент дискретного повідомлення  $l := 10$

Тоді тривалість усього повідомлення дорівнює  $T := L \cdot l \quad T = 100$

$$T := 0, 0.01 \dots T - 1$$

Модулюємо несучу заданим повідомленням

$$q(t) := \begin{cases} k \leftarrow \text{floor}\left(\frac{t}{l}\right) \\ f(t) \text{ if } X_k = 1 \\ f(t + \pi) \text{ otherwise} \end{cases}$$

При частотній модуляції залежно від інформативного сигналу змінюється частота сигналу (рис. 2.4).

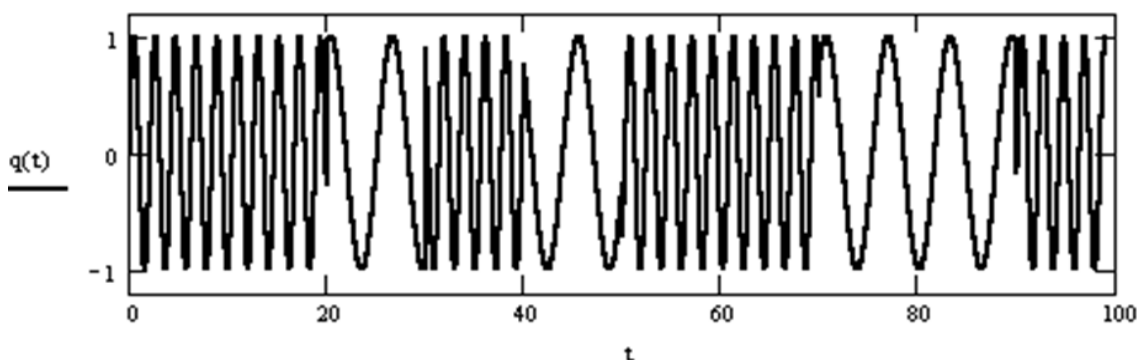


Рис. 2.4. Частотна модуляція

Наведемо приклад передачі дискретного повідомлення шляхом частотної модуляції у пакеті Mathcad.

Задаємо функцію несучого сигналу

$$f(\omega, t) := \sin(\omega \cdot t)$$

Задаємо дискретне повідомлення

$$X := (1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)^T$$

Тоді довжина повідомлення

$$L := \text{length}(X) \quad L = 10$$

Задаємо тривалість компонент дискретного повідомлення  $l := 10$

Значення частот 1 і 0  $\omega_1 := 3 \quad \omega_0 := 1$

Тоді тривалість усього повідомлення дорівнює  $T := L1 \quad T = 100$   
 $T := 0, 0.01 .. T - 1$   
 Модулюємо несучу заданим повідомленням

$$q(t) := \begin{cases} k \leftarrow \text{floor} \left( \frac{t}{1} \right) \\ f(\omega_0, t) \text{ if } X_k = 0 \\ f(\omega_1, t) \text{ if } X_k = 1 \end{cases}$$

### 2.3. Представлення сигналів

При аналізі сигналу, наприклад, електров'язку, його можна розглядати як зміну у часі електричних величин (напруги, струму, електромагнітних коливань, напруженості поля). Ці величини можна спостерігати і реєструвати за допомогою різних приладів, наприклад, осцилографів. Для наочності сигнал як функція часу може бути представлений у вигляді графіка (рис. 2.5) або таблиці.

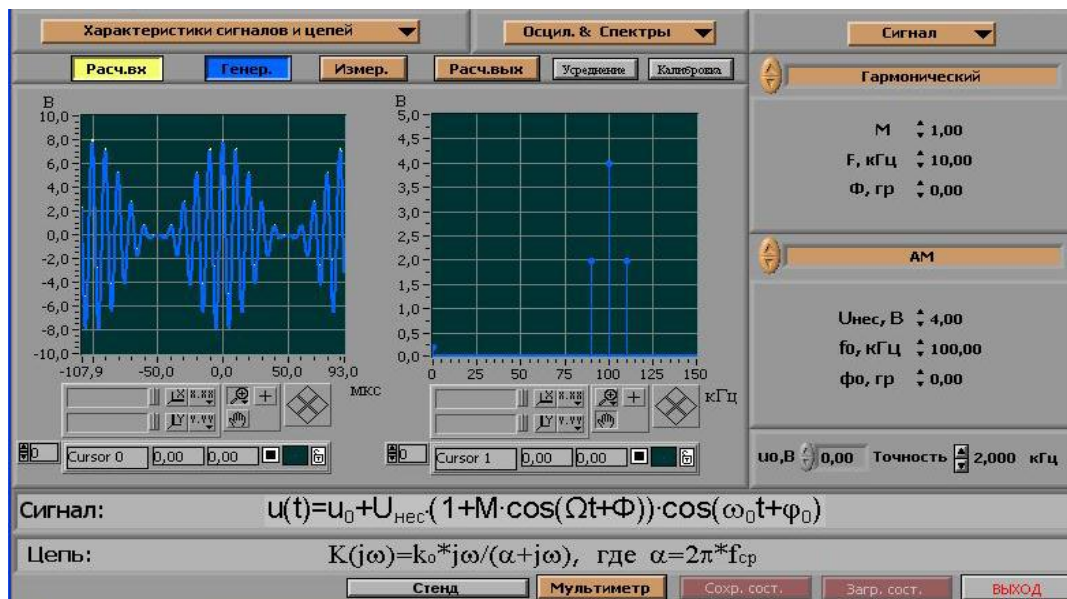


Рис. 2.5. Графік сигналу та його математична модель

Таке подання називається часовою діаграмою. Як приклад можна привести осцилограму струму, що протікає через мікрофон (рис. 2.6).

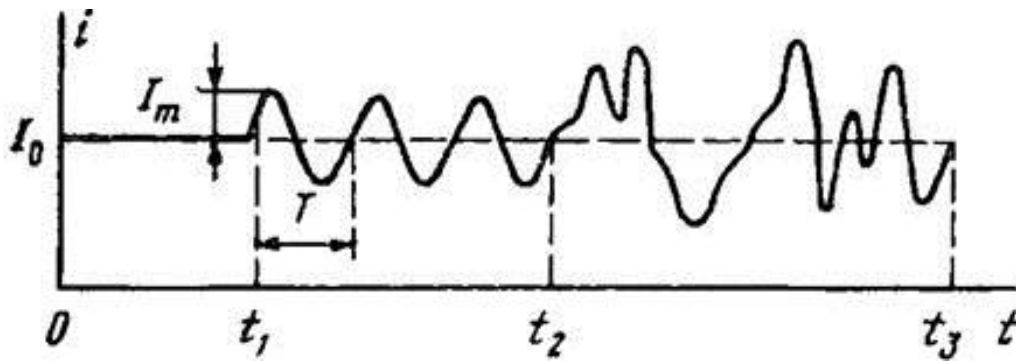


Рис. 2.6. Часова діаграма струму, що протікає через мікрофон

Однак часові діаграми сигналів незручні як для теоретичного аналізу, так і для подання довготривалих сигналів.

В теорії інформації розглядають не фізичне, а математичне подання сигналів, тобто їх опис за допомогою різних функцій, формул, графіків, законів розподілу ймовірностей. У загальному випадку спосіб формалізованого опису різних сигналів (і відповідно повідомлень) називається поданням інформації.

Для обробки сигналів доцільно представити їх у вигляді математичного опису – простого математичного виразу (формули, рівняння, нерівності тощо), за яким можна обчислювати необхідні властивості і параметри сигналів (миттєві значення, числові характеристики тощо). Математичний опис сигналу називається його *математичною моделлю*.

Найбільш поширеними способами подання сигналів є часовий, спектральний, статистичний. У багатьох випадках інформація про перебіг деякого фізичного процесу надходить від відповідних датчиків у вигляді електричних сигналів, які безперервно змінюються в часі.

Найпоширеніший вид безперервного сигналу – гармонійний, графік якого зображений на рисунку 2.7, а математична модель представлена формулою

$$u(t) = U_m \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi_0) \quad (2.1)$$

де  $U_m$  – максимальне значення (амплітуда);  $f$  – циклічна частота  $f = \frac{1}{T}$ ;

$\varphi_0$  – початкова фаза коливань  $\varphi_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot \tau}{T}$ . Зрушення за фазою призводить до зрушення гармонійного коливання на час  $\tau$  вліво (рис. 2.7, б). Часто при розрахунках використовується кутова частота  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ .

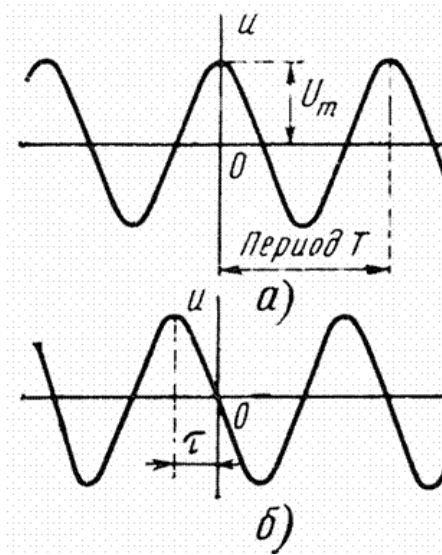


Рис. 2.7. Графік гармонійного сигналу

Джерело повідомлень видає кожне повідомлення з певною ймовірністю, яке може розглядатися як сигнал, коли несе корисну інформацію або перешкода, якщо спотворює корисний сигнал.

При вивченні загальних властивостей каналів зв'язку, корисних сигналів, перешкод ми відволікаємось від їхньої конкретної фізичної природи, змісту, призначення, замінюючи їх моделями.

Математичне моделювання дозволяє в загальному вигляді виявити залежність між повідомленнями, що передаються за допомогою сигналів, оцінити їх кількісно і, з певною ймовірністю, зробити прогноз про їх зміну.

Залежно від математичної моделі сигнали можна поділити на детерміновані та випадкові. Детермінованими називають сигнали, які точно визначені будь-якої миті часу. Випадкові сигнали відрізняються тим, що їх значення можна передбачити лише з певним ступенем ймовірності.

Детермінованому сигналу відповідає його модель як математичної функції, що цілком визначена у часі. Цей сигнал не несе більше ніякої додаткової інформації. Однак детерміновані функції можуть розглядатися як елементи множини координатних функцій, що становлять разом випадковий процес. Крім цього, детерміновані сигнали мають і самостійне значення. Вони спеціально створюються для цілей вимірювання, налагодження та регулювання технологічних об'єктів, що використовуються в інформаційній техніці для передачі сигналів на відстань.

Так як джерело повідомлень видає кожне повідомлення з деякою ймовірністю, сигнал являє собою випадкові коливання і його аналітичною моделлю є випадковий процес, визначений ймовірнісними характеристиками. Залежно від безперервності або дискретності реєстрації часу і значення розрізняють сигнали (рис. 2.8): безперервні, квантовані за рівнем і безперервні за часом, дискретні за часом і безперервні за рівнем, квантовані за рівнем і дискретні за часом.



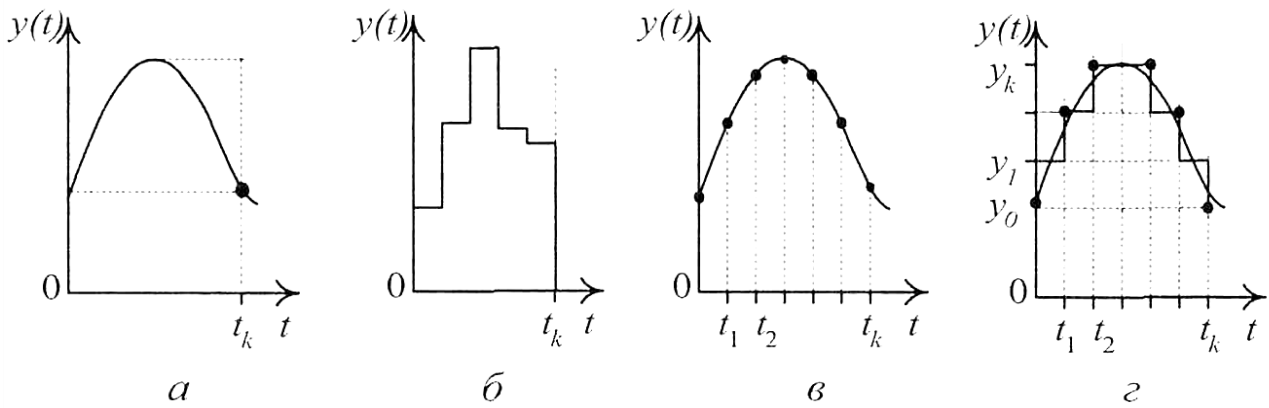


Рис. 2.8. Графічне подання часових сигналів:  
 а) безперервні; б) безперервні за часом і квантовані за рівнем;  
 в) безперервні за рівнем і дискретні за часом;  
 г) дискретні за часом і квантовані за рівнем

1. Безперервна функція безперервного аргументу в інтервалі часу  $0 \leq t \leq t_k$  (рис. 2.8, а).

2. Дискретна функція безперервного аргументу (рис. 2.8, б). Значення, що приймаються функцією  $y(t)$ , утворюють дискретний ряд чисел  $y_i, i = 1, 2, \dots, k$ . Значення аргументу може бути будь-яким у заданому інтервалі часу  $0 \leq t \leq t_k$ . Перетворення безперервної функції  $y(t)$  на дискретну множину значень називається квантуванням за рівнем.

3. Безперервна функція дискретного аргументу (рис. 2.8, в). Значення функції  $y(t)$  визначаються лише на дискретній множині  $t_i, i = 1, 2, \dots, k$ . Функція  $y(t)$  може набувати будь-яких значень у заданому діапазоні. Перетворення функції  $y(t)$  безперервного аргументу  $t$  на функцію  $y(t_i)$  дискретного аргументу  $t_i$  називається дискретизацією в часі.

4. Дискретна функція дискретного аргументу (рис. 2.8, г). Значення, прийняті функцією та аргументом, утворюють дискретні ряди чисел  $y_0, y_1, \dots, y_k$ .

Перша з розглянутих функцій визначає безперервні (аналогові) сигнали, друга і третя – дискретно-безперервні, а четверта – дискретні. Спільне застосування дискретизації та квантування дозволяє перетворювати безперервну функцію в чисто дискретну.

Наведемо приклади видів сигналів.

1) *Безперервний сигнал*. Множина значень величини, що безперервно змінюється, отриманих при безперервних відліках часу (безперервна функція безперервного аргументу).

В електричному поданні аналоговий сигнал, судячи з назви, є аналогом зміни реальної величини фізичного об'єкта. Всі сучасні вимірювальні пристрої є цифровими, де електрична фізична величина, перетворена в безперервний сигнал піддається оцифровці, і вихідний сигнал цих

перетворювачів теоретично є дискретним. Частота дискретизації вторинного перетворювача датчика, яка становить від сотень мГц до ГГц забезпечує перетворення безперервного сигналу первинного перетворювача, що несе інформацію про фізичний параметр в дискретний практично без спотворення.

Математичною моделлю безперервного сигналу є безперервна функція безперервного аргументу. Наприклад, на рисунку 2.9 зображено графік безперервного гармонійного сигналу з частотою 2 Гц і частотою дискретизації 10 кГц.

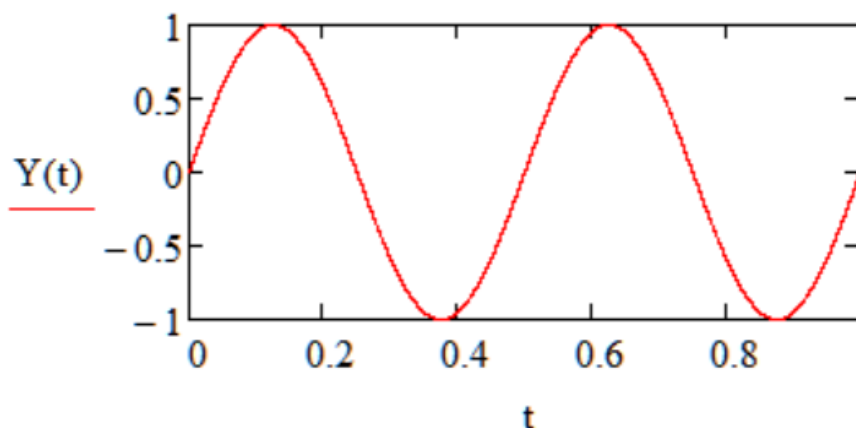


Рис. 2.9. Графік безперервного гармонійного сигналу із частотою 2 Гц та частотою дискретизації 10 кГц

2) До дискретно-безперервних функцій відносять також широтно-імпульсне подання первинного сигналу  $y(t)$  прямокутними імпульсами з безперервним параметром  $t_i / T$ , де  $t_i$  – тривалість імпульсів, пропорційна значенню сигналу;  $T$  – період повторення імпульсів (рис. 2.10, а).

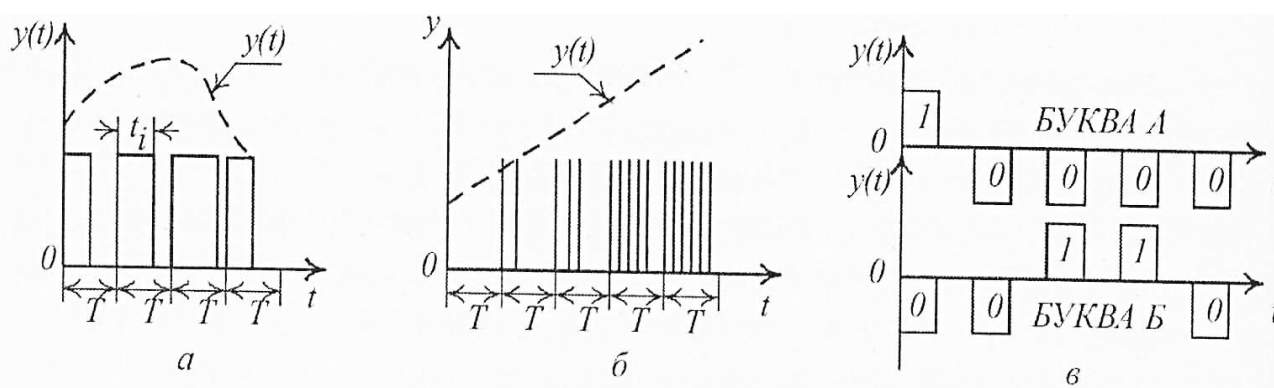


Рис. 2.10. Подання сигналів:  
а – широтно-імпульсне; б – число-імпульсне; в – імпульсно-кодове

При число-імпульсному поданні (рис. 2.10, б) інформативним параметром є кількість імпульсів за період. У телеграфному зв'язку використовують імпульсно-кодове подання символів. Наприклад, у коді Бодо передачу символів реалізують послідовною послілкою в часі 5-ти імпульсів різної полярності, як показано на рисунку 2.10, для букв А і Б.

У комп'ютерній схемотехніці використовують розрядно-цифрове кодування, в якому первинний сигнал представляється групою символів, що відображають значення цифр 0 та 1 двійкової системи числення електричними сигналами, наприклад, імпульсами.

Цифровий код передають послідовно в часі (послідовний код) за допомогою одного каналу передачі (рис. 2.11, а) або одночасно (паралельний код) за допомогою багатоканальної передачі (рис. 2.11, б).

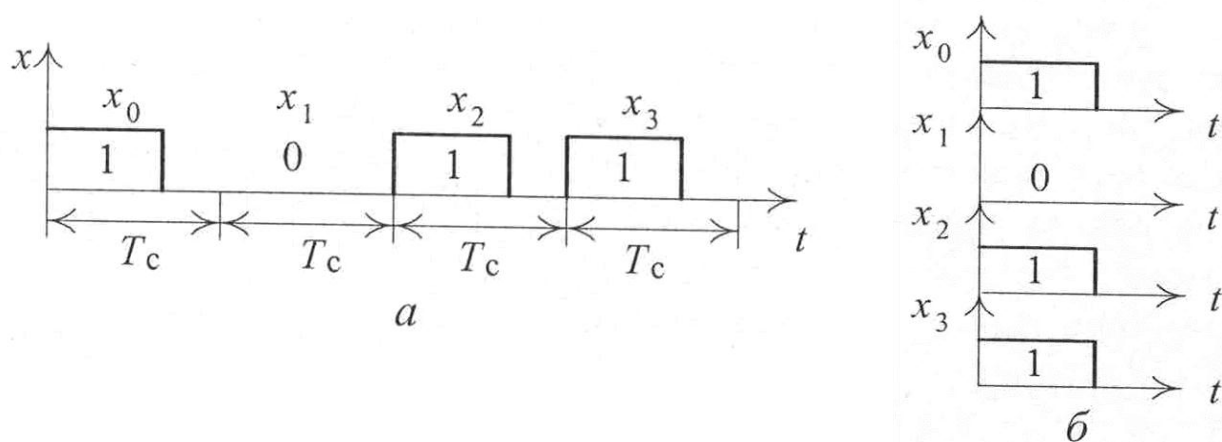


Рис. 2.11. Передача інформації:  
а – послідовним кодом; б – паралельним кодом

На практиці послідовний код використовують при передачі інформації на великі відстані (наприклад, між комп'ютерами), а паралельний код – при передачі інформації на малі відстані (наприклад, всередині ЕОМ або мікропроцесора).

Для інформаційного обміну використовують знаки різного рангу:

- перший ранг – символ – елементарна одиниця повідомлення. Якщо кількість різних символів обмежена, їх сукупність називається алфавітом (наприклад, літери латинського алфавіту, двійкові символи 0 і 1 – у технічних пристроях);

- другий ранг – слова (групи символів), у тому числі будуються фрази і висловлювання.

3) *Цифровий сигнал.* Цифровим називається сигнал із дискретним часом та встановленими рівнями цифрових значень. Дискретність квантування значень сигналу визначається розрядністю аналого-цифрового перетворювача, а дискретність часової шкали – частотою дискретизації. Якщо дискретність часу і значень сигналу можна порівняти з динамічними

характеристиками об'єкта, що досліджується, то математичною моделлю такого сигналу є різностні рівняння.

На рисунку 2.12 зображено сигнал цифрової синусоїди, а на рисунку 2.13 – дискретний сигнал.

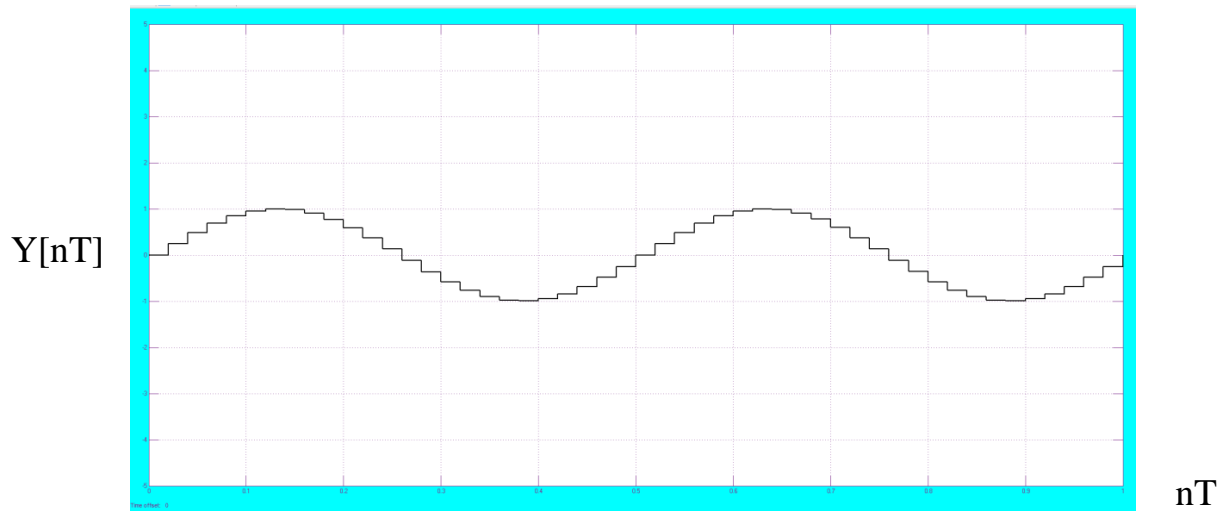


Рис. 2.12. Цифрова синусоїда

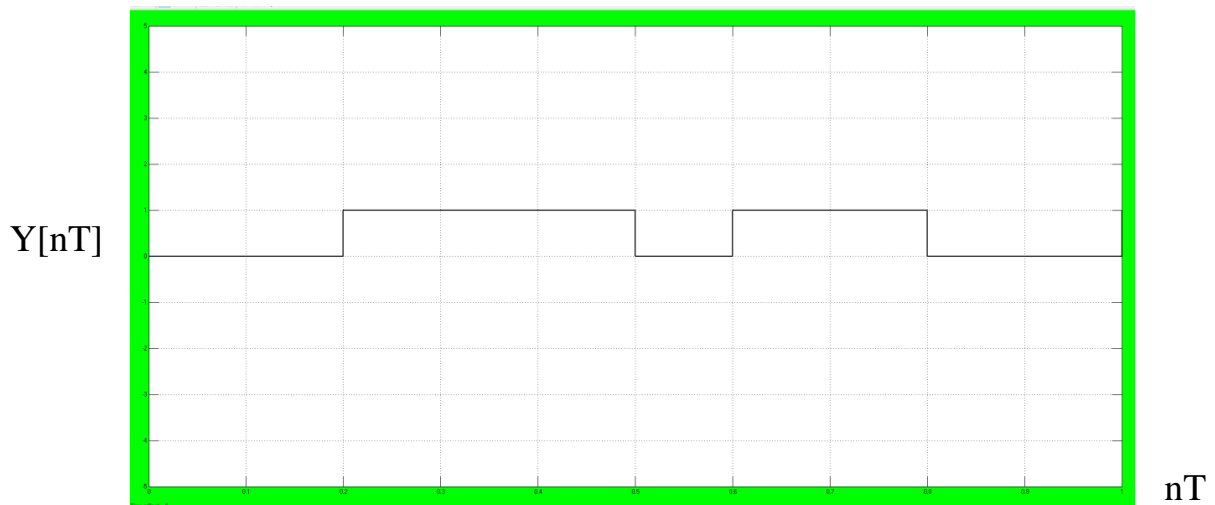


Рис. 2.13. Дискретний сигнал

До особливої групи можна віднести дискретні сигнали, що реєструють дискретні випадкові процеси. У цьому випадку сигнали реєструють принаймні наступ контрольованих подій, а рівень цих сигналів фіксований.

Вибір періоду дискретизації є досить складною операцією, оскільки немає математично точно обґрунтованих рекомендацій щодо цього. Проблема полягає в тому, що при відновленні безперервного сигналу з його дискретного полання через дискретні точки відліку безперервного сигналу можна провести безліч кривих відновленого сигналу (рис. 2.14).

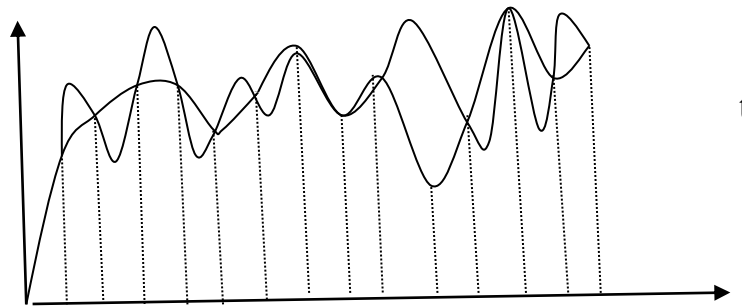


Рис. 2.14. Відновлення безперервного сигналу з його дискретного подання

Тому зворотне завдання – формування безперервної функції зі ступінчастої не може бути вирішено однозначно. Функції, задані в дискретні моменти часу, може відповідати безлічі безперервних функцій. Таким чином, основним моментом при проведенні операції дискретизації є правильний вибір кроку дискретизації, при якому можна відновити безперервний сигнал із заданою точністю.

Методи вибору дискретності залежать від моделі подання сигналів. В реальних системах автоматичного регулювання найбільшого поширення набула модель сигналу як випадкового квазістаціонарного процесу, кожна реалізація якого є функцію з обмеженою спектральною щільністю сигналу. Величина кроку дискретизації у цьому разі ставиться у залежність від найвищої частоти спектра аналізованого сигналу. Такий критерій вибору відліків прийнято називати частотним.

Правило вибору граничного кроку дискретизації з використанням моделі сигналу з обмеженим спектром у найбільш чіткій формі сформульовано та доведено академіком В. А. Котельниковим. Цю теорему, що носить його ім'я, ще називають «теореомою відліків», а у зарубіжній літературі – теореомою Найквіста – Шеннона. Ця теорема встановлює принципову можливість повного відновлення безперервної функції з обмеженим спектром за її відліками та вказує граничне значення інтервалу часу між відліками, при якому таке відновлення ще можливе. Формулюється вона наступним чином: «будь-яку функцію  $F(t)$ , що складається з частот від 0 до  $f_1$ , можна безперервно передавати з будь-якою точністю за допомогою послідовності чисел з періодом  $T \leq 1 / (2 f_1)$ ». Таким чином, сигнал  $y(t)$  можна передавати окремими миттєвими значеннями, які відраховуються через кінцевий інтервал часу. За цими значеннями комп'ютер повністю відновлює безперервний первинний сигнал.

Фізична основа теореми виявляється при розгляді зв'язку між формою функції та шириною її спектра. Тільки у випадку, коли спектр функції необмежений, її значення в скільки завгодно близькі моменти часу можуть змінюватися довільно і стрибкоподібно. Скорочення високочастотної частини спектру до граничної частоти  $f_{\max}$  рівнозначно усуненню з цієї функції викидів, які могли бути сформовані цими високочастотними складовими.

При менших граничних значеннях частоти  $f_{\max}$  частотного спектра безперервна функція є більш плавною і, тому, простежується зв'язок між граничною частотою спектра  $f_{\max}$  та швидкістю зміни функції у часовій області.

Якщо користуватися теоремою Котельникова під час вибору кроку дискретизації, то ймовірність випадкового викиду функції на інтервалі часу  $T$  є малою величиною.

Для визначення граничної частоти  $f_{\max}$  на практиці використовують два методи. Перший з них полягає у виборі настільки великої частоти  $f_{\max}$ , щоб складові з частотою вище  $f_{\max}$  у сигналі були б практично неможливими. Виходячи з цього певного значення, частота дискретизації вибирається в 2...4 рази більше  $f_{\max}$ .

Припустимо, що з деякого процесу можлива зміна сигналу в частотному спектрі становитиме  $0 \leq f \leq 1000$  Гц. Відповідно до теореми Котельникова, інтервал дискретизації слід взяти  $\Delta T \leq 0,5$  мс.

При використанні другого методу вибору граничної частоти сигнал попередньо фільтрується фільтром нижніх частот. Після фільтрації частотний спектр сигналу знаходиться в межах  $0 \dots f_{\text{гр}}$ , де  $f_{\text{гр}}$  – гранична частота пропускання фільтра. Тепер, якщо вибрати  $f_{\max} = f_{\text{гр}}$ , відповідно до теореми Котельникова, частота дискретизації буде  $f_{\text{д}} = 2 \dots 4 f_{\text{гр}}$ .

Розглянемо операцію квантування безперервної функції за рівнем. Оскільки числове значення кожного відліку має бути виражене деяким числом кінцевих цифр, то приблизно описати нескінченну послідовність можливих значень безперервного процесу можна за допомогою кінцевого числа рівнів квантування. Якою б не була точна шкала, необхідно зробити вибір між двома сусідніми значеннями. На рисунку 2.15 зображено процес квантування безперервного сигналу відповідно до дозволених рівнів, що відбувається в аналого-цифровому перетворювачі (АЦП).

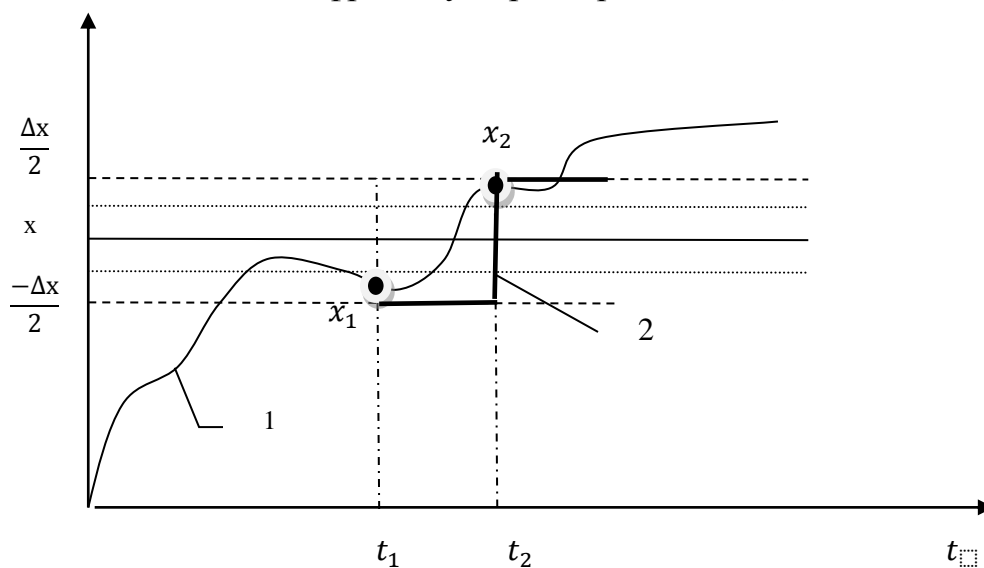


Рис. 2.15. Квантування безперервного сигналу:  
1 – безперервний вхідний сигнал АЦП; 2 – вихідний сигнал АЦП

Якщо відлік сигналу менше половини діапазону сусідніх рівнів квантування, йому присвоюється значення нижнього рівня цього діапазону, якщо більше, то – верхнього рівня.

Таким чином, якщо квантування виконано правильно, то справжнім значенням вихідного безперервного сигналу будуть відповідати найближчі до них рівні квантування. Точність наближення до безперервного процесу залежить від кількості рівнів квантування. У сучасних цифро-аналогових перетворювачах сигнал на виході подається в двійковому коді і має від 1024 рівнів квантування (10-ти розрядне АЦП) й більше.

## 2.4. Вимірювання сигналів

Одним з напрямів розвитку сучасного приладобудування є створення технічних засобів на основі об'єднання досягнень сучасної мікроелектроніки та інформаційних технологій. Особливого розвитку набуло створення інтелектуальних (програмованих) засобів вимірювальної техніки на основі сучасних апаратно-програмних засобів.

Як відомо, будь-який осцилограф використовується для вимірювання характеристик напруги в часі. На його екрані відображається сигнал у вигляді осцилограми – прямої або синусоїдальної лінії, яка зазнає зміни за певний період.

Зазначені засоби мають наступні переваги:

- можливість обробки результатів вимірювань;
- відображення результатів вимірювання з використанням можливостей сучасних графічних редакторів;
- підвищення точності і швидкодії.

Як приклад, розглянемо цифрові осцилографи, які представляють собою апаратно-програмні засоби з дуже високими технічними характеристиками.

За можливостями обробки сигналів і швидкодією цифрові осцилографи наближаються до спеціалізованих сигнальних процесорів, а за можливостями відображення результатів обробки перевершують їх.

Зовнішній вигляд осцилографа компанії Good Will Instrument Co. Ltd серії GDS з кольоровим рідкокристалічним індикатором представлений на рисунку 2.16.

Цифрові різновиди цього приладу мають загальну схему, що складається з наступних функціональних компонентів.

– Масштабний пристрій, в якому вхідний сигнал посилюється або послаблюється в залежності від рівня, необхідного для вимірювання його параметрів.

– Аналого-цифровий перетворювач, що трансформує безперервний електричний сигнал в послідовність дискретних числових характеристик (кодових слів).

- Оперативний запам'ятовуючий пристрій (ОЗП) фіксує певну кількість значень досліджуваного сигналу для виконання поточних операцій.

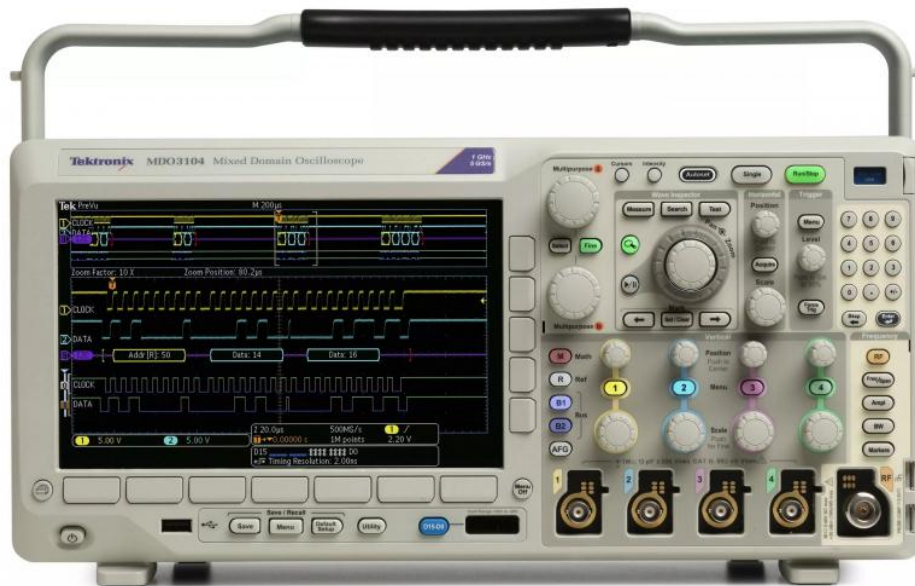


Рис. 2.16. Сучасний цифровий осцилограф

- Довготривала пам'ять – запам'ятовуючий пристрій, що зберігає дані протягом тривалого часу не тільки для поточних, але й більш віддалених операцій.
- Контролер – блок, що забезпечує управління роботою осцилографа, а також відображення даних на екран у вигляді зображення.
- Дисплей – індикатор на рідких кристалах.

На рисунку 2.17 в спрощеному вигляді показана структурна схема цифрового осцилографа.

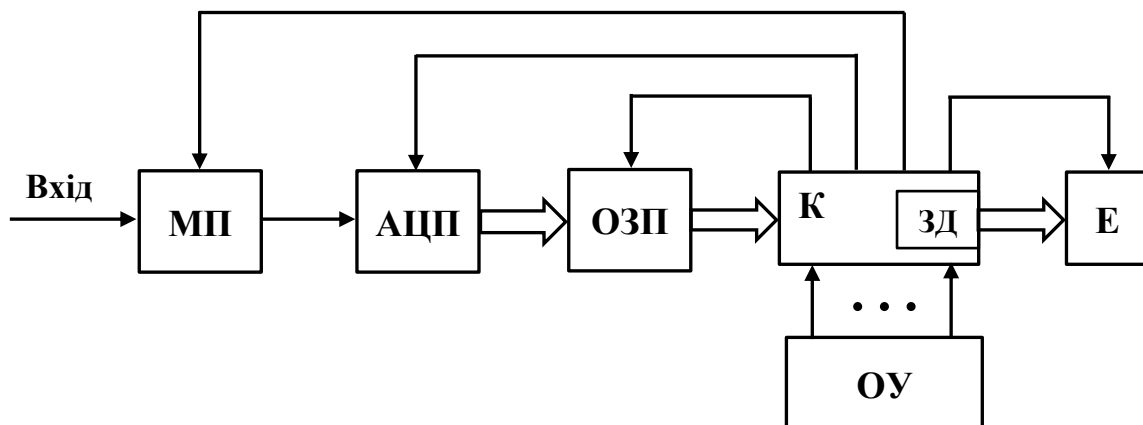


Рис. 2.17. Спрощена структурна схема цифрового осцилографа



На рисунку 2.17 мають місце наступні позначення:

МП – масштабуємий пристрій (підсилювач або дільник напруги);

АЦП – аналого-цифровий перетворювач;

ОЗП – оперативний запам'ятовуючий пристрій;

МК – мікроконтролер; ЗД – задатчик; Е – екран;

ОУ – органи управління (кнопки, рукоятки)

Пройшовши через МП, вхідна напруга  $u(t)$  перетворюється АЦП в дискретну послідовність кодових слів  $N_1$ , що відображають миттєві значення цієї напруги. Кожне нове кодове слово записується в ОЗП. При цьому всі попередні записані відліки зсуваються на один осередок (регістр зсуву), а самий перший –  $N_1$  зникає, як би «виштовхується». Якщо ОЗП складається з  $M$  осередків, то в ньому, постійно оновлюючись, міститься  $M$  останніх, «свіжих», кодових слів. Після виконана якоїсь заданої умови, наприклад, коли значення вхідного сигналу перевищить заданий оператором рівень («запуск за рівнем»). вміст деякої кількості осередків ОЗП переписується в пристрій ЗУ, що входить до складу мікроконтролера МК.

Кожному осередку ЗУ відповідає точка на екрані. Для гарного зображення сигналу на екрані цілком достатньо 2 точки на 1 мм. Середніх розмірів екран має висоту 100 мм і ширину 120 мм. Отже, на екрані повинні розташовуватися  $200 \times 240 = 48\,000$  точок або більше.

Таким чином, для формування гарного зображення АЦП повинен мати не менше 8 двійкових розрядів (256 точок по вертикалі) і ЗУ повинно містити 256 осередків. Але кількість осередків ОЗП може бути набагато більше. Осцилограф дозволяє робити чудову річ – запам'ятовувати в ОЗП дуже багато кодових слів, а потім «витягати» їх порціями, відповідними ширині екрану.

Важливим параметром осцилографа є обсяг пам'яті. Витягнуті з пам'яті цифрові дані подаються на цифро-аналоговий перетворювач (ЦАП) і можуть бути перетворені знову в аналоговий сигнал, але трансформований в часі. Він відображається на екрані. У разі застосування цифрового РК дисплея ЦАП може і не знадобитися. Для створення розгортки зазвичай використовується тактовий генератор і лічильник імпульсів. Останній керує адресами вибірки цифрових даних з пам'яті.

Крім обсягу пам'яті, іншим важливим параметром АЦП є частота роботи або частота вибірки. У разі складних форм досліджуваних сигналів вона повинна бути в десятки, а іноді й в сотні разів вище частоти повторення періодичного сигналу. У разі реєстрації одноразових сигналів з тривалістю  $t_c$  для його уявлення також треба мати певне число  $N$  відліків, так що період рівномірного по часу квантування сигналу буде дорівнює  $T = t_c / N$  частота квантування  $f_k = 1 / T = N / t_c$ . Наприклад, якщо сигнал з тривалістю  $t_c = 0,1$  мкс представити 100-ма відліками, то отримаємо  $T = 1$  нс і  $f_k = 1$  ГГц. Щоб виключити плутанину між звичайною граничною частотою і частотою відліків, останню зазвичай вказують в числі відліків за секунду.

Цей приклад наочно ілюструє основну проблему в побудові цифрових осцилографів, що працюють в реальному масштабі часу – необхідність в швидкодіючих АЦП. Частота квантування сигналів АЦП повинна хоча б на порядок перевищувати максимальну частоту спостережуваного сигналу, з тим, щоб на найкоротший сигнал довелося хоча б 10 відліків. При цьому можливо дослідження як одноразових, так і періодичних сигналів. У разі періодичних сигналів можлива статистична обробка відліків, наприклад, усередненням тим чи іншим способом і побудова усередненої осцилограми.

Промисловість випускає безліч АЦП і найбільш швидкісні з них можуть використовуватися для створення цифрових осцилографів з ефективною полосою тракту до 50...100 МГц. Це означає, що АЦП для таких осцилографів повинні мати частоти дискретизації до 0,5...1 ГГц. Однак для отримання більш високих частот потрібні спеціалізовані АЦП. Безперечним лідером у розробці швидкісних АЦП для цифрових осцилографів є корпорація Tektronix. Вона має свої унікальні АЦП з частотою квантування до 10...20 ГГц.

Іншим важливим параметром АЦП є їх розрядність – число рівнів квантування сигналу в двійковій формі. Переважна більшість АЦП для стробоскопічних осцилографів має стандартну розрядність, що дорівнює 8. Це означає, що число помітних рівнів сигналу становить  $2^8 = 256$ . Однак при цьому ступінчастість осцилограм зазвичай помітна «на око». Тому деякі АЦП для цифрових осцилографів можуть мати велику розрядність. Цю розрядність не треба плутати з розрядністю вбудованого в осцилограф керуючого мікропроцесора – вона зазвичай дорівнює 16 або, навіть, 32 бітам.

У кінцевій розрядності квантування (як за рівнем, так і за часом) криється «ахілесова п'ята» цифрової осцилографії. Наприклад, якщо в осцилограмі складного сигналу присутні дрібні деталі, то цифровий осцилограф їх може просто не помітити. Тим часом аналоговий осцилограф за допомогою розтяжки зображення по вертикалі і по горизонталі цілком в змозі розгорнути зображення деталі на весь екран.

Нарешті, третім специфічним параметром цифрових осцилографів є обсяг пам'яті – загальний і на одну осцилограму. Більшість сучасних цифрових осцилографів здатні зберігати в пам'яті кілька осцилограм і виводити їх на екран свого дисплея.

Перші осцилографи з оцифруванням сигналів були побудовані на основі звичайних аналогових осцилографів зі звичайним електронним екраном. Вони мали усі параметри, характерні для аналогових осцилографів. Спочатку цифрові методи використовувалися лише для вимірювання параметрів досліджуваних сигналів з виводом їх значень на екран дисплея або на окремий світлодіодний або рідкокристалічний індикатор. Потім стала використовуватися трансформація високошвидкісних сигналів у низькошвидкісні.

Такі прилади зазвичай називаються аналого-цифровими осцилографами, оскільки вони містять аналоговий тракт, що задає частотно-часові параметри осцилографа і цифрову частину. Вони випускаються і понині, але цей випуск поступово скорочується через дорожнечу таких приладів, їх великі розміри і маси. У той же час випуск чисто цифрових приладів постійно зростає. Це пов'язано із застосуванням в нових моделях цифрових осцилографів малогабаритних плоских рідкокристалічних дисплеїв.

## 2.5. Типові цифрові послідовності

У цифрових системах на вхід можуть подаватися безперервні та дискретні сигнали. Ступінчаста функція як модель дискретного сигналу може формуватися з безперервної функції або з числової послідовності деякої величини, визначеної в рівновіддалені моменти часу. Розглянемо ступінчасті функції, використовувані для аналізу цифрових систем обробки інформації.

Цифровий одиничний імпульс (рис. 2.18, а)

$$1_0[n] = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 0 \\ 0, & \text{при } n \neq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Цифровий одиничний імпульс, затриманий на  $n_0 = 2$  відліків (рис. 2.18, б)

$$1_0[n - n_0] = \begin{cases} 1, & \text{при } n = n_0 \\ 0, & \text{при } n \neq n_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

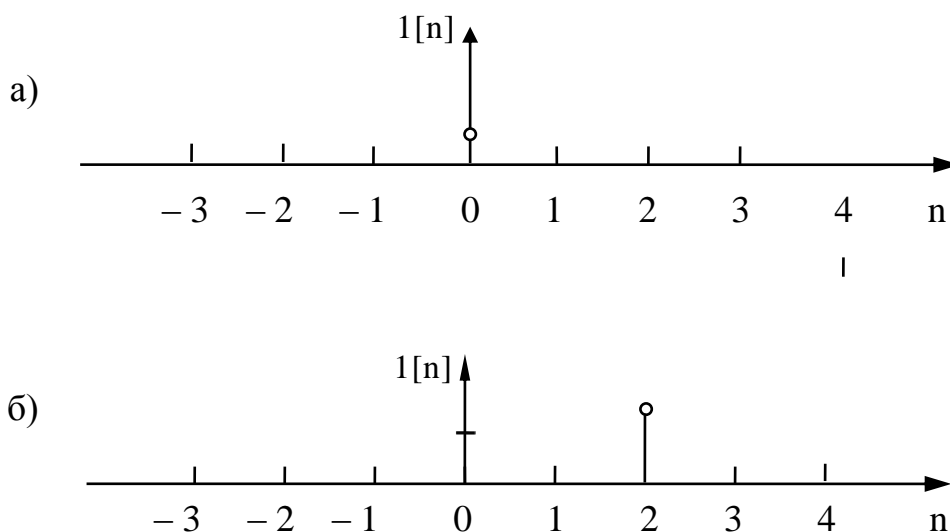


Рис. 2.18. Цифрові одиничні імпульси

У дискретних системах цей імпульс грає таку ж роль, як одиничний імпульс (дельта-функція Дірака) в аналогових системах. Важлива різниця

між ними у тому, що цифровий одиничний імпульс є фізично реалізованим сигналом, а аналоговий – узагальнюючою функцією.

Одиничний стрибок  $1[n]$  (рис. 2.19) задається наступним чином

$$1[n] = \begin{cases} 1, & \text{при } n \geq 0 \\ 0, & \text{при } n < 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Одиничний стрибок пов'язаний із одиничним імпульсом співвідношенням

$$1[n] = \sum_{m=0}^{\infty} 1_0[n-m]. \quad (2.5)$$

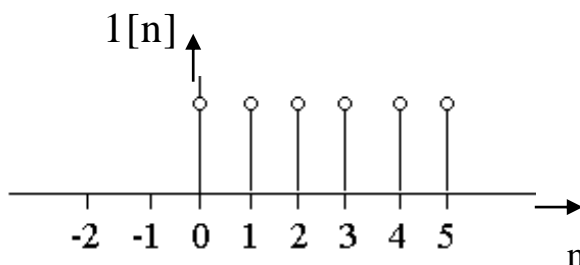


Рис. 2.19. Цифровий одиничний стрибок

Якщо цифрова послідовність розглядається у часі, то позначення вводиться ще період дискретизації, наприклад,  $x[nT]$ .

Наступною важливою цифровою послідовністю є синусоїдальна

$$x[n] = A \cdot \sin(\omega nT + \varphi), \quad (2.6)$$

де  $A$  – амплітуда,  $\varphi$  – початкова фаза. Її графік зображено на рисунку 2.20.

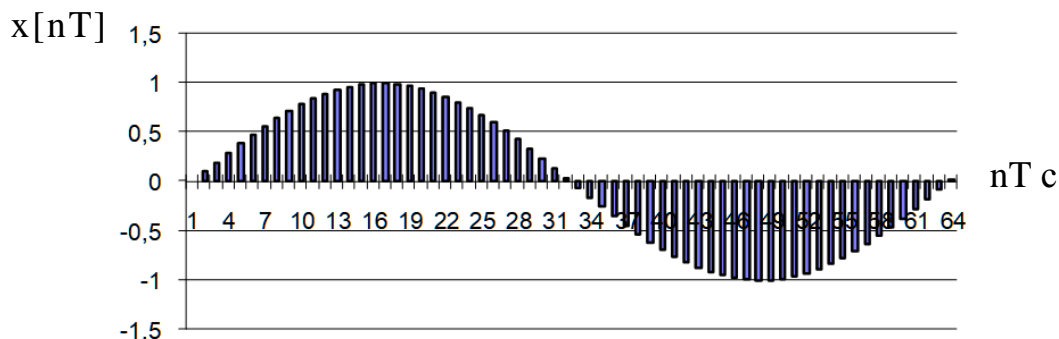


Рис. 2.20. Дискретна синусоїда  $x[nT] = A \sin(\omega nT + \varphi)$

Синусоїдальна послідовність може бути замінена символічним записом у комплексному вигляді за формулою Ейлера

$$x[n] = e^{j(\omega n T + \varphi)}. \quad (2.7)$$

Символічність запису полягає в тому, що насправді дискретна синусоїда визначається уявною частиною наведеної комплексної функції.

Довільна послідовність може бути легко виражена з використанням одиничного імпульсу.

Розглянемо числову послідовність  $a[0], a[1], a[2] \dots a[n]$ , де  $a[n]$  – значення  $n$ -го елемента. Така послідовність описується рівністю

$$a[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a[m] \delta_0[n-m]. \quad (2.8)$$

У рівності (2.8) використовується затримка одиничного імпульсу на  $m$  відліків та масштабування його множенням на множник  $a[m]$ .

#### Контрольні запитання та завдання

1. Що є неодмінною умовою роботи будь-якої вимірювальної, інформаційної та управляючої системи?
2. Дайте визначення сигналу.
3. Що розуміють під пропускнуою спроможністю лінії зв'язку?
4. Назвіть ознаки, за якими можна класифікувати сигнали ?
5. Як змінюється амплітуда несучого сигналу при амплітудній модуляції?
6. Для чого використовуються осцилографи?
7. Дайте визначення цифровому сигналу.
8. Назвіть основні типові послідовності.

### 3. ЧАСТОТНА ФОРМА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СИГНАЛІВ

#### 3.1. Частотна форма подання детермінованих сигналів

При аналізі роботи систем автоматичного управління модель складного періодичного сигналу  $f(t)$  можна подати [3,4] у вигляді виваженої суми базисних функцій  $\psi_k(t)$  :

$$f(t) = \sum_k C_k \psi_k(t), \quad (3.1)$$

де  $C_k$  – базисні коефіцієнти.

При цьому сукупність базисних коефіцієнтів  $C_k$  називається дискретним спектром сигналу.

При аналізі систем автоматичного управління широко використовується подання детермінованих сигналів із застосуванням базисних функцій  $e^{pt}$ . Якщо у ці функції підставити  $p = \pm j\omega$ , то це буде перетворення Фур'є, а якщо  $p = s \pm j\omega$  – перетворення Лапласа.

Універсальною математичною моделлю детермінованого періодичного сигналу є ряд Фур'є. Базис ряду Фур'є має такі переваги:

- простий аналітичний вираз,
- наочна геометрична інтерпретація,
- простота технічної реалізації,
- швидка збіжність ряду (що пов'язано з обмеженою потужністю усіх фізичних процесів),
- ортогональність компонентів (незалежність складових гармонік).

Остання властивість особливо цінна для дослідження моделей, тому що реакцію досліджуваної системи на будь-який складний вхідний сигнал можна визначити як суперпозицію (накладення) реакцій на його складові.

Таким чином, використання експоненціальних базисних функцій у перетворенні Фур'є комплексно сполученими парами (з позитивним та негативним параметром  $\omega$ ) дозволяє, відповідно до наслідку формули Ейлера, представити складний детермінований сигнал у вигляді суми гармонійних складових. Оскільки параметр  $\omega$  в цьому випадку являє собою кругову частоту, результат такого перетворення називають частотною формою подання сигналу:

$$\frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2} = \cos \omega \cdot t; \quad \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2 \cdot i} = \sin \omega \cdot t. \quad (3.2)$$

Розглянемо розкладання до ряду Фур'є періодичних функцій. Нехай функція  $x(t)$ , що задана на інтервалі часу  $t_1 \leq t \leq t_2$  і задовольняє умовам Діріхле, повторюється з періодом  $T = \frac{2\pi}{\omega} = t_2 - t_1$ , на протязі часу від  $-\infty$  до  $+\infty$ , де  $\omega$  – кутова частота зміни цього сигналу. Ця функція може бути представлена у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i \cdot k \cdot \omega \cdot t} \quad (3.3)$$

Запишемо ряд Фур'є у формі дійсної функції та перейдемо від двостороннього представлення ряду, що містить негативні частоти  $k < 0$ , до одностороннього.

Позначимо

$$C_k = \frac{a_k + i \cdot b_k}{2}; \quad C_{-k} = \frac{a_k - i \cdot b_k}{2}, \quad (3.4)$$

тоді

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{i \cdot k \cdot \omega \cdot t} + C_{-k} e^{-i \cdot k \cdot \omega \cdot t} = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + i \cdot b_k}{2} e^{i \cdot k \cdot \omega \cdot t} + \frac{a_k - i \cdot b_k}{2} e^{-i \cdot k \cdot \omega \cdot t} = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{e^{i \cdot k \cdot \omega \cdot t} + e^{-i \cdot k \cdot \omega \cdot t}}{2} + b_k \frac{e^{i \cdot k \cdot \omega \cdot t} - e^{-i \cdot k \cdot \omega \cdot t}}{2 \cdot i} \quad (3.5)$$

Відповідно до формули Ейлера, отримаємо остаточний вираз для ряду Фур'є в тригонометричному вигляді

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega t) + b_k \cdot \sin(k\omega t). \quad (3.6)$$

У розкладанні періодичного сигналу в ряд беруть участь гармоніки з початковою частотою  $\omega_0$ , які дискретно змінюються при зміні  $k$  від 0 до  $\infty$ .

Визначимо значення коефіцієнтів  $a_k$ ,  $b_k$ , використовуючи при цьому ортонормовану систему функцій. Як другу базисну функцію виберемо функцію

$$\psi_m(t) = e^{-j m \omega t} \quad (3.7)$$

При значеннях  $k = m$  функція під інтегралом

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{i \cdot k \cdot \omega \cdot t} \cdot e^{-i \cdot m \cdot \omega \cdot t} dt = 1. \quad (3.8)$$

Це інтеграл на інтервалі інтегрування, що дорівнює періоду функції  $T$ . Помножимо функцію  $x(t)$  у вигляді ряду на другу базисну функцію  $e^{-j m \omega t}$  та здійснимо інтегрування на інтервалі  $t_1, t_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) e^{-i \cdot m \cdot \omega \cdot t} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} C_k e^{i \cdot k \cdot \omega \cdot t} \cdot e^{-i \cdot m \cdot \omega \cdot t} dt, \quad (3.9)$$

при  $m = k$  отримаємо

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \omega \cdot t} dt = T \cdot C_k, \quad (3.10)$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \omega \cdot t} dt. \quad (3.11)$$

Запишемо вираз (3.11) відповідно до позначення

$$C_k = \frac{\alpha_k + i \cdot b_k}{2}.$$

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot \left( \frac{e^{i \cdot k \cdot \omega \cdot t} + e^{-i \cdot k \cdot \omega \cdot t}}{2} - i \frac{e^{i \cdot k \cdot \omega \cdot t} - e^{-i \cdot k \cdot \omega \cdot t}}{2} \right) dt \\ \frac{\alpha_k + i \cdot b_k}{2} &= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot \left( \frac{e^{i \cdot k \cdot \omega \cdot t} + e^{-i \cdot k \cdot \omega \cdot t}}{2} \right) dt - \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot \left( \frac{e^{i \cdot k \cdot \omega \cdot t} - e^{-i \cdot k \cdot \omega \cdot t}}{2} \right) dt \\ \frac{\alpha_k}{2} &= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot \left( \frac{e^{i \cdot k \cdot \omega \cdot t} + e^{-i \cdot k \cdot \omega \cdot t}}{2} \right) dt \\ \frac{b_k}{2} &= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot \left( i \frac{e^{i \cdot k \cdot \omega \cdot t} - e^{-i \cdot k \cdot \omega \cdot t}}{2} \right) dt \end{aligned} \quad (3.12)$$



$$\alpha_k = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t) dt, \quad (3.13)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) dt. \quad (3.14)$$

При  $k = 0$  отримаємо

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt \quad (3.15)$$

і, через прийняте позначення –

$$\alpha_0 = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} x(t) dt \quad (3.16)$$

$$\alpha_0 = 2 \cdot C_0$$

Остаточно в тригонометричному вигляді ряд періодичної функції запишеться так

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t)]. \quad (3.17)$$

Таким чином, будь-який складний періодичний детермінований сигнал можна представити у вигляді суми ряду гармонійних складових.

При запису ряду Фур'є у комплексній формі функцію

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot e^{-i \cdot k \cdot \omega \cdot t} dt \quad (3.18)$$

прийнято називати комплексним спектром періодичного сигналу, цей спектр дискретний, тому що значення  $C_k$  визначені на числовій осі лише для цілих значень  $k$ .

Позначимо дійсну частину коефіцієнта  $C_k$  як  $U_k(k\omega)$ , а уявну частину – через  $V_k(k\omega)$ . Тоді коефіцієнт  $C_k$  в комплексному вигляді дорівнює,  $C_k = U_k(k \cdot \omega) + i \cdot V_k(k \cdot \omega)$ , а модуль цієї комплексної функції  $A(k\omega)$  визначає значення частотного спектру

$$A(k\omega) = \sqrt{U_k^2(k \cdot \omega) + V_k^2(k \cdot \omega)}. \quad (3.19)$$

Частотний спектр – це залежність модулів коефіцієнтів ряду Фур'є від частот складових. Цей ряд гармонік зручно представити спектральними діаграмами. На діаграмі спектра кожній гармоніці з певною частотою відповідно ставиться вертикальний відрізок, висота якого пропорційна значенню модуля коефіцієнта  $C_k$ .

Фактично спектральний аналіз здійснюється з допомогою алгоритмів і програм швидкого перетворення Фур'є (БПФ) чи дискретного перетворення Фур'є (ДПФ). Дискретні перетворення Фур'є обробляють реалізацію будь-якої довжини, а БПФ – лише  $2^n$  точок.

Область частот, у якій зосереджена переважна частина потужності, називається практичною шириною спектра. Зауважимо, що спектр потужності зменшується набагато швидше, ніж спектр амплітуд.

Для розкладання сигналу  $u(t)$  до ряду Фур'є необхідно, щоб він був періодичною функцією. У цьому випадку вона еквівалентна нескінченній сумі гармонік. Як зміниться розкладання в ряд Фур'є, якщо  $T \rightarrow \infty$  ?

Уявімо, що неперіодична функція – це частина періодичної функції, що спостерігається, з періодом, що прагне до  $\infty$ . У цьому випадку частота першої гармоніки прагне нуля  $\omega_1 \rightarrow 0$ . При переході до наступної гармоніки нескінченно мале збільшення частот перетворюється на диференціал  $d\omega$  і ряд гармонік  $\omega_1; 2\omega_1; \dots$  перетворюється на ряд  $d\omega_1; 2d\omega_1; \dots$ .

Отримуємо комплексну функцію спектральної щільності з дійсним модулем та уявною фазою, яка характеризує розподіл амплітуди або потужності неперіодичного сигналу за частотою (розмірність –  $V \cdot c$ ).

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (3.20)$$

Найчастіше застосовується спектральна щільність потужності  $\frac{1}{2\pi T} |S(\omega)|^2$ , яка кінцева навіть для незатухаючих сигналів, оскільки будь-який фізично реалізований сигнал обмежений у часі і має кінцеву енергію.

Розглянемо приклад розкладання періодичної функції до ряду Фур'є з використанням пакета прикладних програм MathCAD.

Задаємо часовий інтервал  $t = 0,01 \dots 128$  с, частоту і період вихідної функції  $\omega = 0,1 \text{ с}^{-1}$ ,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  с. Функція  $f(t)$  має вигляд меандра, графік якого наведено на рисунку 3.1:

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } \sin(\omega \cdot t) > 0 \\ 0 & \text{if } \sin(\omega \cdot t) < 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

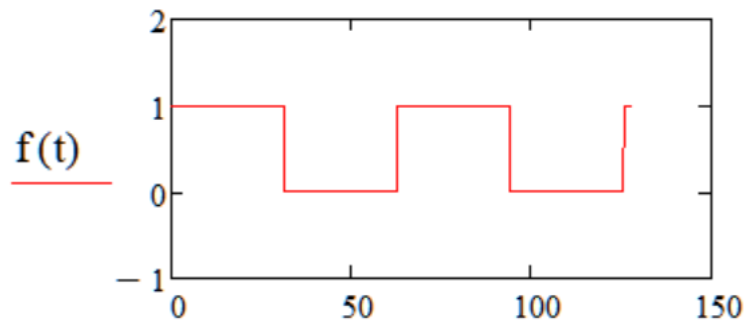


Рис. 3.1. Графік вихідної функції

Задаємо кількість гармонік розкладання  $k = 6$ . Обчислимо коефіцієнти розкладання

$$k := 1..6 \quad t1 := 0 \quad t2 := T$$

$$a_0 := \left(\frac{2}{T}\right) \cdot \int_{t1}^{t2} f(t) dt \quad a_0 = 1 \quad (3.22)$$

$$b_k := \left(\frac{2}{T}\right) \cdot \int_{t1}^{t2} f(t) \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) dt \quad (3.23)$$

Відновимо сигнал по 6-ти гармоніках (рис. 3.2):

$$b_k = \begin{array}{|c|} \hline 0,637 \\ \hline 0 \\ \hline 0,212 \\ \hline 0 \\ \hline 0,127 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

$$C(k, t) := b_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t) \quad (3.24)$$

$$f_1(t) := \left(\frac{a_0}{2}\right) + \sum_{k=1}^6 C(k, t) \quad (3.25)$$

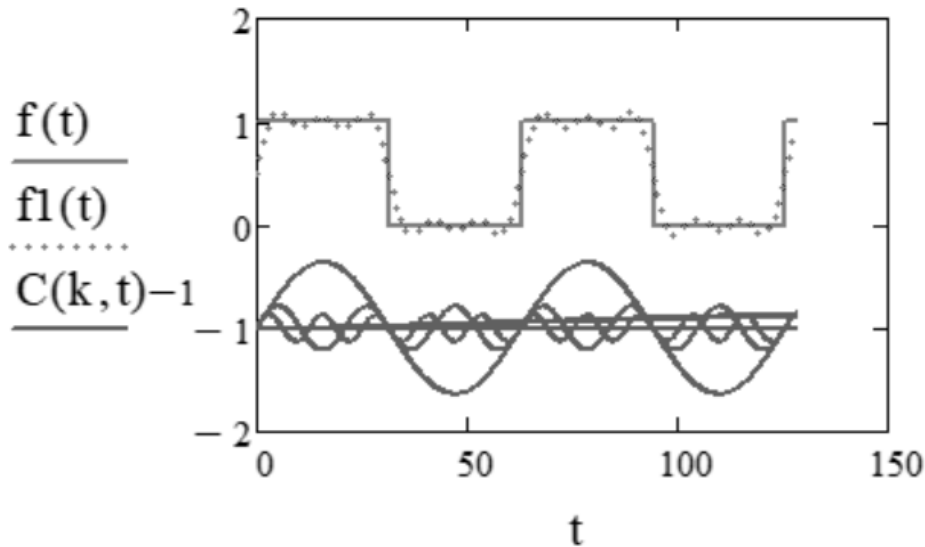


Рис. 3.2. Відновлений сигнал та його гармоніки

### 3.2. Індивідуальне завдання № 1

#### Пряме перетворення Фур'є детермінованого сигналу

Відповідно до заданої функції (на рисунках у Додатку А зображено один період періодичної функції та варіанти її параметрів) необхідно:

1. Розрахувати коефіцієнти ряду Фур'є для 6-ти гармонік у пакеті Mathcad.
2. Отримати вираз функцій цих гармонік та побудувати їх графіки.
3. За цими гармоніками отримати вихідну функцію та побудувати її графік.
4. Дати пояснення за отриманими результатами (причини незбігу графіка вихідної функції та відновленої після розкладання ряд Фур'є).

Звіт оформити відповідно до наведеного вище контрольного прикладу.

Контрольні запитання.

1. Дайте визначення ряду Фур'є.
2. Чому ряд Фур'є є частотною моделлю детермінованого сигналу.

3. Як впливає кількість гармонік на збіжність вихідної функції та функції, отриманої з розкладання в ряд Фур'є.

### 3.3. Визначення частотного спектра дискретного сигналу

Оцінку характеристик прийнятого сигналу можна проводити різними методами. Робота багатьох технічних пристроїв заснована на поданні моделі сигналу у вигляді частотного спектру, наприклад, частотна фільтрація сигналів, вібродіагностика, передача і прийом радіосигналів тощо. Тому розглянемо один з розділів ЦОС – частотний аналіз сигналу.

Математичну модель сигналу можна представити у вигляді ряду [5,6]. Для частотного аналізу найкраще досліджуваний сигнал представити у вигляді ряду Фур'є. Розглянемо розкладання дискретного сигналів в ряд Фур'є.

Наведемо формули ряду Фур'є для сигналу, математична модель якого представлена у вигляді детермінованої періодичної функції  $f(t)$  з періодом  $T_0$ . Для такої функції ряд Фур'є виражається наступним чином

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{i \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t}, \quad (3.26)$$

де  $k$  – порядковий номер  $k$ -ої гармоніки, а  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  – кутова частота.

Коефіцієнти ряду  $C_k$  обчислюються за формулою

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \cdot e^{-ik \cdot \omega_0 t} dt \quad (3.27)$$

У разі неперіодичної функції маємо

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \cdot e^{i\omega t} dt, \quad (3.28)$$

де  $S(j\omega)$  – пряме перетворення Фур'є

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt. \quad (3.29)$$

Модулі коефіцієнтів ряду  $C_k$  утворюють дискретний частотний спектр сигналу  $f(t)$ , а  $S(j\omega)$  являє собою безперервну функцію, звану спектральною характеристикою.

Розглянемо перетворення Фур'є для дискретних послідовностей. У тих випадках, коли дискретна послідовність періодична (а також має кінцеву тривалість), її можна представити рядом Фур'є. Візьмемо періодичну послідовність  $x_n[n]$  з часовим періодом  $T_0$ , періодом дискретизації  $T = \frac{T_0}{N}$  і частотою дискретизації  $\omega_d = \frac{2\pi}{T}$ . Представимо цю послідовність у вигляді ряду

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot n \cdot T}. \quad (3.30)$$

Розглянемо функції  $e^{ik\omega_0 nT}$  і  $e^{i \cdot T \cdot k \left( \omega_0 \cdot n + \frac{2\pi \cdot q}{T} \right)}$ , вони рівні між собою і періодом є ціле кратне значення  $q$  частоти дискретизації  $\frac{2\pi}{T}$ .

Таким чином, функція  $e^{ik\omega_0 nT}$  є періодичною функцією з періодом  $\frac{2\pi \cdot q}{T} = \omega_d \cdot q$ .

Визначимо частоту періоду спостереження сигналу як  $\omega_0 = \frac{2\pi}{NT}$  і отримаємо вираз (3.30) в дещо іншому вигляді

$$e^{i \cdot T \cdot k \left( \omega_0 \cdot n + \frac{2\pi}{T} \right)} = e^{i \cdot T \cdot k \left( n \frac{2\pi}{N \cdot T} + \frac{2\pi \cdot q}{T} \right)} = e^{\frac{i \cdot 2\pi}{N} k(n + N \cdot q)}. \quad (3.31)$$

Комплексні експоненти (3.31) відрізняються тільки в діапазоні від 0 до  $N$ , тому запишемо вираз дискретного перетворення Фур'є з діапазоном підсумовування від 0 до  $N - 1$ , підкреслюючи тим самим наявність  $N$  різних комплексних експонент:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} C_k \cdot e^{i \frac{2\pi}{N} k \cdot n}. \quad (3.32)$$

Для визначення цього ряду необхідно обчислити коефіцієнти  $C_k$ . Для безперервного періодичного сигналу з періодом  $T_0 = N \cdot T$  коефіцієнти ряду обчислюються за формулою (3.27). Замінюючи інтегрування підсумовуванням з одностороннім діапазоном значень інтервалу визначення сигналу, отримаємо значення коефіцієнтів ряду Фур'є:

$$C_k = \frac{2}{T_0} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-i \frac{2\pi}{N} k \cdot n} T, \quad (3.33)$$

або, після перетворень –

$$C_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-i \frac{2\pi}{N} k \cdot n}. \quad (3.34)$$

Сума  $\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-i \frac{2\pi}{N} k n}$  називається дискретним перетворенням Фур'є.

Розглянемо приклад дискретного перетворення Фур'є. В якості вихідної візьмемо модель гармонійного сигналу  $y(t) = \sin(2\omega t)$  з кутовою частотою  $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$  і періодом дискретизації  $T = 0,5 \text{ с}$ . Задамо час реєстрації сигналу  $T_0 = 10 \text{ с}$  і поточний час  $t = 0,05 \dots T_0 \text{ с}$ . При цьому період дискретизації  $T = 0,05 \text{ с}$ , а частота дискретизації  $\omega_d = 2\pi / T = 12,67 \text{ с}^{-1}$ . Графік цього сигналу на рис. 3.3.

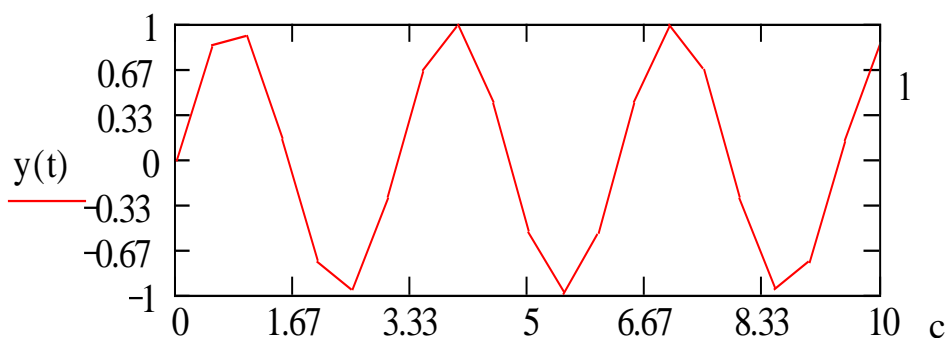


Рис. 3.3. Графік гармонійного сигналу

Визначимо кількість відліків  $N$  на періоді спостереження  $T_0$  і кількість гармонік  $k - N = T_0/T = 20$ . Виконаємо дискретне перетворення Фур'є і отримаємо графік частотного спектра гармонійного сигналу (рис. 3.4):

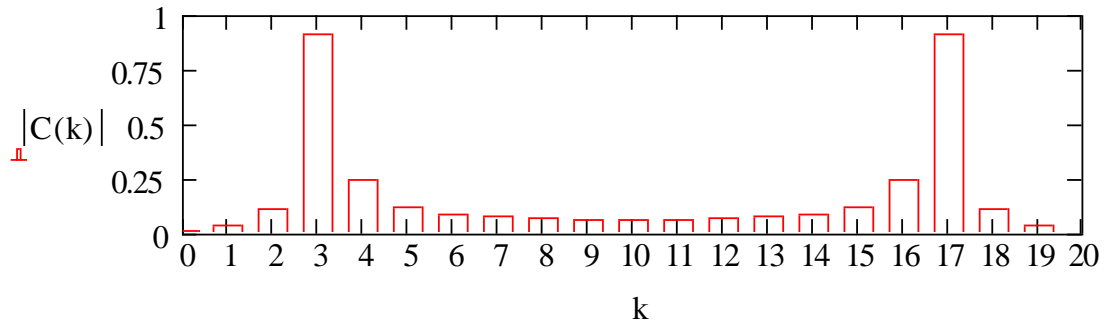


Рис. 3.4. Графік частотного спектра гармонійного сигналу

З цього спектру видно, що при вибраній частоті дискретизації форма синусоїди спотворена. Тобто частота дискретизації вибрана невірно. Якщо на половині значення частоти дискретизації складові частотного спектра не рівні нулю (перетинаються з іншим періодом), то відновити вихідний сигнал за частотним спектром неможливо. Збільшимо частоту дискретизації в 5 разів і отримаємо графік синусоїди (рис. 3.5).

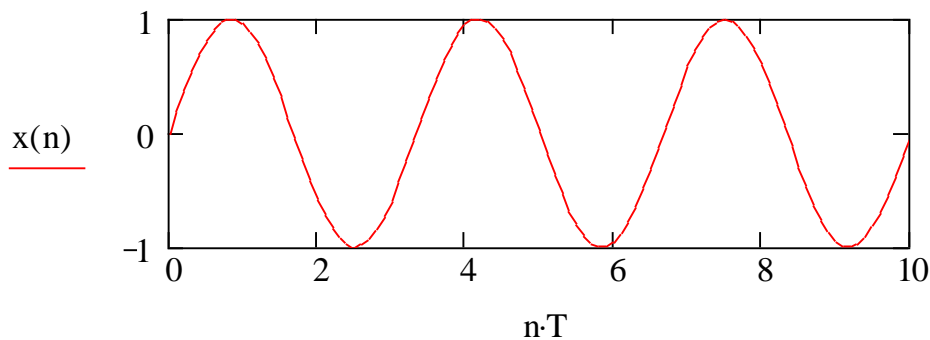


Рис. 3.5. Графік гармонійного сигналу при частоті дискретизації  $\omega_d = 0,1 \text{ с}^{-1}$

Тепер графік дискретної синусоїди практично нічим не відрізняється від графіка безперервної синусоїди.

Графік частотного спектра для цього випадку зображений на рисунку 3.6.



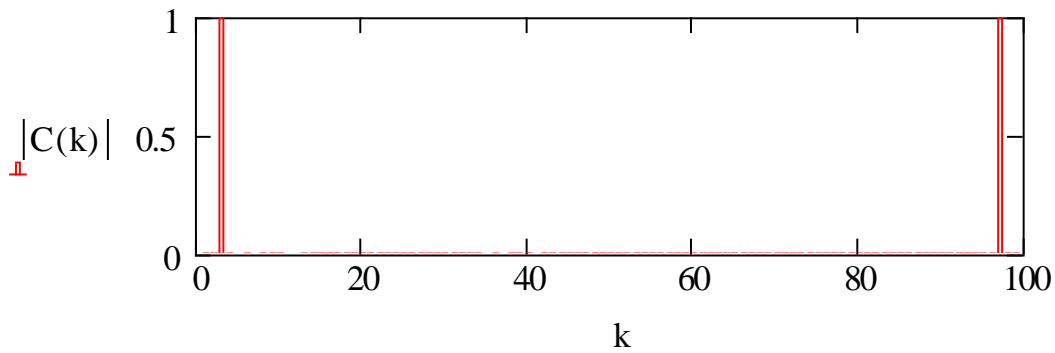


Рис. 3.6. Графік частотного спектру при частоті дискретизації  $\omega_d = 0,1 \text{ c}^{-1}$

Видно, що при частоті  $\omega$ , що дорівнює половині частоти дискретизації  $\omega = \frac{\omega_d}{2} = \frac{2\pi \cdot k}{N \cdot T} = \frac{2\pi \cdot 50}{100 \cdot 0,1} = 31,4 \text{ c}^{-1}$ , складові частотного спектра відсутні.

Нагадаємо, що частота дискретизації, за теоремою Котельникова, повинна бути як мінімум в 2 рази вище максимальної частоти спектра сигналу. Це твердження не суворе математично, але наочно продемонстровано вище.

### 3.4. Побудова частотного спектру сигналу за допомогою дискретного перетворення Фур'є в пакеті Excel

За допомогою пакета EXCEL запишемо у стовпчик А числа від 0 до 127. Для побудови частотного спектру в діапазоні осередків від А1 до А128 беруться числа кратні 64.

Побудуємо модель сигналу у вигляді

$$y[nT] = \sin(\omega_1 \cdot nT) + \sin(\omega_2 \cdot nT) + \sin(\omega_3 \cdot nT) \quad (3.35)$$

де  $n$  – порядковий номер відліку;  $T$  – період дискретизації, який визначається в 10 разів меншим, ніж період самої високочастотної складової сигналу.

Для значень частот  $\omega_1 = 20 \frac{1}{\text{c}}$ ,  $\omega_2 = 40 \frac{1}{\text{c}}$ ,  $\omega_3 = 62,8 \frac{1}{\text{c}}$  і періоду

дискретизації  $T = \frac{2 \cdot \pi}{62,8 \cdot 10} = 0,01 \text{ c}$  побудуємо графік сигналу на рис. 3.7.

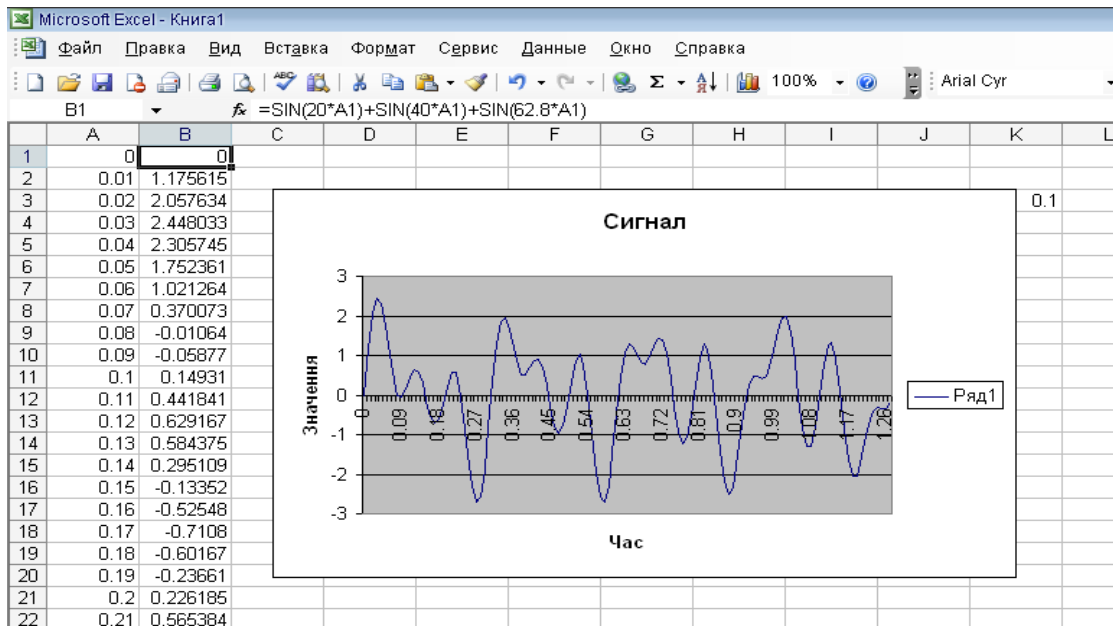


Рис. 3.7. Графік сигналу

Для побудови частотного спектра наведеного сигналу скористаємося вбудованими функціями EXCEL. У меню «Сервіс» вибираємо вкладку «Аналіз даних» (якщо її немає, то ставимо її. Заходимо в меню «Сервіс» – «Надстройки» ставимо галочку біля вкладки «Пакет аналізу» і натискаємо «Ок»). В меню «Аналізу даних» вибираємо «Аналіз Фур'є». Меню виглядає як на рисунку 3.8.

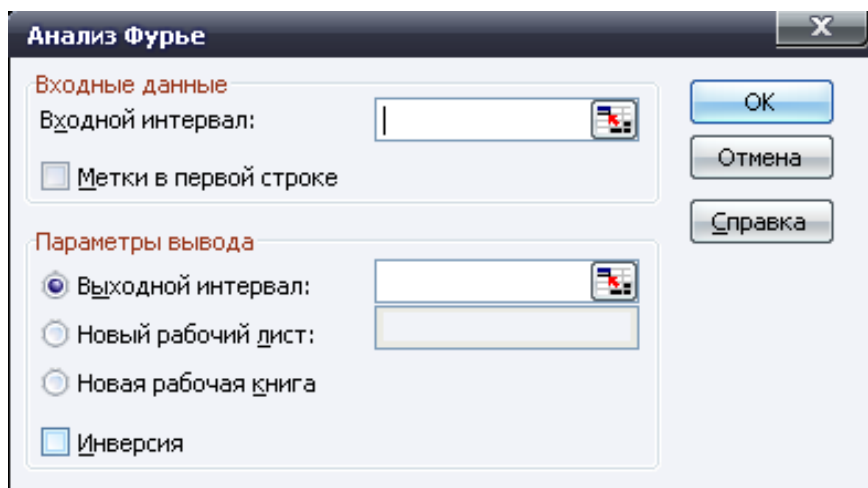


Рис. 3.8. Аналіз Фур'є

У вхідному інтервалі вказуємо діапазон осередків з моделлю сигналу. У вихідному вказуємо порожній діапазон осередків від 1 до 128.

Результатом дискретного перетворення Фур'є є функція комплексної змінної. За допомогою функції `МНИМ.ABS` отримуємо модуль комплексних чисел. Будуємо графік частотного спектру сигналу на рис. 3.9.

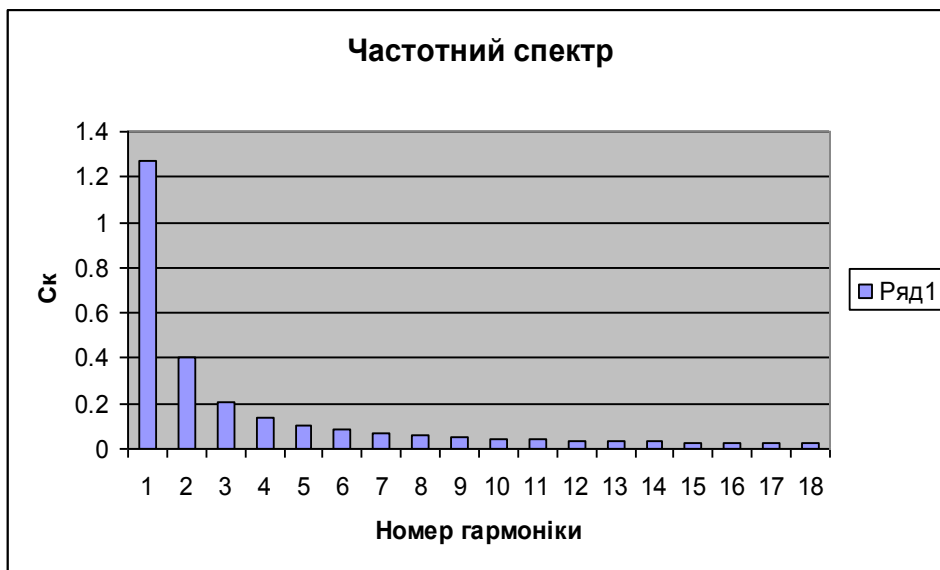


Рис. 3.9. Частотний спектр сигналу

Для перетворення номера гармоніки, наприклад  $k = 2$ , в частоту складової сигналу користуємося формулою  $\omega = \frac{2\pi \cdot k}{N \cdot T} = \frac{2\pi \cdot 2}{128 \cdot 0,01} \approx 10c^{-1}$ , а для отримання коефіцієнтів амплітуд гармонік  $C_k$  слід результат дискретного перетворення Фур'є поділити на  $\frac{N}{2}$ .

### 3.5. Побудова частотного спектру сигналу за допомогою дискретного перетворення Фур'є в пакеті Matlab

Поставимо задачу провести частотний аналіз сигналу за допомогою дискретного перетворення Фур'є у пакеті прикладних програм MATLAB [7].

Для аналізу оберемо сигнал, що являє собою суму двох синусоїд

$$s(t) = \sin(2\pi \cdot 10 \cdot t) + \sin(2\pi \cdot 120 \cdot t). \quad (3.36)$$

Використовуючи засоби написання програмного коду системи Matlab, виконаємо побудову і дослідження частотного спектра Фур'є для заданого сигналу з частотою дискретизації 1000 Гц:

Using Toolbox Path Cache. Type "help toolbox\_path\_cache".

To get started, select "MATLAB Help" from the help menu.

```
>> fs = 1000
```

Задамо інтервал часу від 0 до 0,6 с –

```
>> t = 0: 1/ fs: 0.6 ;
```

Сигнал є сумою двох синусоїд:

```
>> x = sin (2 * pi * 10 * t) + sin (2 * pi * 120 * t) ;
```

На рисунку 3.10 показаний цей сигнал. Для виведення зображення необхідно ввести наступний набір команд.

```
>> figure (1), plot (t, x)
```

```
>> title ('Вихідний сигнал'); grid ;
```

```
>> xlabel ('Час, t'); ylabel ('Значення сигналу')
```

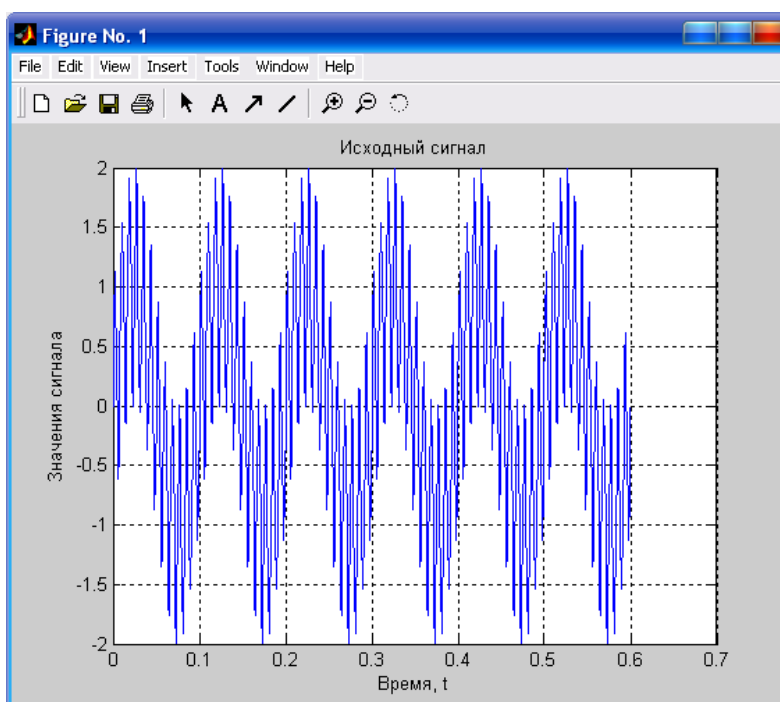


Рис. 3.10. Вихідний сигнал

Виконаємо перетворення Фур'є. Дискретне пряме перетворення сигналу в пакеті Matlab здійснюється за допомогою функції `fft`.

Функція  $Y = \text{fft}(X)$  обчислює для масиву даних  $X$  дискретне перетворення Фур'є, використовуючи алгоритм швидкого Фур'є-перетворення. Якщо масив  $X$  двовимірний, обчислюється дискретне перетворення кожного стовпчику.

Функція  $Y = \text{fft}(X, n)$  обчислює  $n$ -точкове дискретне перетворення Фур'є. У нашому випадку:

```
>> Y = fft(x, 512);
```

Для отриманого масиву комплексних чисел  $Y$  функція  $\text{conj}(Y)$  повертає масив комплексно-сполучених значень для елементів –  $Y - P_{yy} = \text{abs}(Y)/256$ .

Побудуємо графік частотного спектра дискретного перетворення Фур'є (рис. 3.11) за допомогою функцій:

```
>> f = fs * (0 : 255) / 512 ;  
>> figure (2), plot (f, Pyy(1:256))  
>> title ('Спектр'); grid ;  
>> xlabel ('f, Гц')
```

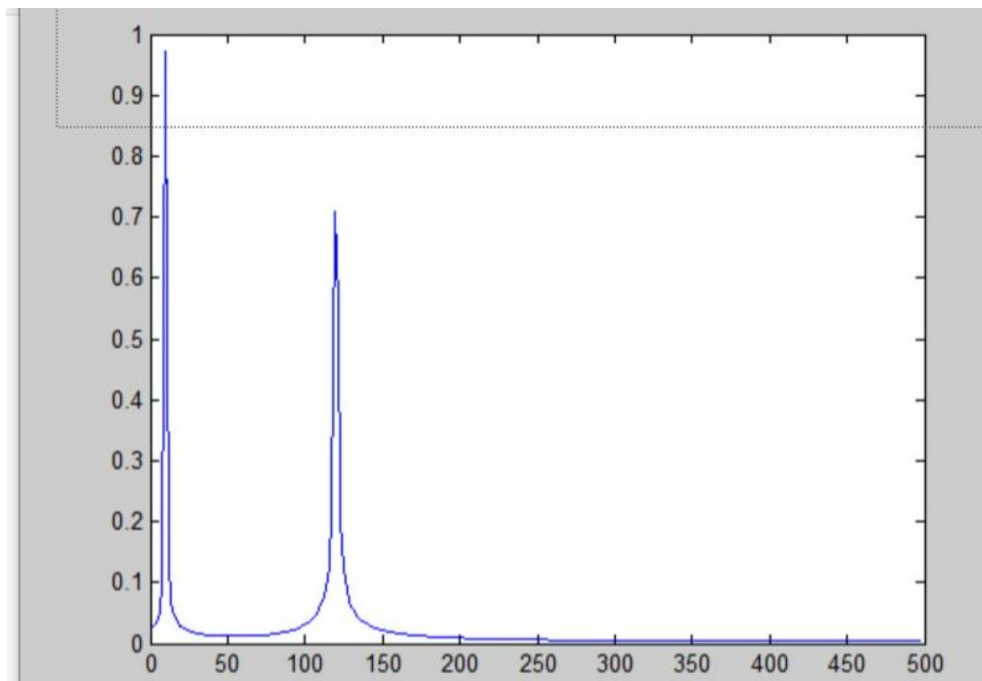


Рис. 3.11. Графік частотного спектра дискретного перетворення Фур'є

Побудувавши графік частотного спектра, можна виділити частоти, на яких амплітуда спектра максимальна. Це частоти 10 і 120 Гц.

Для того, щоб отримати нестационарний сигнал, скористаємося пакетом Excel. В комірки A1:A601 введемо дискретні значення часу (рис. 3.12).

	A	B	C	D	E
1	0				
2	0,001				
3	0,002				
4	0,003				
5	0,004				
6	0,005				
7	0,006				
8	0,007				
9	0,008				
10	0,009				
11	0,01				

Рис. 3.12. Дискретні значення часу

У комірку B1 задамо функцію  $= \text{SIN} (2*\text{ПИ}()*10*A1)$ . Протягнемо цю функцію в комітках B2:B301 (рис. 3.13).

	A	B	C
1	0	0	
2	0,001	0,062791	
3	0,002	0,125333	
4	0,003	0,187381	
5	0,004	0,24869	
6	0,005	0,309017	
7	0,006	0,368125	
8	0,007	0,425779	
9	0,008	0,481754	
10	0,009	0,535827	
11	0,01	0,587785	

Рис. 3.13. Фрагмент документу Excel

В комірку B302 задамо функцію  $= \text{SIN} (2*\text{ПИ}()*120*A302)$ . Протягнемо її в комірки B303:B601.

Виділимо діапазон B1:B601 і правою кнопкою миші викличемо меню, в якому виберемо «Формат ячеек». Виберемо формат «Числовий». Число десятинних знаків 3 (рис. 3.14).

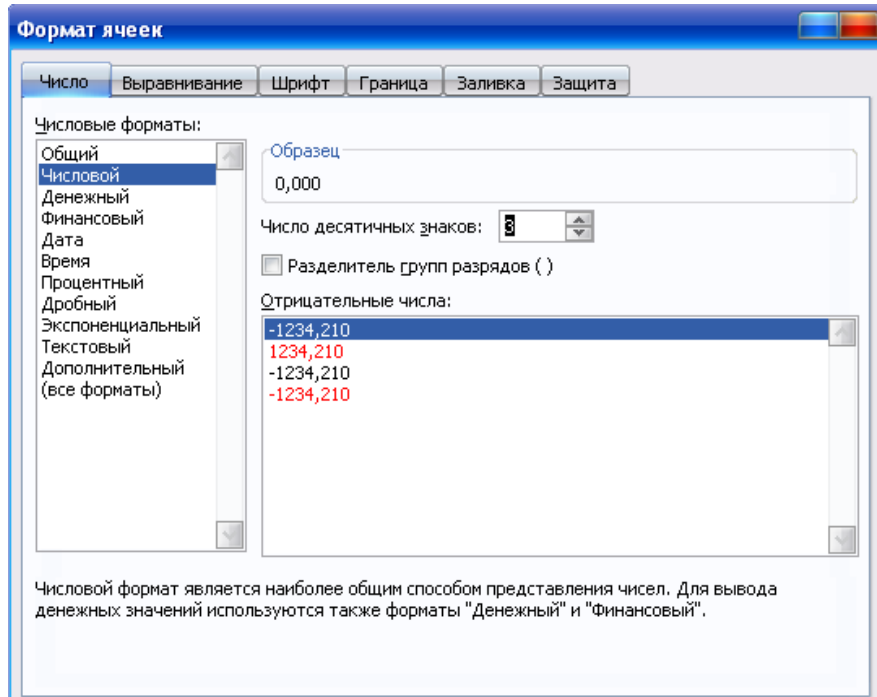


Рис. 3.14. Формат комірок Excel

Копіюємо дані комірок B1:B601 в текстовий документ з розширенням sig.txt (рис. 3.15). Десяткові знаки повинні відділятися точкою (а не комою). Збережіть даний документ в директорії Matlab (папка work).

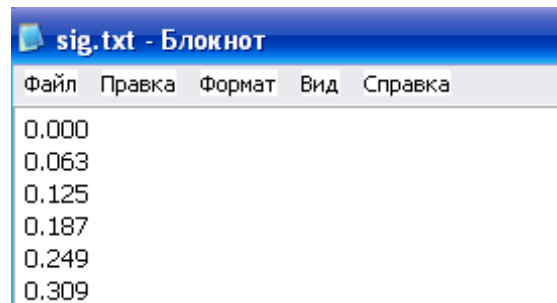


Рис. 3.15. Фрагмент текстового документу

Задамо інтервал часу від 0 до 0,6 с

$$t1 = 0: 1/ fs: 0.6 ;$$

Частота дискретизації така ж, як і для попереднього сигналу.

Завантажимо сигнал з текстового документа. Для цього наберемо:

```
>> r = load ('sig.txt')
```

Побудуємо графік і підпишемо осі (рис. 3.16) –

```
>> plot (f, r)
```

```
>> title ('Нестационарный сигнал'); grid ;
```

```
>> t = 0: 1/ fs: 0.6 ;
```

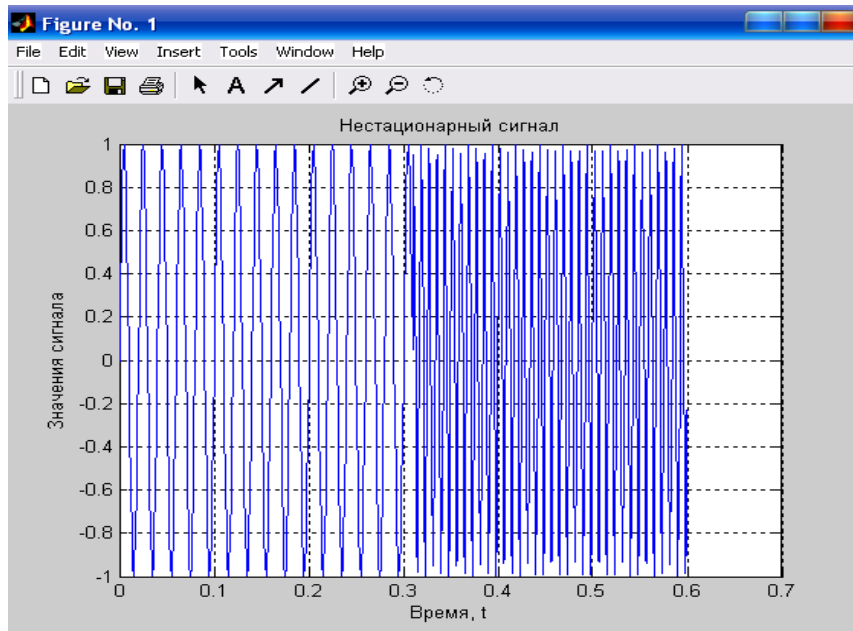


Рис. 3.16. Нестационарный сигнал

Для цього сигналу виконаємо наступне перетворення Фур'є:

```
>> Y = fft (x, 512) ;  
Pyy = abs (Y) / 256  
>> f = fs * (0 : 255) / 512;  
>> figure (2), plot (f, Pyy(1:256))  
>> grid
```

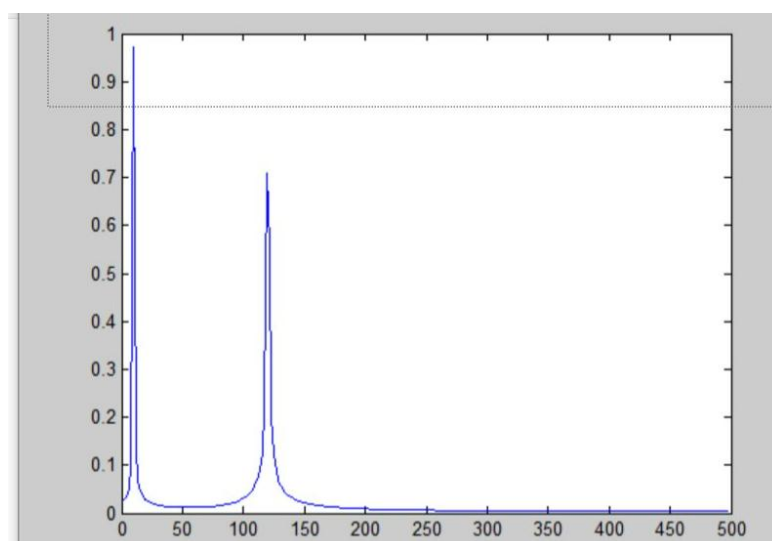


Рис. 3.17. Графік частотного спектра нестационарного сигналу



Побудувавши графік частотного спектра (рис. 3.17), можна виділити частоти, на яких амплітуда спектра максимальна – це 10 Гц і 120 Гц.

Таким чином, графіки частотного спектра для стаціонарного і нестаціонарного сигналу не відрізняються. Перетворення Фур'є за своєю суттю не може відрізнити стаціонарний сигнал від нестаціонарного.

### Контрольні запитання та завдання

1. Як можна подати модель складного періодичного сигналу ?
2. Які переваги має базис ряду Фур'є?
3. Чи можна будь-який складний періодичний детермінований сигнал представити у вигляді суми ряду гармонійних складових?
4. Що таке частотний спектр?
5. За допомогою яких алгоритмів здійснюється спектральний аналіз?
6. Назвіть необхідну умову для розкладання сигналу  $u(t)$  до ряду Фур'є .

## 4. ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ

### 4.1. Властивість вейвлетів

Вейвлет-перетворення сигналів є узагальненням спектрального аналізу, типовим представником якого є класичне перетворення Фур'є. Термін «вейвлет» в перекладі з англійської означає «маленька хвиля». Вейвлети – це узагальнена назва сімейств математичних функцій певної форми. Причому всі ці функції виходять з однієї базової та породжуються за допомогою її зрушень і розтягувань по осі часу.

Вейвлет-перетворення розглядають часові функції в термінах коливань, локалізованих за часом та за частотою. Як правило, вейвлет-перетворення (WT) класифікується як дискретне (DWT) або безперервне (CWT). DWT використовується для перетворення та кодування сигналів, CWT – для аналізу сигналів. Вейвлет-перетворення в даний час використовується для величезного числа різноманітних застосувань, незмінно замінюючи звичайне перетворення Фур'є.

Вейвлетний аналіз представляє особливий тип лінійного перетворення сигналів і фізичних даних. Базис власних функцій, за яким проводиться вейвлетне розкладання сигналів, має багато специфічних властивостей та можливостей. Вейвлетні функції базису дозволяють концентрувати увагу на тих чи інших локальних особливостях аналізованих процесів, які не можуть бути виявлені за допомогою традиційних перетворень Фур'є і Лапласа.

Основна область застосування вейвлетного перетворення – аналіз і обробка сигналів і функцій, нестаціонарних в часі або неоднорідних в

просторі, коли результати аналізу повинні містити не тільки частотну характеристику сигналу (розподіл енергії сигналу за частотними складовими), але й відомості про локальні координати, на яких виявляють самі ті або інші групи частотних складових або на яких відбуваються швидкі зміни частотних складових сигналу

У порівнянні з розкладанням сигналів на ряди Фур'є вейвлети здатні з набагато більш високою точністю представляти локальні особливості сигналів, аж до розривів 1-го роду (стрибків). На відміну від перетворення Фур'є, вейвлет-перетворення одновимірних сигналів забезпечує двовимірну розгортку, при цьому частота і координата розглядаються як незалежні змінні, що дає можливість аналізу сигналів одразу в двох просторах.

В основі спектрального аналізу сигналів лежить інтегральне перетворення і ряди Фур'є. Виявлені недоліки розкладання довільних сигналів та функцій в частотній області та точного їх відновлення після перетворень привели до появи віконного перетворення Фур'є і стимулювали розвиток вейвлетного перетворення.

Обмежена інформативність аналізу нестационарних сигналів та практично повна відсутність можливостей подання їх особливостей обумовлені тим, що в частотній області відбувається «розмазання» особливостей сигналів (розривів, піків тощо) по всьому частотному діапазону спектра.

Гармонічні базисні функції розкладання не здатні відобразити перепади сигналів з нескінченною крутизною (типу прямокутних імпульсів), тому що для цього потрібно безмежно велике число членів ряду. При обмеженні числа членів ряду при відновленні сигналу виникають осциляції («явище Гіббса»).

Вейвлет («сплеск») – це хвильова форма сигналу ефективно обмеженої тривалості, середнє значення якої дорівнює нулю:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (4.1)$$

Порівняємо вейвлет з синусоїдальною хвилею, яка є основою аналізу Фур'є (рис. 4.1). Синусоїди не мають обмеженої тривалості – вони тривають від мінус до плюс нескінченності. І де синусоїди гладкі і передбачувані, вейвлети прагнуть бути нерівними і асиметричними.

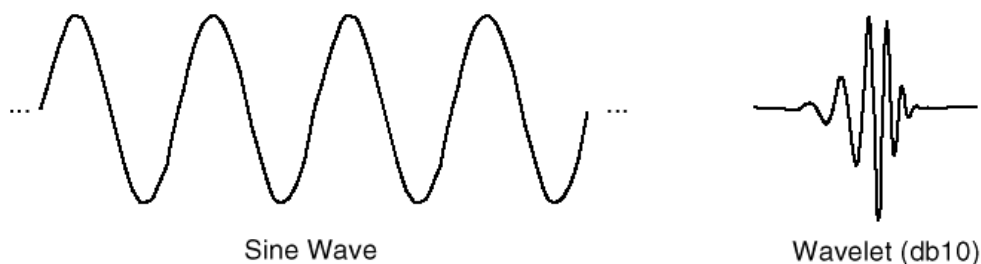


Рис. 4.1. Графіки синусоїди та вейвлету

Аналіз Фур'є складається з розкладання сигналу на синусоїдальні хвилі різних частот. Аналогічно, вейвлет аналіз – це розкладання сигналу на зсунуті і масштабні версії початкового (або материнського) вейвлету.

Можна інтуїтивно побачити, що сигнали з різкими змінами повинні аналізуватися краще за допомогою нерівномірного вейвлету, ніж за допомогою гладкої синусоїди, а також окремі риси сигналів можуть бути описані краще за допомогою вейвлетів, які мають локальну протяжність.

Математично процес аналізу Фур'є представлений перетворенням Фур'є

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt, \quad (4.2)$$

яке є сумою по всьому часу сигналу  $f(t)$ , помноженого на комплексну експоненту.

Результатами цього перетворення є коефіцієнти Фур'є  $F(\omega)$ , множення яких на синусоїду відповідної частоти дасть синусну компоненту вихідного сигналу. Графічно цей процес виглядає так (рис. 4.2)

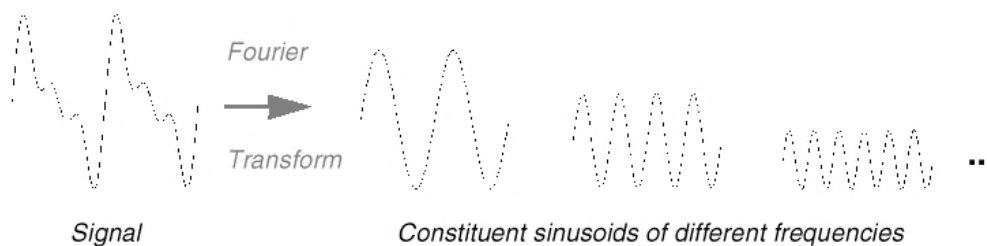


Рис. 4.2. Перетворення Фур'є на синусні компоненти вихідного сигналу

Аналогічно, безперервне пряме Wavelet-перетворення (БВП) визначається як сума по всьому часу сигналу, помноженого на масштабні зсунуті версії вейвлет-функції

$$C(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \psi \cdot \left( \frac{t - \tau}{a} \right) dt, \quad (4.3)$$

де  $\psi(t)$  – вейвлет-функція,  $f(t)$  – сигнал.

Результатом НВП будуть вейвлет-коефіцієнти  $C(\tau, a)$ , які є функцією позиції  $\tau$  і масштабу  $a$ .

Порядок обчислення коефіцієнтів вейвлет-перетворення демонструють наступні перетворення.

1. Обчислити коефіцієнт  $C(\tau, a)$ , який показує, як тісно корельований вейвлет і сигнал на цьому інтервалі. Високе значення  $C(\tau, a)$  означає велику схожість. Зауважте, що результати будуть залежати від форми обраного вейвлету (рис. 4.3, а).

2. Зрушити вейвлет вправо і повторювати кроки 1 і 2 до тих пір, доки не буде досліджений увесь сигнал (рис. 4.3, б).

3. Змінити масштаб (розтягнути) вейвлет і повторити пп. 1-3 (рис. 4.3, в).

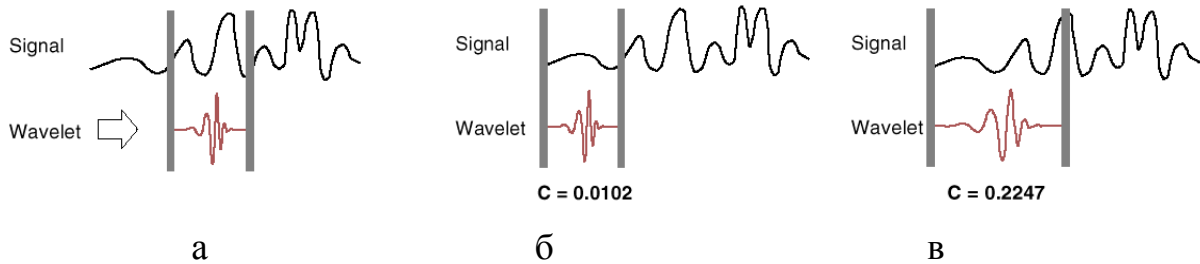


Рис. 4.3. Обчислення коефіцієнтів вейвлет-перетворення

Масштабування вейвлету просто означає його розтягнення або стиснення. Вводиться поняття масштабний коефіцієнт, який позначають літерою  $a$ . Якщо мова йде, наприклад, про синусоїди, то ефект від масштабного коефіцієнта легко побачити на наступних графіках (рис. 4.4). Чим більше частота, тим більш стисла синусоїда.

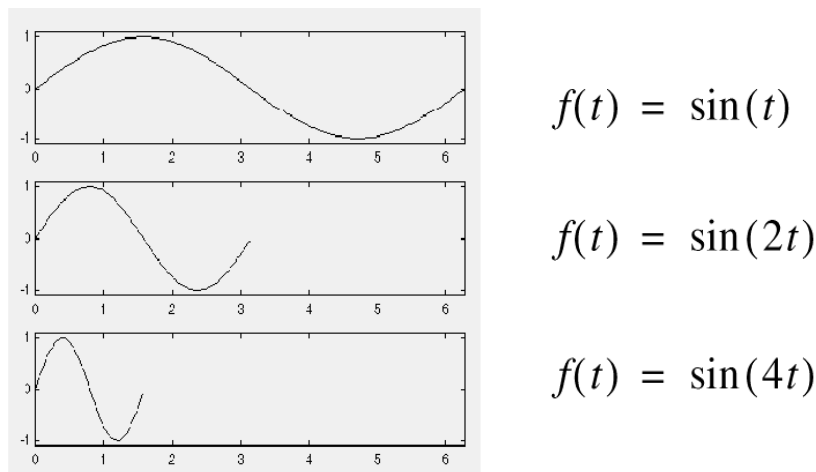
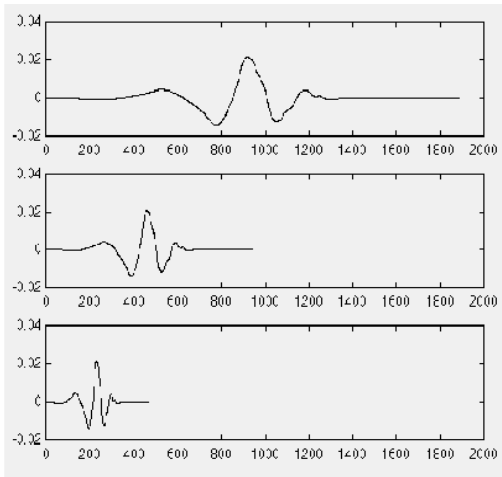


Рис. 4.4. Масштабування синусоїди

Масштабний коефіцієнт діє і на вейвлети. Чим менше масштаб, тим більше «стисненим» буде вейвлет (рис. 4.5).

З цих діаграм видно, що для синусоїди  $\sin(\omega t)$  масштаб  $a$  обернено пропорційний частоті  $\omega$ . Аналогічно з вейвлет-аналізом – масштаб обернено пропорційний частоті сигналу.



$$f(t) = \psi(t) \quad ; \quad a = 1$$

$$f(t) = \psi(2t) \quad ; \quad a = \frac{1}{2}$$

$$f(t) = \psi(4t) \quad ; \quad a = \frac{1}{4}$$

Рис. 4.5. Масштабування вейвлету

Зрушення вейвлету просто може призвести до затримок або прискорення його фронту. Математично затримка функції на час  $k$  представляється у вигляді (рис. 4.6, а, б).



а – вейвлет функція  $\psi(t)$ , б – зрушена вейвлет-функція  $\psi(t - k)$

Рис. 4.6. Зрушення вейвлету у часі

Таким чином, є зв'язок між масштабом вейвлету  $a$  та частотою зміни сигналу, як показано на рис. 4.7:

а) малий масштаб  $a \rightarrow$  стиснутий вейвлет  $\rightarrow$  складові змінюються швидко;

б) великий масштаб  $a \rightarrow$  розтягнутий вейвлет  $\rightarrow$  складові змінюються повільно.



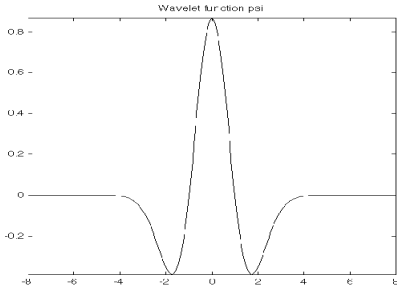
Рис. 4.7. Зв'язок між масштабом вейвлету та частотою складових сигналу

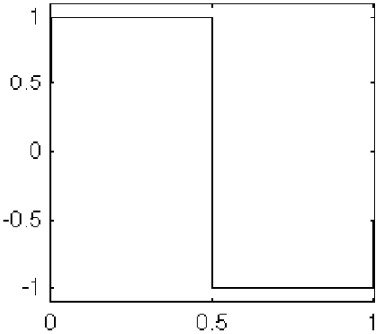
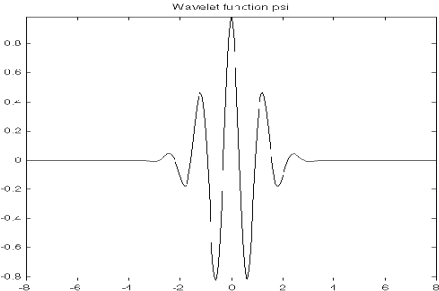
## 4.2. Вейвлет-функції

Наведемо кілька представників сімейств вейвлет-функцій (таблиця 4.1).

Таблиця 4.1

Приклади вейвлет-функцій  $\psi(t)$

Вейвлет	Аналітичний запис $\psi(t)$	Спектральна щільність $\Psi(\Omega)$
1	2	3
Дійсний безперервний базис		
Гаусові вейвлети: першого порядку WAVE – вейвлет другого порядку	$-te^{-t^2/2}$ $(1-t^2)e^{-t^2/2}$	$(i\Omega)\sqrt{2\pi}e^{-\Omega^2/2}$ $(i\Omega)^2\sqrt{2\pi}e^{-\Omega^2/2}$
МНАТ – вейвлет $n$ -го порядку «мексиканський капелюх» (mexican hat)	$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left( e^{-t^2/2} \right)$ 	$(-1)^n (i\Omega)^n \sqrt{2\pi} e^{-\Omega^2/2}$
DOG – різниця Гаусса (difference of gaussians)	$e^{-t^2/2} - 0.5e^{-t^2/8}$	$\sqrt{2\pi} \left( e^{-\Omega^2/2} - 0.5e^{-2\Omega^2} \right)$
LP – вейвлет Літлвуда – Пейлі (Littlewood & Paley)	$(\pi t)^{-1} (\sin(2\pi t) - \sin(\pi t))$	$\begin{cases} (2\pi)^{-1/2}, & \pi \leq  \Omega  \leq 2\pi, \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$

1	2	3
Дійсний дискретний базис		
Вейвлет Хаара (Haar)	$\begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t < 1, \\ 0, & \text{інакше} \\ & \text{інакше.} \end{cases}$ <p style="text-align: center;">Wavelet function psi</p> 	$\Psi(\Omega) = i \frac{\sin^2(\Omega/4)}{\Omega/4} e^{i\Omega/2}$
Комплексний базис		
Вейвлет Морле (Morlet)	$e^{i\Omega_0 t} e^{-t^2/2}$ 	$\sigma(\Omega) \sqrt{2\pi} e^{-(\Omega - \Omega_0)^2/2}$
Вейвлет Пауля (Paul)	$\Gamma(n+1) \frac{i^n}{(1-n)^{n+1}}$	$\sigma(\Omega) \sqrt{2\pi} \Omega^n e^{-\Omega}$

Вибір аналізуючого вейвлету, як правило, визначається тим, яку інформацію необхідно витягти з сигналу. Кожен вейвлет має характерні особливості як у часовій, так і в частотній області, тому іноді, за допомогою різних вейвлетів, можна повніше виявити і підкреслити ті чи інші властивості аналізованого сигналу.

### 4.3. Частотний аналіз сигналів за допомогою вейвлет-перетворення

Поставимо задачу провести частотний аналіз сигналу у пакеті прикладних програм MATLAB за допомогою безперервного вейвлет-перетворення.

Виконаємо безперервне вейвлет-перетворення стаціонарного сигналу. Алгоритм обчислення безперервного вейвлет-перетворення сигналу реалізовується в пакеті Matlab з використанням функції для обчислення безперервного вейвлет-перетворення CWT, лістинг якої наведено нижче.

CWT            Безперервне вейвлет-перетворення

Синтаксис:

```
c = cwt (s, scales, 'wname')
```

```
c = cwt (s, scales, 'wname', 'plot')
```

```
c = cwt (s, scales, 'wname', mode)
```

Ця функція виконує континуальні перетворення сигналу  $s$  і повертає масив з спектральними коефіцієнтами перетворення.

Вхідними параметрами функції є наступні:

- 'wavelet' – ідентифікатор імені материнської вейвлет-функції (ядра перетворення);
- scales – вектор значень масштабуємої змінної  $a$  базисного вейвлету.

Крім того, функція CWT має низку додаткових вхідних параметрів, що розширюють можливості візуалізації результатів аналізу сигналу. Справа в тому, що функція, записана в першій формі, повертає лише спектральні коефіцієнти досліджуваного сигналу, тому з метою їх візуалізації представляється необхідним використання засобів тривимірної графіки, наявних в системі.

На противагу необхідності залучення графічних засобів, функція, що записується в другій формі, автоматично відображає вейвлет-спектр сигналу в окремому графічному вікні. Включенню режиму відображення тут відповідає наявність опції 'plot'.

Функція, записана в третій формі, має більш широкі можливості візуалізації, оскільки містить розширення опцію mode, яка дозволяє вказати вид «підфарбовування» спектра. Зокрема, значення 'lv' дозволяє поліпшити контрастність зображення коефіцієнтів сигналу, значення 'glb' – затінити спектральний шум коефіцієнтів, згладжуючи, таким чином, кольоровість загальної спектральної картини, значення 'abslv' або 'lvlabs', а також 'absglb' або 'glbabs' – відконтрастувати і згладити колірну гамму спектра відповідно. При цьому використання розширення 'absglb' є еквівалентним включенню в функцію CWT опції 'plot'. Спектральну картину вейвлет-перетворення



можна представити також в аксонометрії, вказавши в опції mode префікс '3D', наприклад, '3Dplot'. У таблиці 4.2 вказані основні вейвлети.

Таблиця 4.2

**Основні вейвлети Matlab**

Ідентифікатор	Функції
'haar'	Функції Хаара
'db'	Функції Добеші
'sym'	Сімлети
'coif'	Койфлети
'bior'	Біортогональні функції
'rbio'	Оборотні біортогональні функції
'meyr'	Функції Мейера
'dmeyr'	Дискретні функції Мейера
'gaus'	Гаусові похідні
'mexh'	«Мексиканський капелюх» (сомбреро)
'morl'	Вейвлет Морле
'cgau'	Комплексні гаусові похідні
'shan'	Вейвлети Шенона-Котельникова
'fbsp'	В-сплайнові вейвлети

Задаємо материнський вейвлет (у якості материнського вейвлету обрано вейвлет МНАТ).

```
>> w = 'mexh'
w = mexh
```

Функція для обчислення і побудови спектра безперервного вейвлет-перетворення (колірна гамма поверхні «jet»).

```
>> Sc = cwt (x, 0.1:60, w, '3Dplot') ;
>> colormap (jet) ;
>>
```

**COLORMAP** Палітра кольорів

*Синтаксис:*

```
colormap (C)
colormap (jet)
colormap ('default')
```

C = colormap

caxis (caxis)

Палітра кольорів C – це матриця розміру  $m \times 3$  дійсних чисел з діапазону  $[0 \ 1]$ . Рядок k палітри сформований з 3-х чисел, які вказують інтенсивність червоного, зеленого і синього кольорів, тобто  $C(k, :) = [r(k) \ g(k) \ b(k)]$ .

Команда colormap (C) встановлює палітру згідно з матрицею C. Якщо значення елемента матриці виходить за межі інтервалу  $[0 \ 1]$ , видається повідомлення про помилку – Colormap must have values in  $[0,1]$ .

Значення елементів палітри повинні бути в інтервалі  $[0,1]$ . Команди colormap ('default') або colormap (hsv) встановлюють штатну палітру, яка відповідає моделі hue-saturation-value («відтінок – насиченість – значення»). Послідовність кольорів цієї палітри відповідає кольорам веселки.

В рамках системи MATLAB реалізовані такі палітри (табл. 4.3).

Таблиця 4.3

### Кольори палітри системи MATLAB

1	2	3
bone	Grey-scale with tinge of blue color map	Сіра палітра з відтінком синього
cool	Shades of cyan and magenta color map	Палітра з відтінками блакитного та фіолетового
copper	Linear copper-tone color map	Лінійна палітра у відтінках міді
flag	Alternating red, white, blue and black color map	Палітра з чергуванням червоного, синього і чорного кольорів
gray	Linear grey-scale color map	Лінійна палітра у відтінках сірого
hot	Black-red-yellow-white color map	Палітра з чергуванням чорного, червоного, жовтого і білого
hsv	Hue-saturation-value color map	Палітра веселки
jet	Variant of hsv	Різновид hsv-палітри
pink	Pastel shades of pink color map	Рожева палітра з відтінками пастелі
prism	Prism (red-orange-yellow-green-blue-violet) color map	Палітра з чергуванням червоного, оранжевого, жовтого, зеленого, синього і фіолетового
white	All white color map	Біла палітра

На рисунку 4.8 зображена вейвлет-спектрограма стаціонарного сигналу.

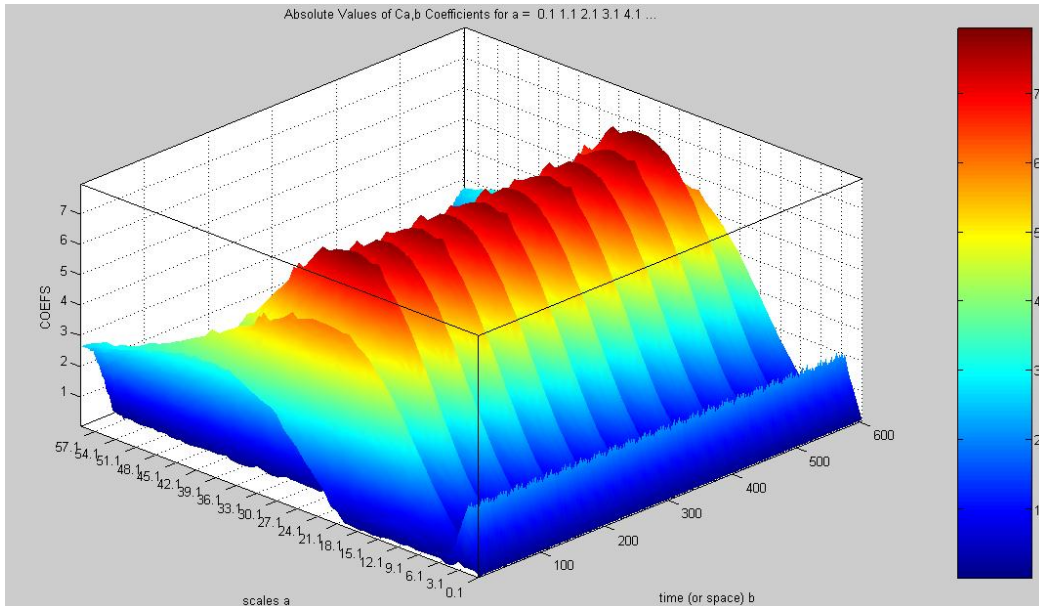


Рис. 4.8. Вейвлет-спектрограма стаціонарного сигналу

Як видно з цього рисунка, отримано, на відміну від звичайного перетворення Фур'є, значення частот по осі часу, тобто частотно-часову характеристику сигналу.

Виконаємо аналогічні дії для отримання вейвлет-спектрограми нестационарного сигналу, зображеної на рисунку 4.9:

```
>> t1 = 0 : 1 / fs : 0.6 ;
>> r = load ('sig.txt') ;
>> w = 'mext'
w = mext
>> Sc = cwt (r, 0.1 : 60, w, '3Dplot') ;
>> color (jet) ;
```

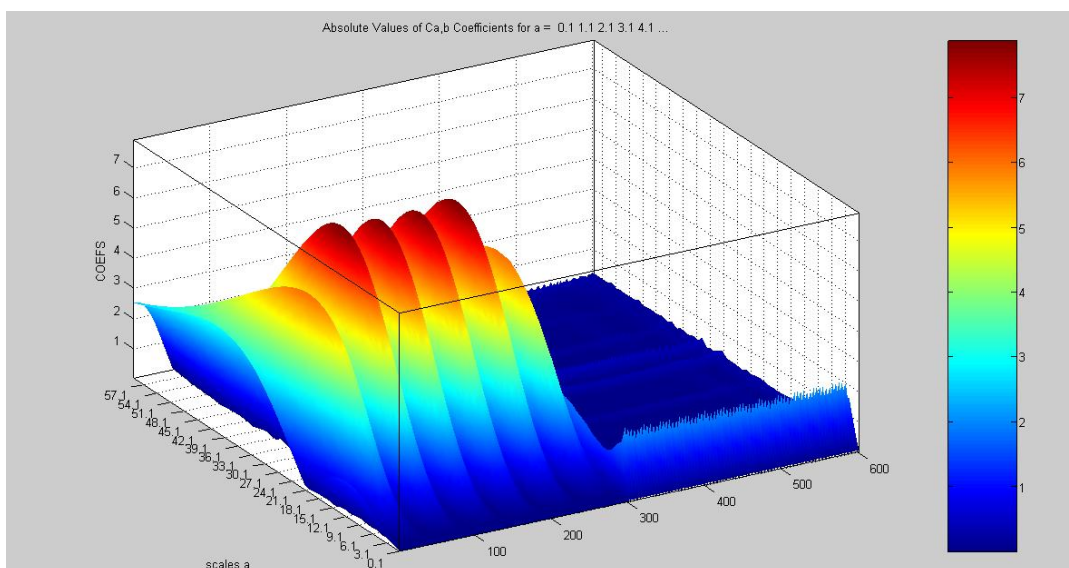


Рис. 4.9. Вейвлет-спектрограма нестационарного сигналу

Аналіз рисунків 4.8 і 4.9 показує, що безперервне вейвлет-перетворення є інструментом, який дозволяє досліджувати особливості сигналу, тобто є засобом для аналізу нестационарних процесів.

Варто зазначити, що межі зміни масштабного коефіцієнта  $a$  залежать від того, які частоти ми хочемо відобразити в результаті розкладання. Наприклад, центральна частота вейвлету МНАТ дорівнює 0,25 Гц. Оскільки в нашому випадку  $\Delta t = 1/1000$  ( $f_s = 1000$  Гц, за умовою завдання), то центральна частота вейвлету МНАТ, використовуваного для першого рівня розкладання (коли масштабний коефіцієнт  $a = 1$ ), дорівнює  $F_r = 0,25 \cdot 1000 = 250$  Гц. Якщо  $a = 0,1$ , то маємо частоту  $F_r = 250 / 0,1 = 2500$  Гц. Для значення  $a = 30$  маємо частоту  $F_r = 250 / 30 = 8,33$  Гц. Значення  $a = 60$  забезпечує частоту перегляду 4,17 Гц. Таким чином, якщо  $a$  лежить в межах від 0,1 до 60, то вейвлет-коефіцієнти будуть відображати властивості сигналу в межах частот від 2500 Гц до 4,17 Гц.

Для того, щоб відобразити більш високі частоти, потрібно вибрати значення масштабного коефіцієнта  $a < 1$ , або вибрати для аналізу вейвлет з більшою центральною частотою. Щоб дізнатися центральну частоту вейвлету в пакеті Matlab, можна використовувати функцію `centfrq`. Наведемо синтаксис даної команди:

`CENTFRQ` Частота центрального (головного) всплеска вейвлету

Синтаксис:

`f = centfrq ('wname')`

`f = centfrq ('wname', N)`

`[f, x, app] = centfrq ('wname', N, 'plot')`

Функція `centfrq` повертає частоту  $f$  (Гц) центрального (головного) сплеску вейвлету, зареєстрованого в Wavelet Toolbox (детальну інформацію про вейвлет можна отримати, наприклад, за допомогою функцій `waveinfo`, `wavemngr`, `wavefun`), що дорівнює частоті апроксимуючої його гармоніки.

При цьому входними параметрами даної функції є:

– `'wname'` – ідентифікатор імені вейвлету, центральна частота якого оцінюється;

–  $N$  – показник ступеня 2, причому  $2N$  є число точок області визначення вейвлету;

– `'plot'` – зарезервована опція, що включає режим відображення вейвлету і гармоніки, апроксимуючої його головний сплеск.

Проілюструвати правила використання функції `centfrq` можна за допомогою наступних прикладів.

#### Приклад 1

% Ідентифікатор імені вейвлету Морле

`wname = 'morl';`

% Визначення частоти центрального сплеску

f = centfrq (wname)

f = 0.8125

Приклад 2

% Ідентифікатор імені біортогональних вейвлету

wname = 'bior2.2';

% Число значень сітки

N = 7;

% Визначення частоти центрального сплеску

[F, x, app] = centfrq (wname, N, 'plot');

Біортогональний вейвлет Добеші, гармоніка, апроксимуюча його головний сплеск, а також значення середньої частоти вейвлету показані на рисунку 4.10.

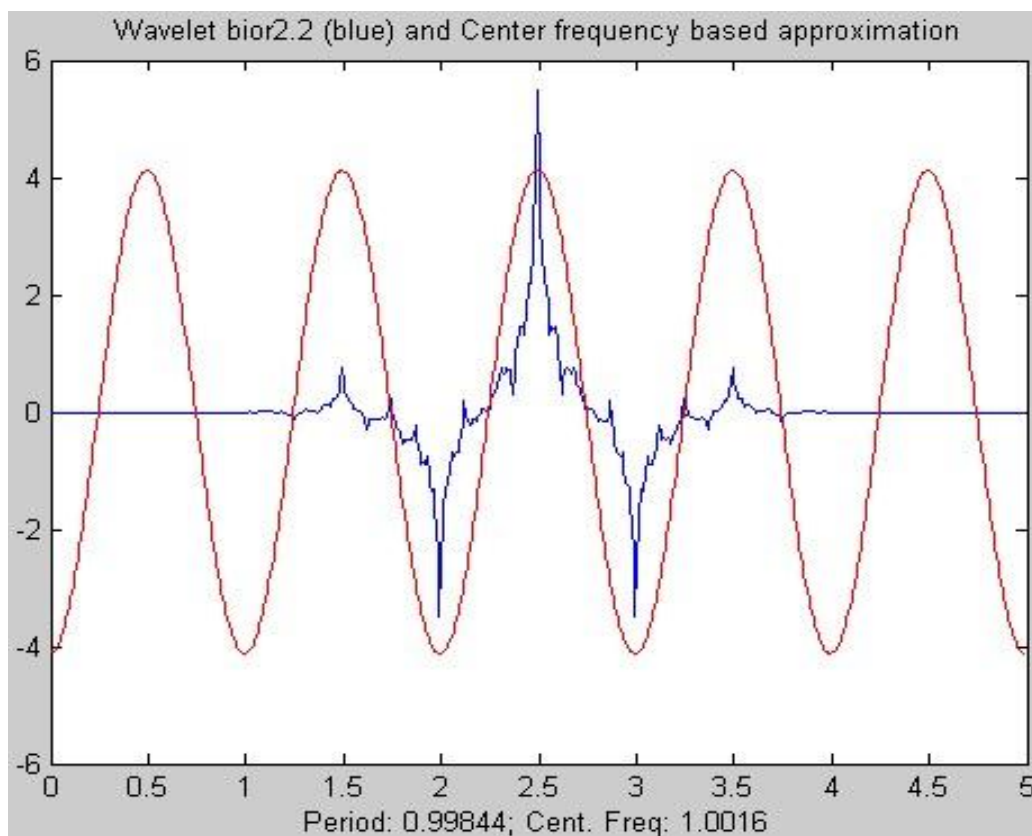


Рис. 4.10. Біортогональний вейвлет Добеші та гармоніка, що апроксимує його головний сплеск

Крім того, в пакеті Matlab є функція scal2frq [1,6], яка повертає псевдочастоту Фур'є  $f$ , відповідно масштабовуємої змінної  $a$  вейвлету 'wname', заданого з кроком дискретизації delta :

SCAL2FRQ

Перетворення масштабовуємої змінної в частоту

Синтаксис:

```
f = scal2frq (a, 'wname', delta)
```

Функція повертає псевдочастоту Фур'є  $f$ , відповідну масштабуємії змінній  $a$  вейвлету 'wname', заданого з кроком дискретизації  $\Delta t$ .

Метою подібного перетворення є необхідність встановлення однозначного взаємозв'язку між масштабуємою змінною вейвлету і частотою Фур'є, що часто виникає в задачах обробки сигналів, параметричної ідентифікації тощо.

Оскільки операція дилатації, здійснювана над вейвлетом за допомогою масштабуємії змінної, призводить до його розтягування або стиснення в  $a$  разів, очевидно, після даної операції частота його центрального сплеску також змінюється в таке ж число разів. Тому в основі алгоритму перетворення масштабуємії змінної, реалізованого в функції `scal2frq`, лежить процедура визначення центральної частоти вейвлету, значення якої дорівнює частоті гармоніки, найкращим чином апроксимуючої його центральний сплеск (докладніше див. Опис функції `centfrq`), а також вираз для визначення частоти вейвлету, що записується, наприклад, у вигляді

$$f_a = \frac{1}{a \Delta t} f_c,$$

де  $f_a$  – псевдочастота вейвлету (Гц);  $a$  – коефіцієнт масштабування змінної;  $\Delta t$  – крок дискретизації;  $f_c$  – частота центрального сплеску вейвлету (Гц).

З появою в пакеті Wavelet Toolbox функції `scal2frq` рішення задачі ідентифікації частот складових сигналів стало тривіальним. Дійсно, як показують наступні приклади, визначення частот гармонійних складових зводиться до визначення значення масштабуємії змінної вейвлету, відповідного локального максимуму енергії вейвлет-спектра сигналу, а також простому перетворенню цього значення в частоту.

#### Приклад 3

```
% Перетворення одиничного масштабу вейвлету Морле в частоту  
% Одиничний масштаб і центральна частота вейвлету пропорційні  
f = scal2frq (1, 'morl', 1)  
f = 0.8125
```

#### Приклад 4

```
% Тестовий сигнал з частотою 16 Гц  
t = 1:256;  
delta = 1/100;  
s = sin (2 * pi * t * 16 * delta);
```

```

% Коефіцієнти перетворення, розраховані для масштабів scales
scales = [0.01: 0.05: 20];
c = cwt (s, scales, wname);
% Пошук локального максимуму
[Maxi, ind] = max (max (transpose (c)));
% Перетворення масштабу, відповідного максимуму
% Енергії спектра, в частоту
% У разі появи великих погрішностей визначення частоти
% Необхідно зменшити крок збільшення масштабуємої змінної !
freq = scal2frq (scales (ind), wname, delta)
freq = 16.0573

```

Таким чином, визначення частот гармонійних складових зводиться до визначення значення масштабуємої змінної вейвлету, відповідного локального максимуму енергії вейвлет-спектра сигналу, а також простому перетворенню цього значення в частоту.

Знайдемо частоти сигналу для нестационарного сигналу, вейвлет-спектр якого представлений на рис. 4.11.

Для цього виконаємо побудову вейвлет-спектра для масштабів  $a$  від 0.1 до 6 з кроком 0,1.

```

>> scales = [0.1 : 0.2 : 6] ;
>> Sc = cwt (r, scales, w, '3Dplot') ;
>> colormap (jet)

```

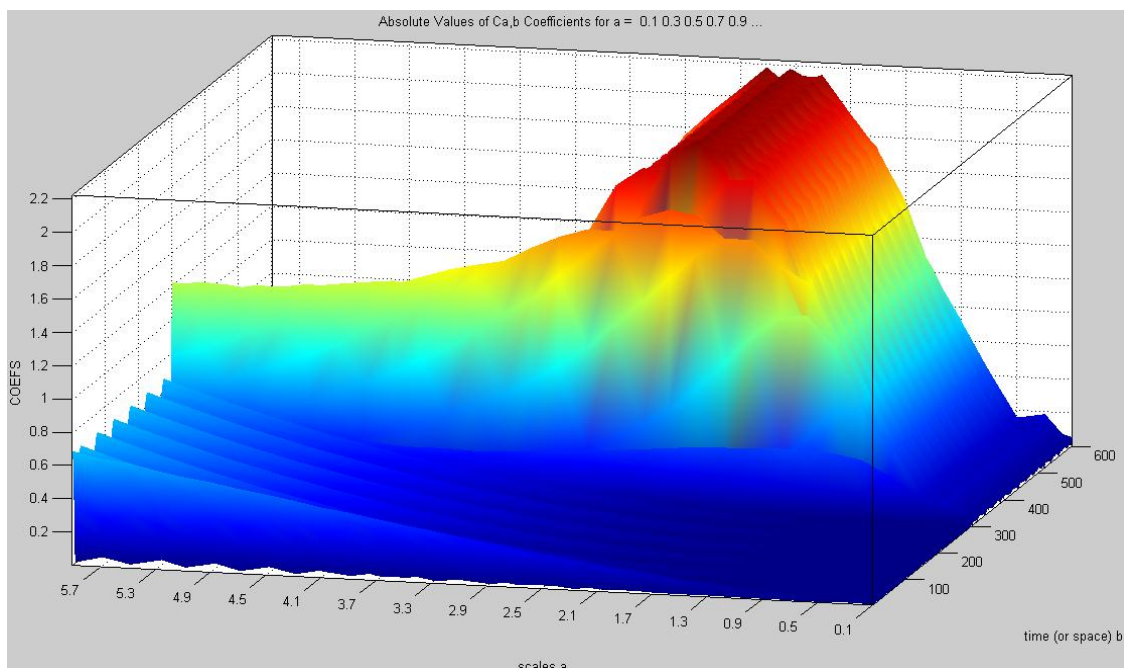


Рис. 4.11. Вейвлет-спектр сигналу для масштабів  $a$  від 0,1 до 6

Виконаємо пошук локального максимуму. Для цього використовуємо функцію `max` і `transpose`. Примітка: Функція  $Y = \max(X)$  в разі одновимірного масиву повертає найбільший елемент; в разі двовимірного масиву – це вектор-рядок, що містить максимальні елементи кожного стовпця. Таким чином, `max(max(X))` – це найбільший елемент масиву.

Функція `[Y, I] = max(X)`, крім самих максимальних елементів, повертає вектор-рядок індексів цих елементів в даному стовпці.

Функція `transpose` виконує транспонування масиву:

```
>> [maxi, ind] = max(max(transpose(Sc)))
maxi = 2.1965
ind = 11
```

Визначимо масштабний коефіцієнт  $a$ :

```
>> scales(ind)
ans = 2.100
```

Виконуємо перетворення масштабу, відповідного максимуму енергії спектра, в частоту:

```
>> freq = scal2frg(scales(ind), w, 1/fs)
freq = 119.0476
```

Побудуємо вейвлет-спектр для  $a$  від 6 до 60 з кроком 0,1 (рис. 4.12):

```
>> scales = [6 : 0.1 : 60];
>> Sc = cwt(r, scales, w, '3Dplot');
>> colormap(jet)
>> [maxi, ind] = max(max(transpose(Sc)))
maxi = 7.8688
ind = 196
>> scales(ind)
ans = 25.5000
>> freq = scal2frg(scales(ind), w, 1/fs)
freq = 9.8039
```

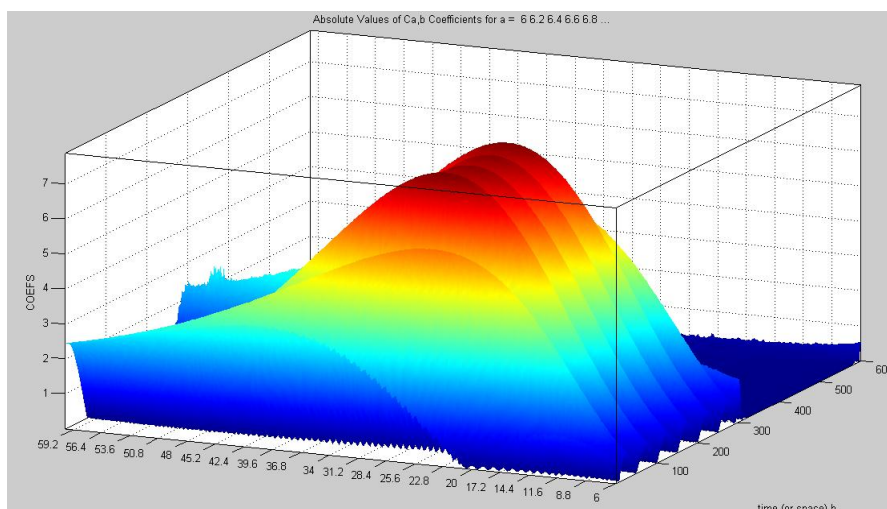


Рис. 4.12. Вейвлет-спектр сигналу для масштабів  $a$  від 6 до 60



Таким чином, в сигналі присутні частоти від 1,35 Гц до 13,5 Гц. Визначення частоти в спектрі залежить від кроку збільшення масштабованої змінної, тому, для більш точного визначення частоти, необхідно зменшити крок збільшення масштабного коефіцієнта  $a$ .

### Контрольні запитання та завдання

1. Назвіть два види вейвлет-перетворення.
2. Яка основна область застосування вейвлетного перетворення?
3. Дайте визначення вейвлету.
4. Яка основна перевага вейвлет-перетворення над перетворенням Фур'є?
5. Що означає масштабування вейвлету?
6. Наведіть приклади вейвлет-функцій.
7. Як зробити вибір аналізуючого вейвлету?

### **5. ЗАСТОСУВАННЯ ДИСКРЕТНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ДЛЯ АДАПТИВНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ СИГНАЛІВ**

Дослідженню параметрів електромагнітних перешкод, розробці методів і пристроїв фільтрації сигналів присвячено безліч розробок. Однак до сих пір проблема фільтрації сигналів від перешкод з мінливими частотними характеристиками повністю не вирішена.

Перешкодами називають будь-які дії, які спотворюють передане повідомлення. Наприклад, при передачі електричного сигналу по дротах він може спотворюватися за рахунок наведень від електромагнітних полів потужнострумове обладнання яке знаходиться недалеко від лінії зв'язку. Проблема полягає в тому, що електромагнітна перешкода наводиться в тій же лінії зв'язку, що передає корисний сигнал (рис. 5.1).

На рисунку видно, що перешкода може наводитися і передаватися в електронний пристрій (керуючий контролер) як по силовому кабелю через джерело живлення, так і по інформаційному – на вхід пристроїв введення.

Розглянемо математичні аспекти частотних методів фільтрації сигналів. Як правило, при побудові класичних фільтрів вважають, що частотний спектр корисного сигналу і перешкоди рознесені. Частотний спектр інформаційного сигналу в лініях зв'язку систем автоматичного управління технологічними об'єктами зміщений в низькочастотну область, а перешкоди – в середньочастотну або високочастотну.

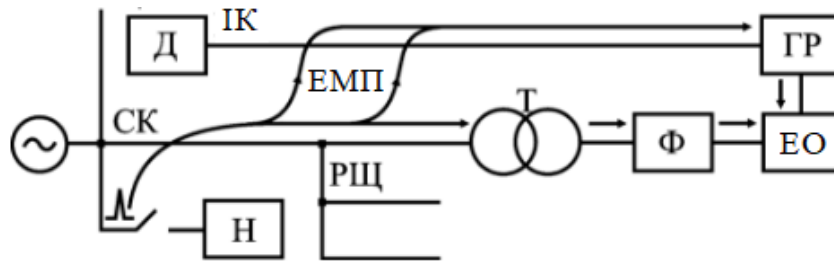


Рис. 5.1. Поширення перешкод в системі передачі інформації від точки виникнення (точка включення навантаження Н) до електронного обладнання ЕО, де СК, ІК – відповідно, силовий та інформаційний кабелі; РЩ – розподільний щит; Т – трансформатор; Ф – фільтр; Д – датчик; ГР – пристрій гальванічної розв'язки

Розглянемо ці положення на моделі передачі сигналу температури електричної нагрівальної печі, одержуваного за допомогою терморезисторного датчика. Перехідний процес в печі по температурі наближено, при подачі напруги живлення, можна описати диференціальним рівнянням 1-го порядку [4]

$$T \frac{q(t)}{dt} + q(t) = k \cdot U, \quad (5.1)$$

де  $T$  – постійна часу,  $q(t)$  – вихідна напруга датчика,  $U$  – напруга на нагрівальному елементі,  $k$  – коефіцієнт пропорційності.

Рішенням цього рівняння буде вираз

$$q(t) = k \cdot U (1 - e^{-\frac{t}{T}}). \quad (5.2)$$

На рисунку 5.2 зображено приклад графіка перехідного процесу при  $U = 220$  В,  $T = 30$  с,  $k = 0,045$ .

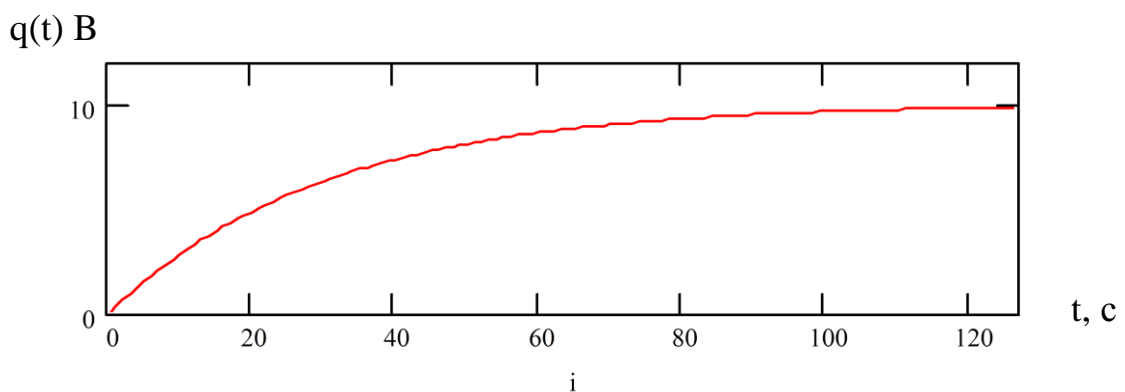


Рисунок 5.2. Графік сигналу датчика температури при перехідному процесі в нагрівальній печі

Виконаємо дискретизацію вихідного сигналу датчика температури з періодом  $T = 1$  с і введемо дискретний час  $t[nT] = n \cdot T$ , де  $n$  – порядковий номер відліку,  $T$  – період дискретизації,  $N$  – кількість відліків.

Накладемо на представлений інформаційний сигнал перешкоду  $\eta_n$  яка містить випадкову складову і явно виражену гармонійну (математична модель перешкоди для наведеного дослідження не має суттєвого значення)

$$\eta_n = [A_r \cdot \text{rnd}(x) + A_c \cdot \sin(\omega_c \cdot t[n \cdot T])], \quad (5.3)$$

де  $\text{rnd}(x)$  – повертає рівномірно розподілене випадкове число між 0 і  $x$ .

Прийmemo  $A_r = 1$  В,  $A_c = 1$  В,  $x = 2$ ,  $\omega_c = 4 \frac{1}{c}$ . Тоді –

$$\eta_n = 0.2 \text{rnd}(2) + \sin(4nT). \quad (5.4)$$

Тоді сигнал  $S_n$ , який передається по лінії зв'язку, буде мати вигляд

$$s_n = q_n + \eta_n. \quad (5.5)$$

Вигляд сигналу, який передається по лінії зв'язку, наведено на рис. 5.3.

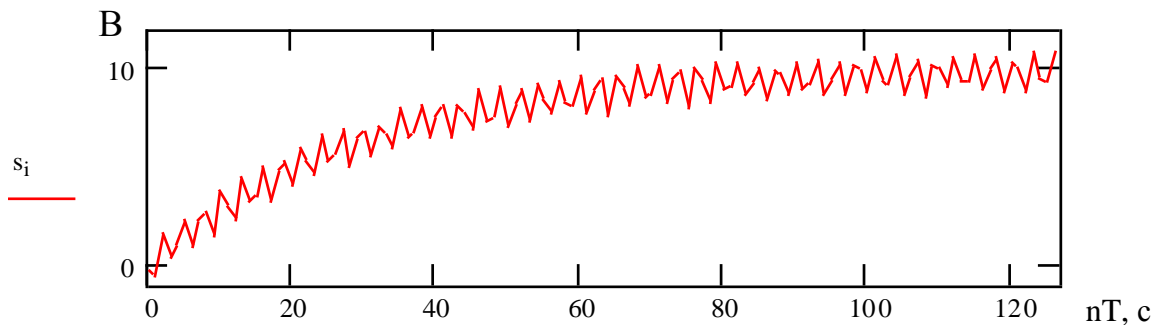


Рис. 5.3. Графік сигналу, який передається по лінії зв'язку

Частотний спектр цього сигналу представлений на рис. 5.4.

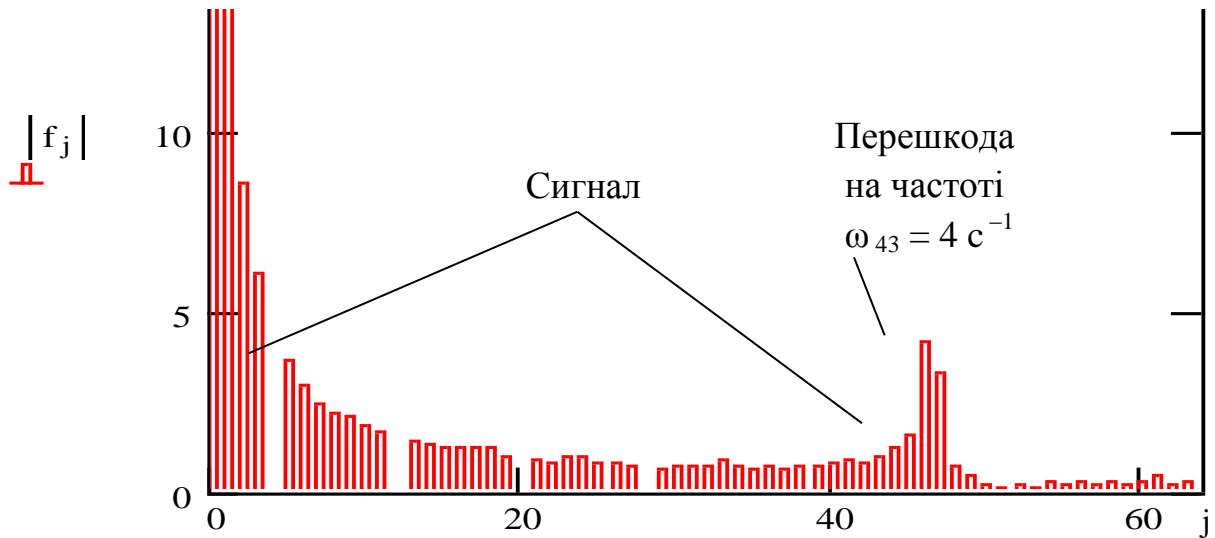


Рис. 5.4. Частотний спектр сигналу

Частоти цих гармонік визначається з виразу

$$\omega_j = \frac{2\pi \cdot j}{N \cdot T}, \quad (5.6)$$

де  $\omega_j$  – кутова частота  $j$  гармоніки.

Як видно з графіка, частотний спектр інформаційного сигналу розташований, в основному, в низькочастотному діапазоні, а випадкової складової перешкоди по всьому діапазону. Явно виражена частотна складова спектра перешкоди розташовується на частоті  $\omega_{43} = 4 \text{ с}^{-1}$ .

Для фільтрації перешкоди частота зрізу амплітудно-частотної характеристики фільтра повинна якомога ближче розташовуватися до частотного діапазону спектра інформаційного сигналу. Тому у визначені частотного спектра перешкоди і корекції параметрів фільтра в залежності від неї і буде полягати адаптація параметрів фільтра.

За частотним спектром Фур'є виконаємо зворотне перетворення  $h_i = \text{iff}(q_j)$ , взявши 40 перших гармонік  $g_j$ .

$$i := 0..127$$

$$g_j := f_j \cdot \Phi(|f_j|)$$

(5.7)

$$g_j := \begin{cases} (f_j \cdot \Phi(|f_j|)) & \text{if } j < 40 \\ 0 & \text{if } j \geq 40 \end{cases}$$

На рис. 5.5 представлені графіки сигналу вихідного датчика температури сигналу і відфільтрованого сигналу.

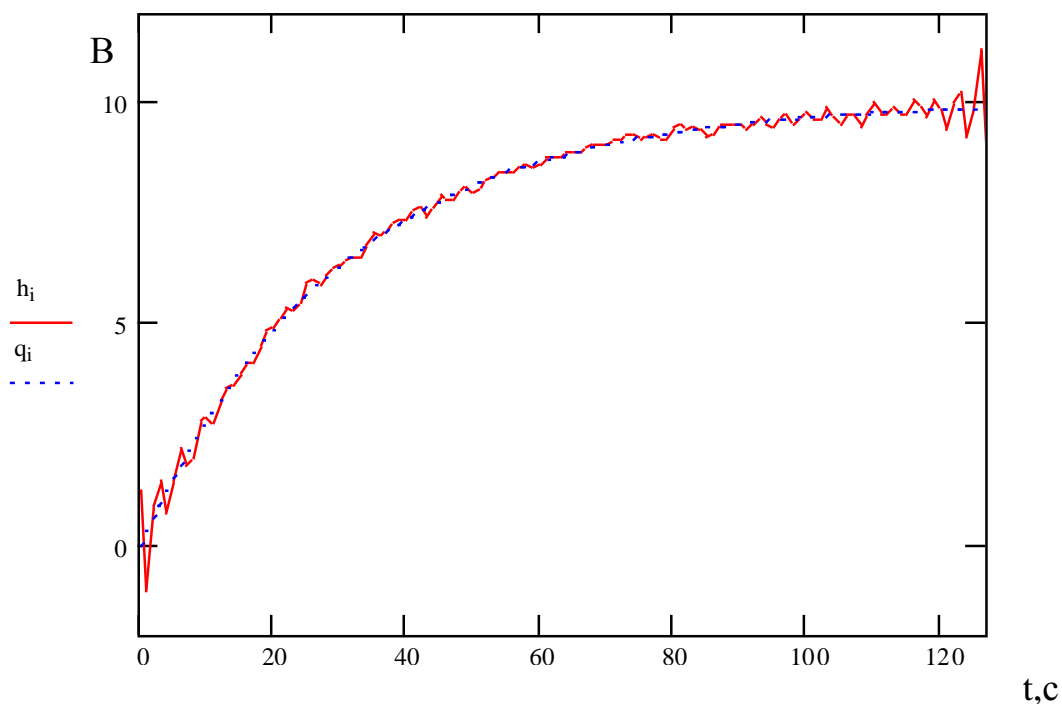


Рис. 5.5. Поєднані графіки вихідного сигналу датчику температури і відфільтрованого

Оцінимо якість фільтрації за допомогою середньо-квадратичного інтегрального критерію. Кінцеві ділянки кривої відфільтрованого сигналу не враховувалися, зважаючи на їх спотворення за рахунок кінцевого числа членів частотного спектра відновлюваного вихідного сигналу:

$$\Phi := \left( \frac{1}{127} \right) \cdot \sum_{i=0}^{127} (s_i - q_i)^2 \quad (5.8)$$

$$\Phi = 0.54 ;$$

$$\beta := \left( \frac{1}{127} \right) \cdot \sum_{i=12}^{120} (h_i - q_i)^2 ; \quad (5.9)$$

$$\beta = 9.584 \times 10^{-3}$$

Формула (5.8) дає середньоквадратичну помилку між інформаційним сигналом і зашумленим. Формула (5.9) дає середньоквадратичну помилку між відфільтрованим сигналом і інформаційним.

Як видно, різниця в десятки разів. Відфільтрований і інформаційні сигнали практично збігаються.

Для розглянутого прикладу виконання фільтру зробимо розрахунок цифрового фільтра у пакеті Mathcad.

Визначимо:

- порядок фільтра  $N := 20$ ,  $k := 1 \dots N$
- граничну частоту АЧХ фільтра  $f := 2$  Гц
- частоту дискретизації вхідного сигналу  $\omega_d := 10 \omega_g$ ,  $\omega_d = 625,32 \text{ c}^{-1}$
- період дискретизації  $T := 2 \pi / \omega_d$ ,  $T = 0,01 \text{ c}$
- частотний діапазон побудови АЧХ  $\omega_d := 0 \dots 1500 \text{ c}^{-1}$

Коефіцієнти частотної характеристики

$$a(k) := \frac{\sin(k \cdot \omega_g \cdot T)}{\pi \cdot k} \quad a_0 := 2 \cdot \frac{\omega_g}{\omega_c} \quad (5.10)$$

Амплітудно-частотна характеристика без вагових коефіцієнтів вікна Ганна (5.11) представлена на рис. 5.6, амплітудно-частотна характеристика з вагомими коефіцієнтами вікон Ганна (5.12) представлена на рисунку 5.7.

$$H(\omega) = a(0) + 2 \sum_{k=1}^N a(k) \gamma_k \cos(k\omega) \quad (5.11)$$

Вагові коефіцієнти

$$\gamma_k := 0.5 \cdot \left( 1 + \cos\left(\pi \cdot \frac{k}{N}\right) \right) \quad (5.12)$$

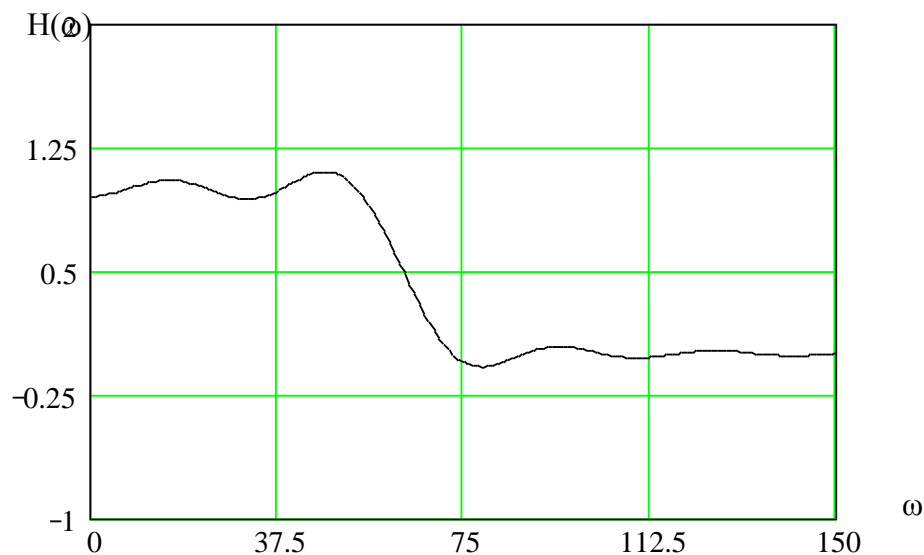


Рис. 5.6. Графік АЧХ нерекурсивного фільтра низької частоти без вагових коефіцієнтів вікна Ганна

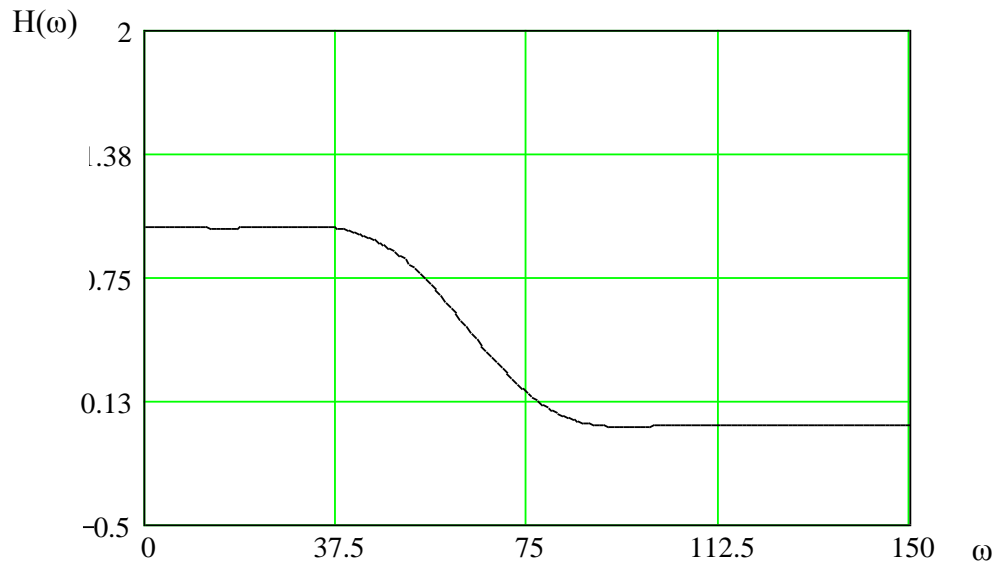


Рис. 5.7. Графік АЧХ нерекурсивного фільтра низької частоти з вагомими коефіцієнтами вікон Ганна

Запишемо рівняння цього фільтра і подамо на вхід фільтра гармонійного сигналу в смузі пропускання і загородження

Вихідний сигнал фільтра при подачі на його вхід гармонічного сигналу в смузі пропускання

$$Y_{(m,k)} := 2 \cdot \sum_{k=0}^N a(k) \cdot \sin\left[\frac{\omega_g}{2} \cdot (m - k) \cdot T\right] \quad (5.13)$$

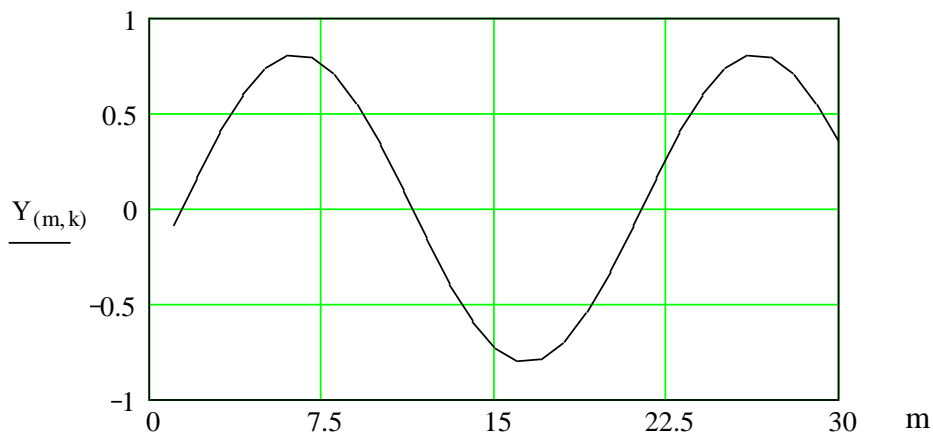


Рис. 5.8. Графік вихідного сигналу фільтра при подачі на його вхід гармонічного сигналу в смузі пропускання

Вихідний сигнал фільтра при подачі на його вхід гармонійного сигналу в смузі загородження

$$Y_{(m,k)} := 2 \cdot \sum_{k=0}^N a(k) \cdot \sin \left[ \frac{\omega g}{0.1} \cdot (m - k) \cdot T \right] \quad (5.14)$$

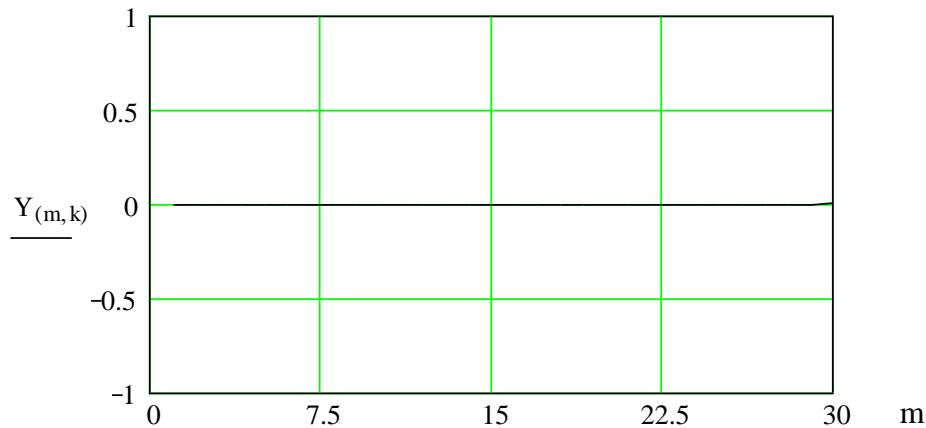


Рис. 5.9. Графік вихідного сигналу фільтра при подачі на його вхід гармонічного сигналу в смузі загородження

Як видно з наведених розрахунків можливо, при відсутності сигналу у лінії зв'язку, подати на вхід адаптивного фільтра опірний сигнал і визначити частотні параметри перешкоди (частотний спектр). А потім цю інформацію використовувати для розрахунків коефіцієнтів рівняння нерекурсивного фільтра.

### Контрольні запитання та завдання

1. Що прийнято називати перешкодами?
2. Назвіть математичні аспекти частотних методів фільтрації сигналів.
3. Як можна оцінити якість фільтрації?

## 6. РАДІОЛОКАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП ВИМІРЮВАННЯ ВІДСТАНИ

### 6.1. Радіолокаційна апаратура ближньої дії

У металургійній промисловості при виробництві чавуну і сталі використовують бункери для зберігання і дозування сипких шихтових матеріалів. На рисунку 6.1 зображено бункер для зберігання вапна.





Рис. 6.1. Бункер для зберігання вапна

Для заповнення бункера та виконання операцій дозування необхідно вимірювати рівень матеріалу. Є ряд обставин, які ускладнюють задачу вимірювання рівня сипучих матеріалів. Перш за все це неоднорідність, ступінь якої залежить від розмірів частинок і безпосередньо впливає на фізичні властивості матеріалу, що ускладнює застосування методів вимірювання рівня. Наступна трудність виміру рівня обумовлена обмеженою рухливістю часток через дії сил тертя і зчеплення між частинками, результатом чого є відсутність горизонтальної площини. Крім того, поверхня сипучого матеріалу звичайно має кут природного укосу, причому цей кут змінюється при заповненні або спорожненні ємності.

Для вимірювання рівня сипучих матеріалів і рідин використовують багато датчиків, робота яких заснована на різних принципах.

Радіолокаційні далекоміри з малопотужним безперервним радіовипромінюванням та унітарною приймально-передавальною антеною є найбільш прийнятними для промислового використання порівняно з механічними, лазерними, ізотопними та іншими засобами вимірювання за надійністю, складністю конструкції, монтажу та обслуговування, точнісними характеристиками, екологічною безпекою та вартістю.

Розглянемо принцип роботи мікрохвильового радіолокатора на прикладі схема радіолокаційного рівнеміра типу РДУ-Х2 [8], структурна схема якого представлена на рисунку 6.2. РДУ-Х2 складається з приймально-передавального НВЧ пристрою (ППП), схеми посилення і фільтрації, схеми цифрової обробки сигналу і блоку живлення, що живить постійним струмом +24 В. Блок живлення 19 формує робочі напруги +5 В і +18 В. Живлення

аналогових 5 ВА і цифрових 5 ВЦ пристроїв проводиться від роздільних стабілізаторів напруги. НВЧ генератор 3 працює в діапазоні частот 35...37,5 ГГц. Перебудову генератора по частоті в межах  $\pm 500$  МГц здійснює варіатор 4. НВЧ коливання, сформовані генератором 3, надходять в антену 1 і випромінюються в напрямку зондуємого об'єкта. Відбитий сигнал приймається антеною і надходить на змішувач 2. На змішувачі сигнал, прийнятий антеною, змішуються з сигналом генератора. Різницевий сигнал биття на виході змішувача визначає відстань до об'єкта.

Роботою приладу керує мікропроцесор 17, який виконує наступні функції: регулює напругу живлення НВЧ генератора 3 шляхом зміни коефіцієнта передачі підсилювача 8; за допомогою цифро-аналогового перетворювача (ЦАП) 14 і підсилювача 9 формує пилкоподібну напругу перебудови, що подається на варіатор 4; керує роботою аналого-цифрового перетворювача (АЦП) 15.

Мікропроцесор 17 також керує коефіцієнтом передачі підсилювача 13 в залежності від амплітуди прийнятого сигналу; обчислює дальність до об'єкта за результатами спектральної обробки сигналу, здійснює селекцію перешкод і видає результат на ЦАП 14; по каналу RS-485 РДУ обмінюється даними із зовнішнім комп'ютером.

Приймач 18 перетворює цифрові вихідні сигнали для передачі на великі відстані. Цифро-аналоговий перетворювач 14 видає напругу, пропорційну відстані до вимірюваного об'єкта. Вузол перетворення напруги в струм 12 може налаштовуватися на діапазони вихідного струму: 0...5 мА, 0...20 мА, 4...20 мА.

Основні технічні характеристики РДУ-Х2 наведено у таблиці 6.1. Цей промисловий радіолокатор має моноблочне виконання сенсорної та вимірювально-обчислювальної частин з виносним блоком живлення (рис. 6.3).

Таблиця 6.1

**Основні технічні характеристики РДУ-Х2**

Параметр	Величина
Діаметр апертури приймально-передавальної антени	100 мм
Ширина діаграми спрямованості антени	6 о
Частота випромінювання радіосигналу	35...38 ГГц
Максимальний діапазон вимірюваних відстаней	10 м
Мінімальна зона нечутливості	1 м
Похибка вимірювання (на рівній гладкій поверхні)	$\pm 0,05$ м
Потужність випромінювання	20 мВт
Маса сенсорного блоку	2,5 кг

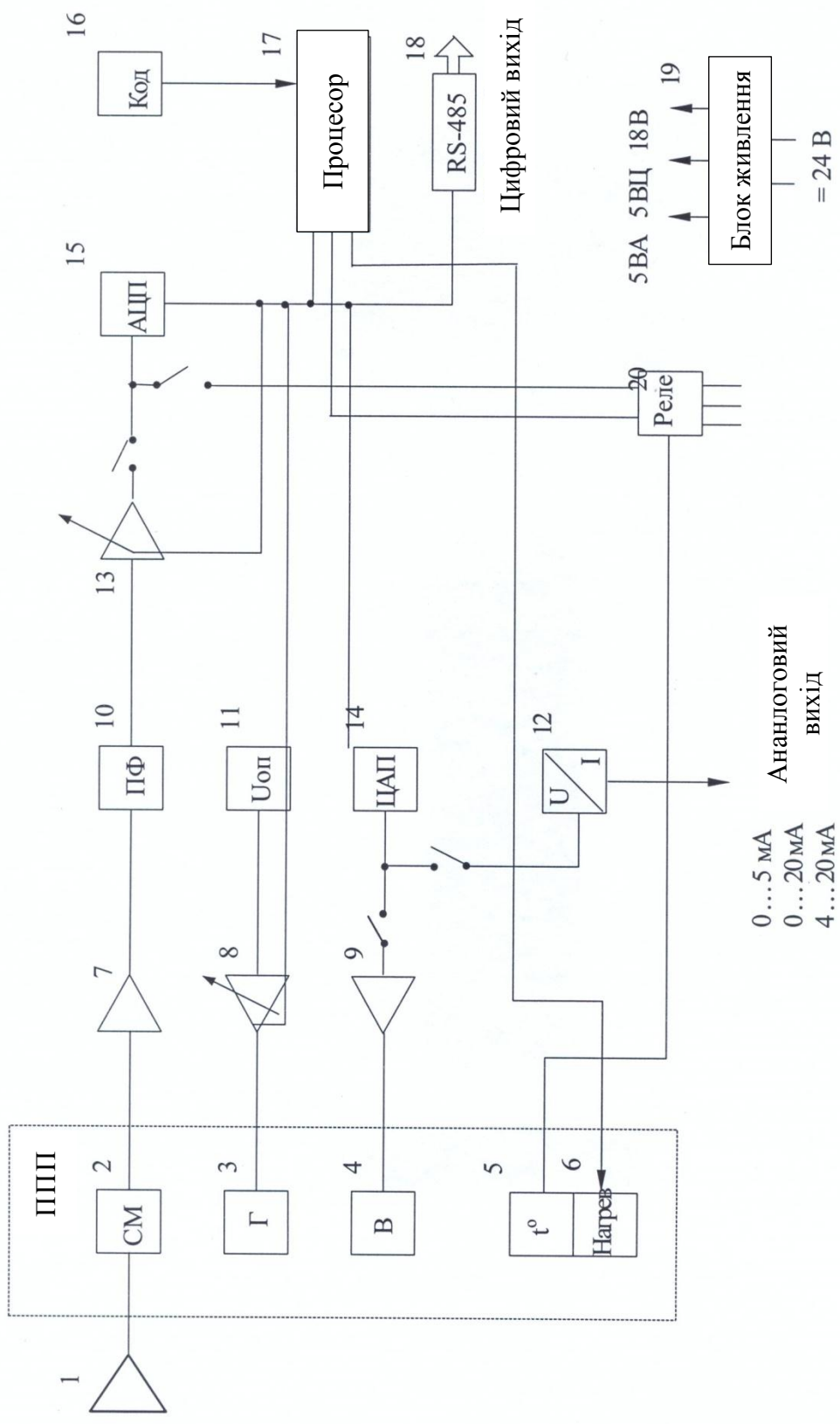


Рисунок 6.2. Структурна схема радіолокаційного датчика рДУ -Х2

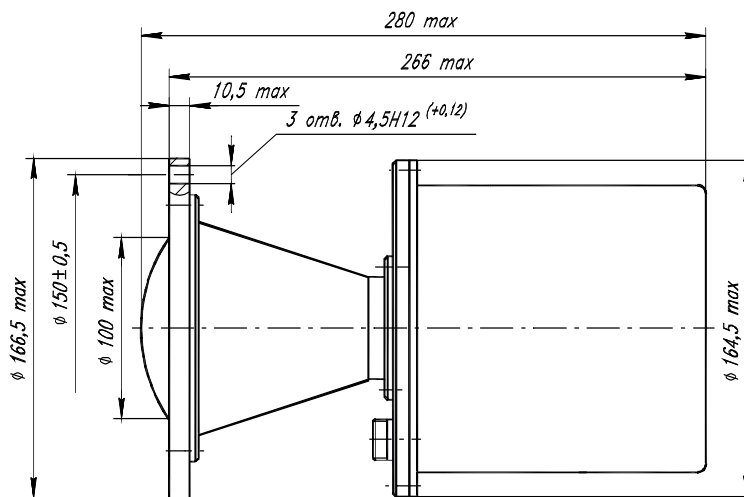


Рис. 6.3. Габаритні та приєднувальні розміри РДУ-Х2

## 6.2. Цифрова обробка сигналу ближньої радіолокації

Якщо радіолокаційна хвиля надсилається до об'єкту в момент часу  $t_0$ , то повернеться вона до антени в момент часу

$$t_0 + \tau = t_0 + \frac{2H}{C}, \quad (6.1)$$

де  $\tau$  – час, що минув з моменту випромінювання сигналу;  $H$  – відстань до об'єкту;  $C = 3 \cdot 10^8$  м/с – швидкість електромагнітних хвиль у просторі.

З формули (6.1) випливає, що відстань до об'єкта дорівнює  $H = C \cdot \tau / 2$ .

Якщо відстань до об'єкта менше 100 м, то виміряти час проходження хвилею відстані від випромінювача до об'єкта і назад існуючими на сьогодні технічними засобами не можливо.

Виміряти величину шляху радіохвилі до об'єкта і назад можна, якщо надати відмінні ознаки кожному з послідовно випромінюваних системою електромагнітних коливань і, завдяки цьому, розпізнавати відбиті сигнали при поверненні їх в приймальній пристрій системи. Тому для ближньої локації використовують частотну модуляцію посилюваного сигналу.

Якщо частотно-модульовані коливання мають частоту  $f(t)$ , яка, починаючи з величини  $f_0$ , зростає з постійною швидкістю на величину

девіації частоти  $F_d$  до  $f_0 + F_d$  і потім повертається до значення  $f_0$  (рис. 6.4, а), то протягом періоду модуляції  $T_M$  кожен окремий період коливань, що генеруються, може бути відмінний від усіх інших подібних періодів.

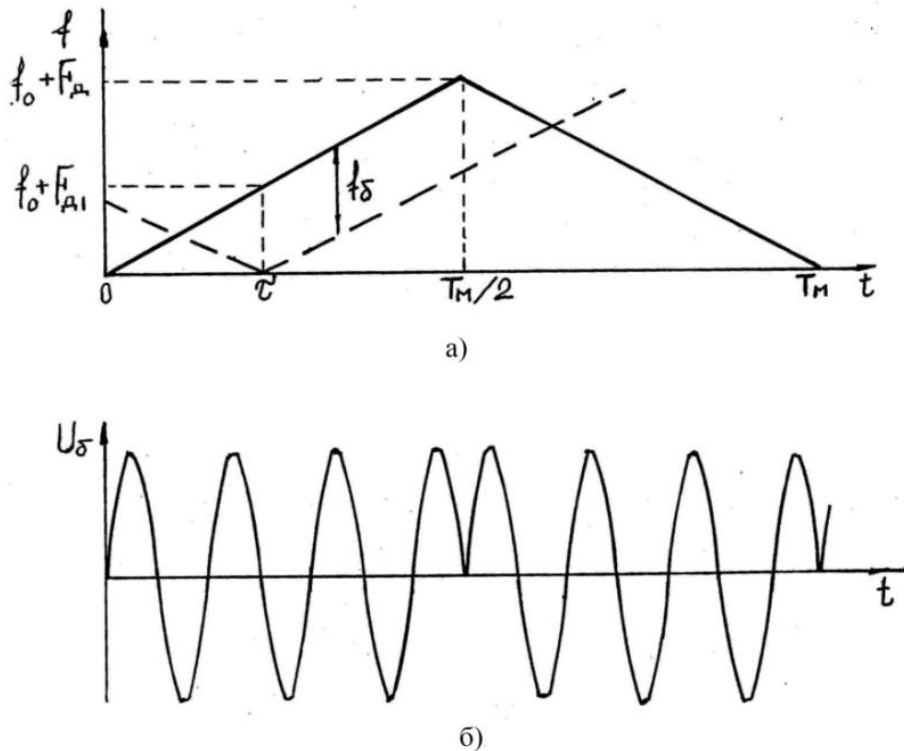


Рис. 6.4. Закон зміни частоти випроміненого (суцільна лінія) і відбитого (штрихова лінія) сигналів (а). Сигнал обвідної биття на виході змішувача (б)

У момент часу  $t_0$  період коливань радіохвилі, відповідний частоті  $f_0$ , випромінюється в напрямку віддаленого об'єкта, досягає його і відбивається назад, вступаючи в приймальній пристрій системи через проміжок часу, який визначається тільки відстанню  $H$  між антеною сенсорного блоку і об'єктом.

Цей період коливань повертається в приймач в ту мить, коли відбувається випромінювання нового періоду коливань, відповідного частоті  $f_0 + F_{d1}$ . Гетеродинний сигнал, який є копією випромінюваного, змішується з прийнятим сигналом частоти  $f_0$ .

При складанні гармонійних коливань з близькими частотами виникають биття. Отримаємо частоту гармонічних коливань і биття при складанні гармонійних коливань з близькими частотами  $\omega_1$  і  $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega_1$ , причому  $\Delta\omega_1 \ll \omega_1$

$$d(t) = A_0 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + A_0 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t) = 2 \cdot A_0 \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t\right). \quad (6.2)$$

Причому результуюче коливання можна приблизно розглядати як гармонійне з кутовою частотою  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  та амплітудою

$$A = 2 \cdot A_0 \left| \cos \frac{\Delta\omega}{2} \cdot t \right|, \quad (6.3)$$

що повільно змінюється в часі умовно за гармонійним законом з періодом:

$$T_6 = \frac{2 \cdot \pi}{\Delta\omega}. \quad (6.4)$$

Графік обвідної суми випромінюваного і прийнятого коливань у часі показаний на рис. 6.4, б.

Сказане проілюструємо створенням биттів гармонійних коливань в пакеті Mathcad. Задамо зміну часу  $t$  від 0 до 40 с з кроком 0,01.

Створимо гармонійне коливання  $x(t) = \sin(\omega_1 \cdot t)$  зі змінною частотою  $\omega_1$

$$\omega_1 = \omega_0 + \int_0^t 1 \cdot dt, \quad (6.5)$$

Другий сигнал сформуємо через час  $\tau = 1$  с

$$g(t) = \sin[\omega_1 \cdot (t - \tau)] \quad (6.6)$$

$$\Delta\omega = \omega_1(t + \tau) - \omega_1(t) \quad (6.7)$$

Графіки цих сигналів представлені на рисунку 6.5.

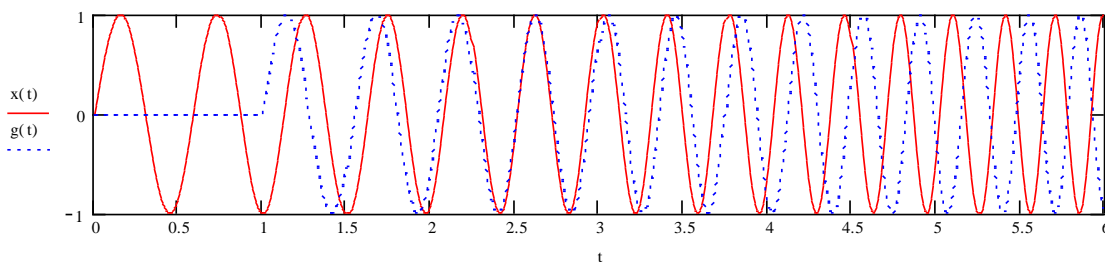


Рис. 6.5. Графіки гармонійних сигналів  $x(t)$ ,  $g(t)$

Биття отримаємо, підсумовуючи ці сигнали

$$d(t) = g(t) + x(t). \quad (6.8)$$

Графік цих биттів зображений на рисунку 6.6.

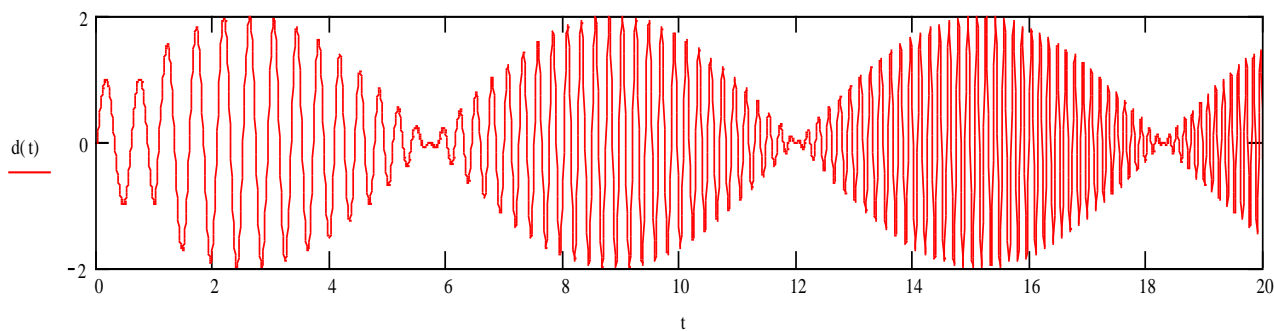


Рис. 6.6. Графік биттів

Період биттів, знайдений з цього графіка, відповідає  $T_6 = 6,28$  с. Відповідно до формули (6.5),  $\Delta\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ , а за формулою (6.4) теж  $T_6 = 6,28$  с.

При незашумленому сигналі досить легко знайти різницю частот випромінюваного і відбитого сигналів, а за цим значенням визначити, відповідно до формули (6.4), різницю частот цих сигналів і, потім, час приходу відбитого сигналу. За часом проходження сигналу радара до цілі і назад, знаючи швидкість поширення електромагнітних хвиль, можна визначити дальність до цілі

$$l = \frac{C \cdot T}{2}. \quad (6.9)$$

У разі реальної перешкоди сигналу локатора для знаходження частоти биття, посланого до мети і відбитого сигналів, використовують або дискретне перетворення Фур'є, або вейвлет-аналіз.

Графік частотного спектра биттів в низькочастотній області представлений на рисунку 6.7, з якого видно, що максимум значень коефіцієнтів спектра припадає на кутову частоту  $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ .

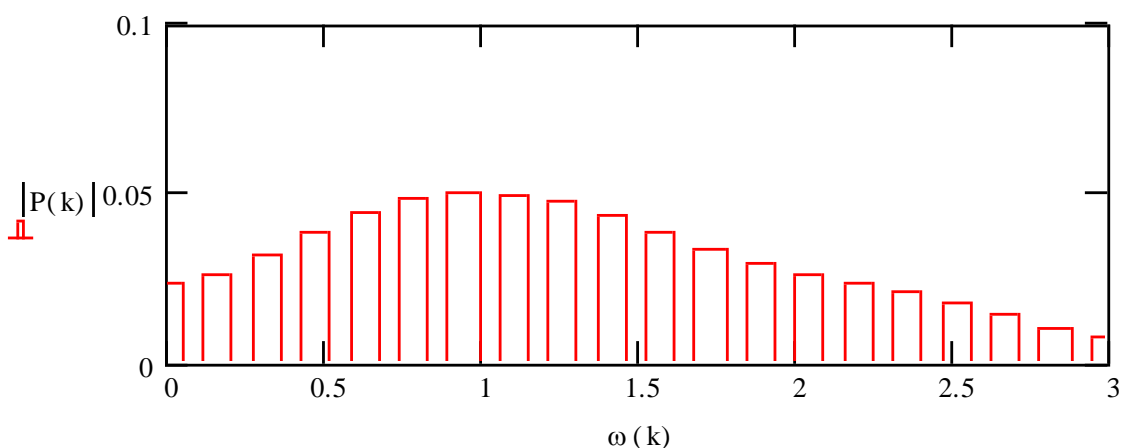


Рис. 6.7. Графік частотного спектра биттів в низькочастотній області

### 6.3. Цифрова обробка сигналу дальньої радіолокації

При визначенні відстані до цілі (понад 100 м) визначають час проходження випромінювання радіомагнітної хвилі до об'єкта і назад. Структурна схема імпульсної радіолокаційної станції (РЛС), що представлена на рисунку 6.8, працює в імпульсному режимі – спочатку відбувається випромінювання хвилі, а потім прийом хвилі, відбитої від об'єкта.

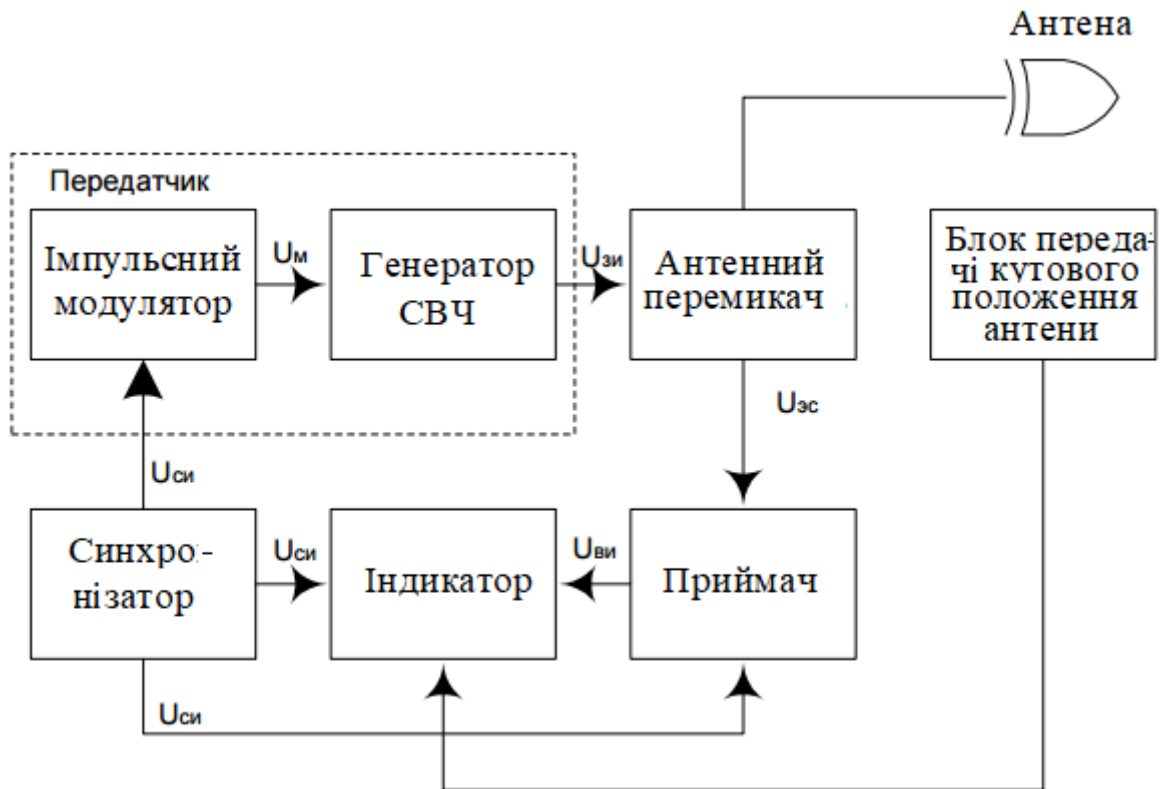


Рис. 6.8. Структурна схема імпульсної РЛС

Принцип, за яким працює радар, дуже схожий з принципом відображення звукової хвилі. Якщо ви кричите в напрямку звуковідбивального об'єкта (такого, як ущелини в горах або печери), ви почуєте відлуння.

Якщо вам відома швидкість звуку в повітрі, ви можете потім оцінити відстань до об'єкта. Час, необхідний для повернення луни, може грубо перетворюватися в відстань, якщо вам відома швидкість звуку.

У радарі використовуються імпульси електромагнітної хвилі. Високочастотна енергія випромінюється радаром і відбивається від об'єкта, що спостерігається. Деяка невелика частина цієї відбитої енергії повертається назад до радара. Ця відбита енергія називається ехо-сигналом, так само як і в термінології звуку. Радар використовує це відлуння для визначення напрямку і відстані до об'єкта, що відбиває. Як впливає з цього визначення, радари



використовуються для виявлення присутності цілі (об'єкта виявлення) й визначення його положення в просторі.

На рисунку 6.9 показаний спрощений принцип дальньої радіолокації. Антена радару опромінює ціль НВЧ-сигналом, який потім відбивається від неї і «захоплюється» приймальним пристроєм («відлуння» або «відповідь»). Сигнал радару генерується потужним передавачем і приймається спеціальним високочутливим приймачем.

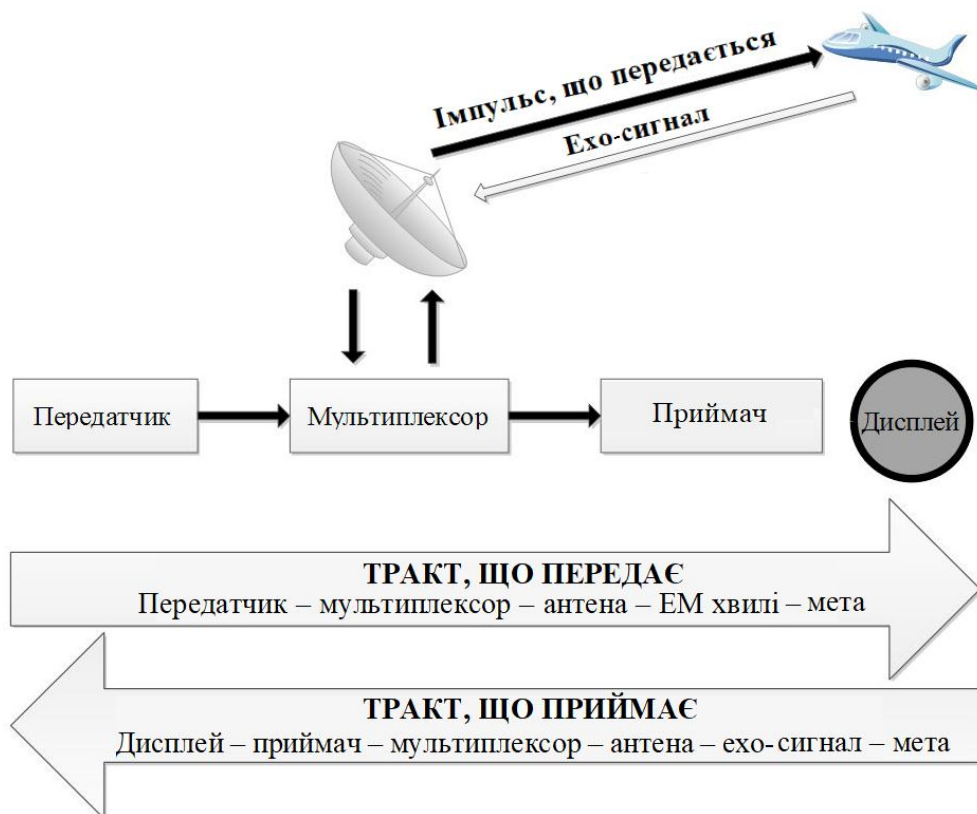


Рис. 6.9. Схема роботи радіолокаційної системи

Алгоритм роботи найпростішого радару можна описати таким чином.

Передавач радару видає короткі потужні електромагнітні НВЧ імпульси. Перемикач (мультиплексор) поперемінно перемикає антену між передавачем і приймачем так, щоб використовувалася тільки одна антена. Це перемикання необхідно, так як потужні імпульси передавача зруйнували б приймач, якби енергія надійшла безпосередньо на вхід приймача.

Антена передає сигнали передавача в простір з необхідним розподілом і ефективністю. Цей процес застосовується аналогічним чином при прийомі.

Передані імпульси випромінюються в простір за допомогою антени у вигляді електромагнітної хвилі, яка проходить по прямій лінії з постійною швидкістю і буде потім відбиватися від цілі.

Антена приймає зворотні розсіяні сигнали (так звані ехо-сигнали).

При прийомі мультиплексор подає слабкі ехо-сигнали на вхід приймача.

Надчутливий приймач підсилює і демодулює прийняті НВЧ сигнали і видає відеосигнали на вихід.

Індикатор представляє спостерігачеві безперервну графічну картину становища цілей відносно радара.

Всі цілі видають так зване дифузне відображення, тобто сигнал зазвичай відбивається в широкому діапазоні напрямків. Такий відбитий сигнал також називається «розсіюванням» або зворотним розсіюванням – це термін, присвоєний відбиттю сигналу в протилежному напрямку до падаючого променя.

Сигнали радара можуть відображатися як на традиційному плоскому індикаторі положення, так і на більш сучасних (рідкокристалічних, плазмових тощо) системах дисплея радара. Плоский екран має обертовий вектор з радаром на початку координат, який відображає напрямок антени (азимут цілі). Він зазвичай зображує картину досліджуваного простору у вигляді карти зони, що покривається променем радара.

Очевидно, що більшість функцій радара є залежними від часу. Часова синхронізація між передавачем і приймачем радара необхідна для вимірювання відстані. Системи радара випромінюють кожен імпульс протягом часу передачі (або тривалості імпульсу  $\tau$ ), очікуючи повернення ехо-сигналів під час «слухання» або часу спокою і, потім, випромінюють наступний імпульс.

Так званий синхронізатор координує в часі процеси випромінювання радіолокаційного імпульсу та його прийому і видає сигнали синхронізації для радара. Він же одночасно подає сигнали на передавач, який посиляє наступний новий імпульс, і на індикатор і інші пов'язані схеми управління.

Час між початком одного імпульсу і початком наступного імпульсу називається періодом або міжімпульсним інтервалом (PRT) –  $PRT = 1 / PRF$ . Тут PRF – число радіоімпульсів в секунду. Періоди роботи радара зображені на рисунку 6.10.

Відстань до стаціонарної цілі (об'єкта, що переміщається), визначається з часу проходження високочастотного сигналу, що передається, і швидкості його поширення ( $V_c$ ). Фактичну відстань цілі від радара зазвичай називають «похила дальність» – це деяка лінія в поле зору між радаром і опромінюваним об'єктом, в той час як відстань «по землі» – це горизонтальна відстань між випромінювачем і його цілю. Так як хвилі проходять до цілі і назад, то фізичний час кругового проходження променя радара ділиться навпіл з метою отримання часу, який необхідний хвилі для досягнення цієї цілі. Тому для розрахунку відстані до цілі зазвичай використовується формула (6.9).



Рис. 6.10. Періоди роботи радара

## 6.4. Індивідуальне завдання № 2

### Частотний аналіз звукового сигналу

#### Мета роботи

Освоїти застосування математичного пакета Matlab для частотного аналізу нестационарних сигналів, наприклад, в задачах вібраційної діагностики промислового устаткування, виділення на тлі перешкод корисного сигналу датчиків, аналізу зображень та інших.

#### Порядок проведення роботи

1. За допомогою цифрового осцилографа та мікрофона записати будь-який звуковий сигнал.
2. Створити у пакеті Excel цифровий файл із значеннями записаного сигналу.
3. Відповідно до наведеного прикладу виконати дискретне перетворення Фур'є та вейвлет перетворення записаного сигналу.
4. Порівняти отримані результати.

#### Зміст звіту

1. Навести фотографію екрана осцилографа із записаним сигналом та пояснити вибрані налаштування: амплітуда сигналу та час розгортки (рис. 6.11 і 6.12).
2. Розрахувати період дискретизації сигналу за часом за наведеним нижче прикладом.

3. Побудувати таблицю значень сигналу в пакеті Excel з графіком сигналу (рис. 6.13).
3. Пояснити розрахунок масштабного коефіцієнта псевдочастоти вейвлета.
5. Навести визідний код програми розрахунку (рис. 6.14).
6. Навести графік завантаженого в пакет Matlab досліджуваного сигналу (рис. 6.15).
7. Навести гістограму частотного спектру сигналу (рис. 6.16).
8. Навести зображення вейвлет – перетворення сигнгалу (рис. 6.17).
9. Зробити висновки.

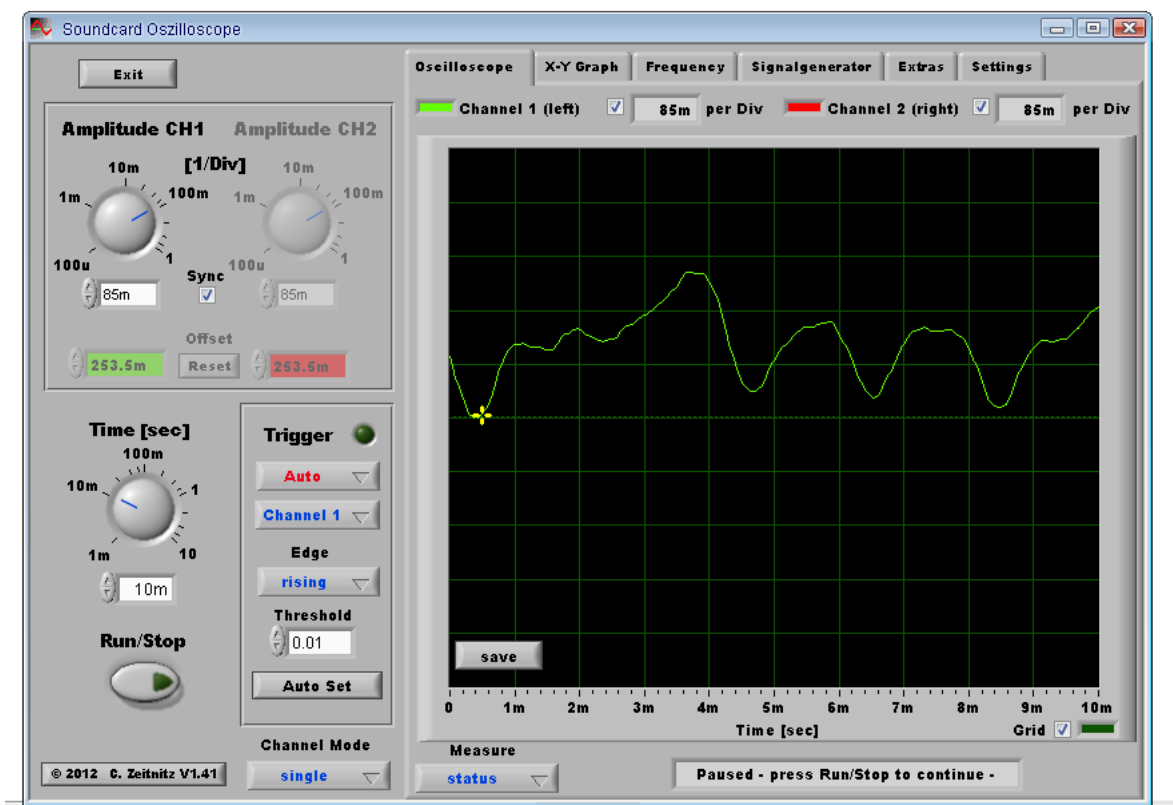


Рис. 6.11. Зовнішній вигляд осцилографа із записаним сигналом

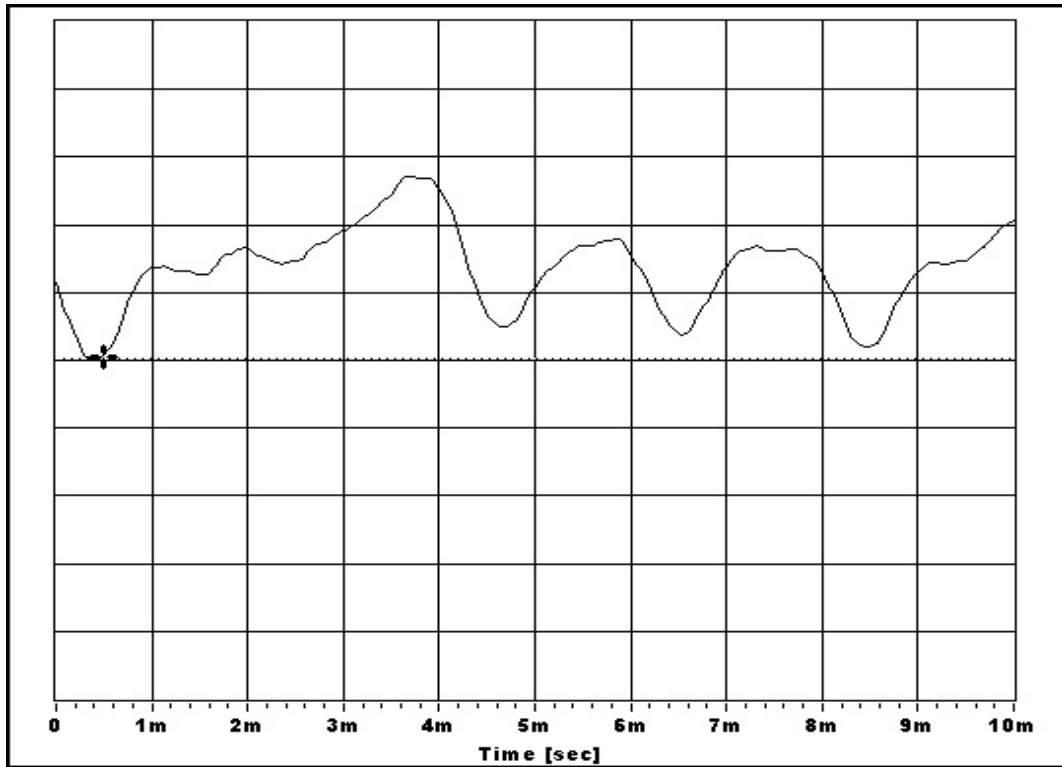


Рис. 6.12. Графік сигналу

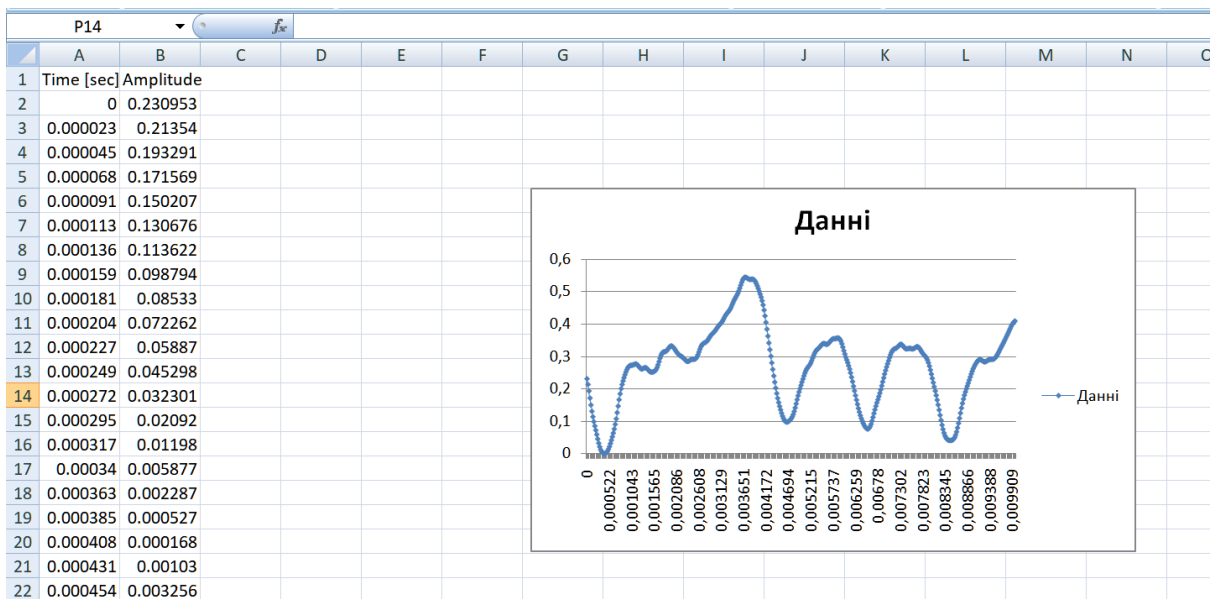


Рис. 6.13. Фрагмент таблиці значень сигналу та його графік у пакеті Excel

MATLAB R2014a

```

1 - fs=43478.26087
2 - Td=0.000023; N=448; T=(N-1)*Td
3 - r=load('Zvuk.txt')
4 - t=0:Td:T
5 - plot(t,r)
6 - title('Unsteady signal'),grid;
7 - xlabel('Time t'); ylabel('Signal Value'); Yn=fft(r,448); k=1:10;
8 - Cn=abs(Yn)*2/N
9 - fk=k/T
10 - figure(2), plot(fk,Cn(k));
11 - bar(fk,Cn(k))
12 - ylabel('Amplitude'); xlabel('Frequency Hz');
13 - m='mexh'
14 - scales=[11:0.1:110];
15 - figure(3), Cv=cwt(r,scales,m,'3Dplot')
16 - colormap(jet)
17 - scal2frq(1,'mexh',1)
18 - [maxi,ind]=max(max(transpose(Cv)))
19 - scales(ind)
20 - f=scal2frq(scales(ind),'mexh',Td)
21 - fm=centfrq(m)
22 - fmax=0.25/(11*Td)
23 - fmin=0.25/(110*Td)
24 -
25 -

```

$$f_{\min} = 98,81 \text{ Гц}$$

Рис. 6.14. Вихідний код програми

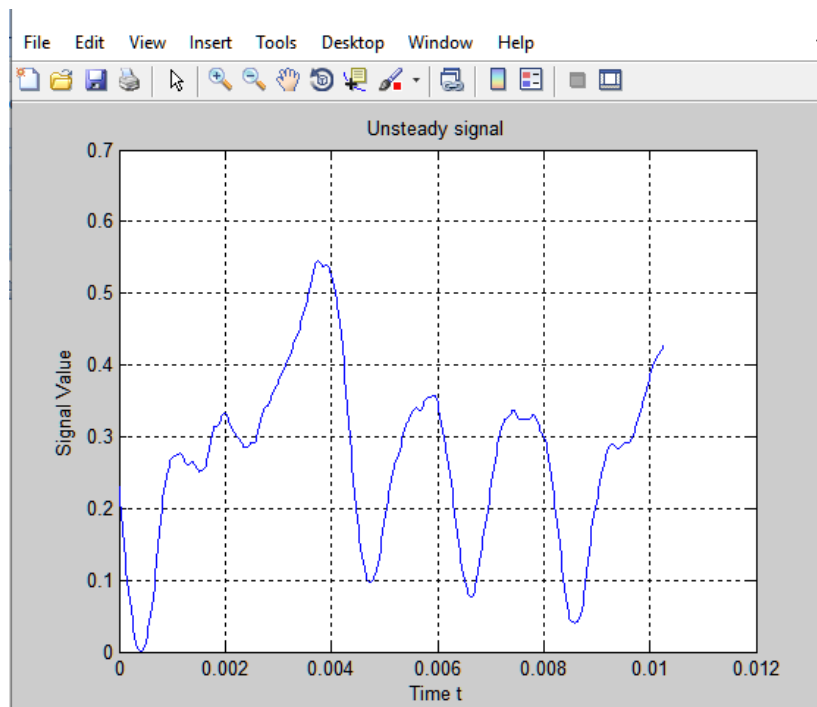


Рис. 6.15. Графік сигналу в пакеті Matlab

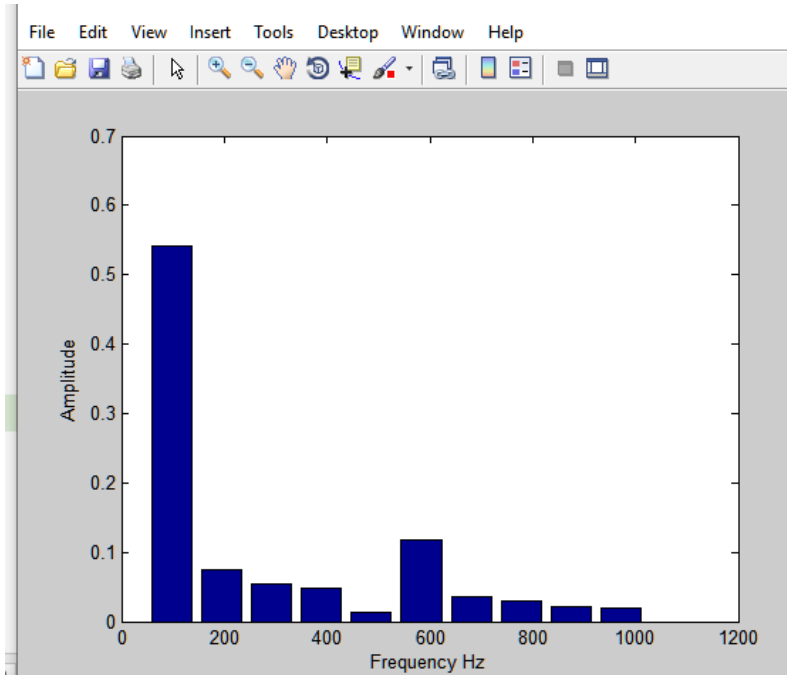


Рис. 6.16. Частотний спектр сигналу

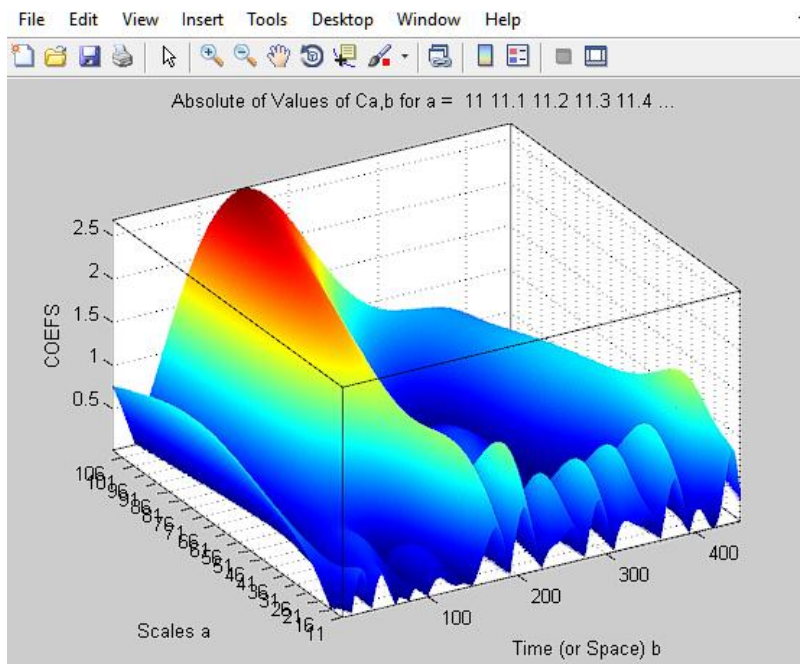


Рис. 6.17. Вейвлет-перетворення сигналу

Приклад визначення періоду дискретизації часу

При запису сигналу осцилографом тривалість запису становила 10 мс.

У таблиці Excel записано 448 значень.

Обчислимо період дискретизації  $T_d = 0,01 / 448 = 2,23214 \cdot 10^{-5}$  с.

Округлюємо це значення  $T_d = 0,000023$  с.

На наведеній гістограмі рисунку 6.16 чітко виділяються дві складові із частотами  $f_1 = 100$  Гц та  $f_2 = 600$  Гц.

Розрахунки проведені з допомогою вейвлет перетворення дають свій результат  $f_1 = 98,8$  Гц. Для аналізу в іншій частотній ділянці необхідно змінити діапазон масштабного коефіцієнта  $a$ .

Значення діапазону зміни масштабного коефіцієнта для частотного аналізу сигналу розраховується за формулою  $f_a = \frac{f_c}{a \Delta t}$ .

### Контрольні запитання та завдання

1. Назвіть ряд обставин, які ускладнюють задачу вимірювання рівня сипучих матеріалів?
2. Опишіть принцип роботи мікрохвильового радіолокатора.
3. Який час визначають при розрахунку відстані до цілі?
4. Опишіть алгоритм роботи найпростішого радара.

## 7. ЦИФРОВА ОБРОБКА ЧАСОВИХ СИГНАЛІВ

### 7.1. Випадковий процес як модель сигналу

Сигнал в теорії інформації та зв'язку – це носій інформації, що використовується для передачі повідомлень у системі зв'язку. Значення більшості реальних сигналів можуть бути передбачувані лише з більшою чи меншою мірою ймовірності, тому математично сигнал можна описати випадковою функцією. В теорії ймовірностей така функція являє собою сімейство випадкових величин, індексованих деяким параметром – найчастіше часом або координатами. Безліч реалізацій випадкової функції називається ансамблем.

Випадкові функції часу називаються випадковими чи стохастичними процесами. Статистичні характеристики випадкового процесу (ВП)  $U(t)$  є детермінованими функціями часу: маточікування  $m_u(t)$  визначає поведінку ВП у часі в середньому, а дисперсія  $D(t)$  характеризує розсіювання величини  $U$  відносно середнього значення.

Розглянемо приклад випадкового процесу. Візьмемо підсилювач постійного струму та підключимо на його вихід грубий прилад, що вимірює напругу. За відсутності вхідного сигналу вимірює на виході підсилювача напруга дорівнюватиме нулю. Однак при більш ретельному дослідженні на виході підсилювача можна помітити більш-менш безладну напругу шуму. Якщо записати цю напругу, отримаємо деяку криву  $U(t)$ , де  $t$  позначає час.



Виконаємо той самий дослід не з одним, а з великою кількістю підсилювачів  $A_1, A_2 \dots A_n$ , що знаходяться в однакових умовах. Будемо вважати, що число  $n$  досить велике, щоб дати досить точне уявлення про досліджуване явище.

Типовий вид випадкових реалізацій для розглянутого прикладу наведено на рисунку 7.1.

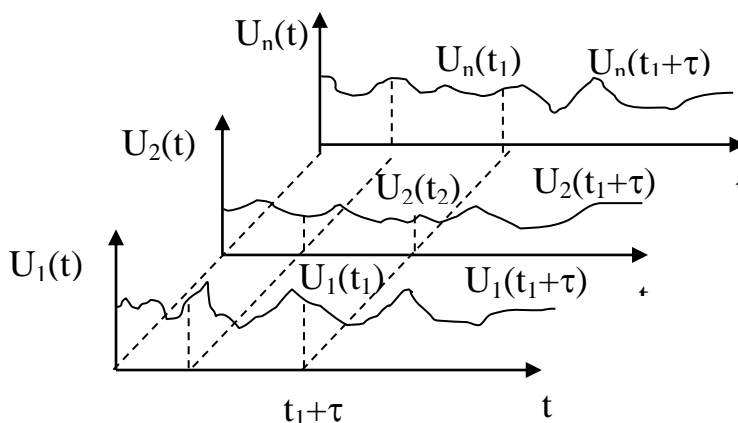


Рис. 7.1. Ансамбль реалізацій випадкового процесу

Будь-яке фізичне явище можна описати з позиції теорії випадкових процесів за допомогою наступних функцій: розподілу; щільності розподілу ймовірності; автокореляційної функції; спектральної щільності, а також числовими характеристиками: математичним очікуванням і моментами випадкового процесу.

Випадкові процеси різняться за рівнем однорідності перебігу у часі. При незмінності перелічених вище функцій і характеристик випадкового процесу від будь-якого заданого моменту часу процес називається стаціонарним (рис. 7.2). Коли середньо квадратичне відхилення випадкового процесу, щільність розподілу ймовірностей чи автокореляційна функція змінюються у часі, процес називається нестаціонарним.

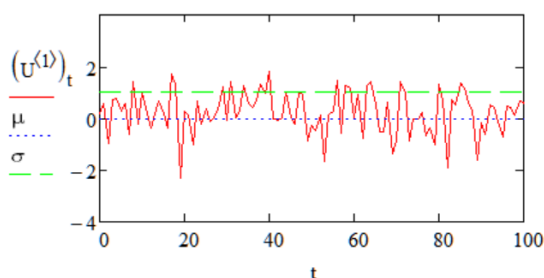


Рис. 7.2. Графік випадкової реалізації значень першого стовпця матриці стаціонарного випадкового процесу

Характеристики випадкового нестационарного процесу у загальному випадку є функціями часу, які можна визначити усередненням миттєвих значень з ансамблем реалізацій, які формують цей процес.

У багатьох випадках у класі випадкових нестационарних процесів, що відповідають реальним фізичним явищам, можна виділити особливі категорії нестационарності, для яких задачі виміру та аналізу спрощуються.

Деякі явища випадкового характеру можуть описуватися випадковим нестационарним процесом  $y(t)$ , кожна вибіркова функція якого може бути представлена сумою детермінованої складової  $A(t)$  та випадковою стаціонарною реалізацією  $x(t)$ .

На рисунку 7.3 представлений процес прокатки дрібносортного прокату з петлею (режим вільної прокатки). Стабілізація петлі здійснюється системою управління частотою обертання валків прокатних клітей за інформацією датчика положення петлі. Для налаштування системи управління необхідно знати числові характеристики збурень, що впливають на величину петлі прокату.

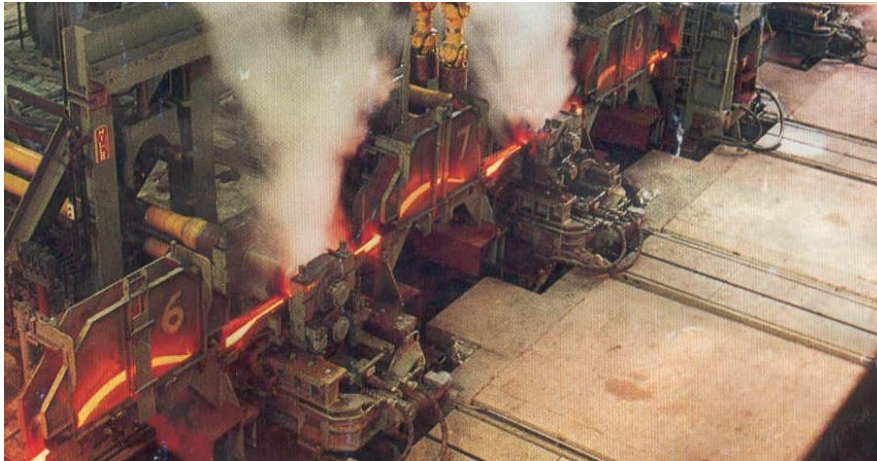


Рис. 7.3. Процес прокатки дрібносортного прокату з петлею (режим вільної прокатки)

На рисунку 7.4 представлений графік зміни частоти обертання двигуна головного приводу клітей при стабілізації величини петлі прокату в міжклітинному проміжку клітей чистової групи безперервного прокатного стану [9,10]. Зміна частоти обертання валків характеризує сумарні дії режиму прокатки на величину петлі.

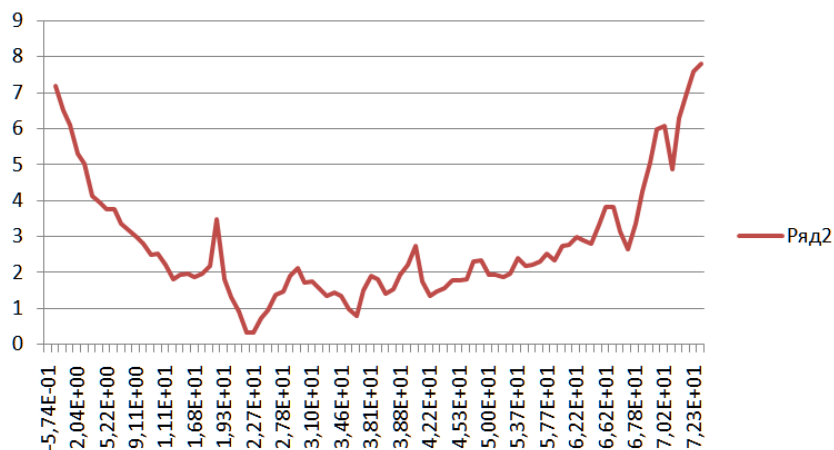


Рис. 7.4. Графік зміни частоти обертання двигуна головного приводу клітей

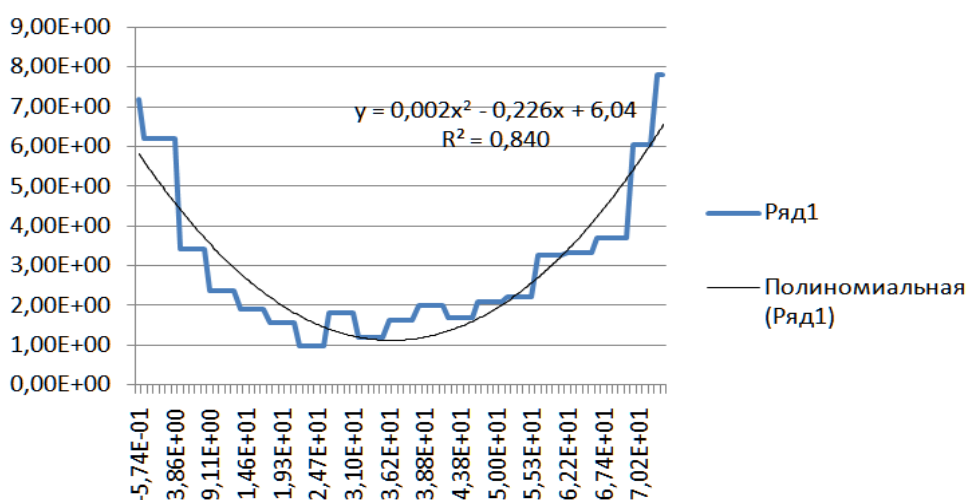


Рис. 7.5. Графік зміни частоти обертання двигуна головного приводу клітей із усередненням по 10-ти точках. Апроксимуюча крива – поліноміальний тренд

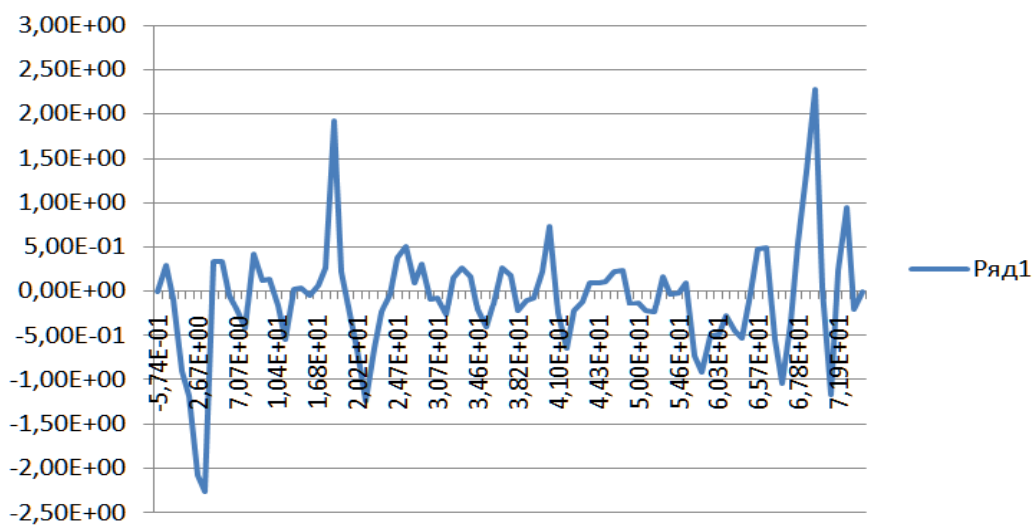


Рис. 7.6. Графік відхилення частоти обертання від середнього значення.

Таким чином, у нестационарній реалізації можна виділити тренд, який описується цілком детермінованою залежністю, та проводити аналіз випадкової стаціонарної реалізації щодо цього тренду.

Розглянуті поняття стаціонарності пов'язані з усередненням за ансамблем реалізацій випадкового процесу. Проте, часто говорять про стаціонарність чинного стаціонарного процесу, представленого лише однією реалізацією. Коли говорять про стаціонарності однієї реалізації, це зазвичай означає, що показники, розраховані за короткі відрізки часу, не змінюються значимо для різних відрізків. Слово «значимо» використовується тут для позначення того факту, що зміни, що спостерігаються, не більше, ніж можна очікувати за рахунок звичайної статистичної мінливості. Що стосується ситуації, коли вибіркові показники випадкового процесу змінюються значимо за зміну початкового моменту часу, то отримана реалізація називається нестационарною.

Іншим важливим класом випадкових процесів є ергодичні процеси. Крім визначення властивостей випадкового процесу шляхом усереднення за ансамблем, окремі моменти часу, можливо також описати властивості випадкового стаціонарного процесу шляхом усереднення за часом окремих вибірових реалізацій випадкового процесу. Якщо показники випадкового процесу, отримані з ансамблю реалізацій, не відрізняються значимо від таких, що отримані усередненням окремих реалізацій за часом, такий процес називають ергодичним. Випадкові ергодичні процеси представляють важливий клас, оскільки їх властивості можуть бути визначені усередненням за часом однієї реалізації.

Для визначення статистичних характеристик ергодичного ВП проводиться перевірка його стаціонарності: на окремих коротких реалізаціях обчислюється математичне очікування і якщо  $m_{xi} = \text{const}$  ( $i$  – номер реалізації), то процес стаціонарний. Якщо це не так, то процес нестационарний за математичним очікуванням, тобто математичне очікування від реалізації до реалізації має тенденцію зміни. Ці зміни називаються трендом.

У простішому разі спостерігається лінійний тренд, тобто  $m_u(t) = m_u + at$ . Якщо тренд нелінійний, він може бути апроксимований рядом Тейлора –  $m_u(t) = m_u + a t + b t^2 + c t^3 + \dots$  (вище 3-го ступеня брати поліноми не слід).

Тренд може бути отриманий шляхом усереднення реалізації на коротких інтервалах – метод ковзного середнього  $\tilde{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i + x_{i+1}}{3}$  дозволяє

отримати згладжений ВП. Попередньо для усунення так званих «викидів» експериментальних даних найчастіше проводять їх медіанну фільтрацію:

Значення відліків усередині вікна фільтра сортується в порядку зростання (спадання) і значення, що знаходиться в середині упорядкованого списку, надходить на вихід фільтра. Вікно переміщується уздовж сигналу, що фільтрується, і обчислення повторюються.

Медіанна фільтрація – ефективна процедура обробки сигналів, що піддаються впливу імпульсних перешкод.

При цьому треба враховувати, що інформація про стан та властивості об'єкта дослідження може полягати як у тренді експериментальних сигналів, так і у високочастотних складових, тому до фільтрації сигналів треба підходити обережно, у кожному конкретному випадку обираючи раціональний метод «очищення» отриманих даних.

Спектр випадкового процесу визначає розподіл дисперсій за частотою сигналу: амплітуда спектральних складових дорівнює дисперсії гармонійних коливань на відповідних частотах. У зв'язку з тим, що з обробці випадкового процесу завжди використовують реалізації кінцевої тривалості, спектр випадкового процесу є дискретний. Він наочно показує внутрішню структуру процесу.

Спектр випадкового процесу може бути отриманий через реалізацію

$$S_{u}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt \text{ – пряме перетворення Фур'є.}$$

Зворотнє перетворення Фур'є відновлює сигнал спектром

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega .$$

Випадкові процеси прийнято класифікувати за тими чи іншими ознаками, враховуючи плавність чи стрибкоподібність реалізацій, фіксованість чи випадковість моментів, у які можуть відбуватися стрибки.

Класифікація цих процесів може бути дана як у часі, так і за станом.

Випадковий процес називається процесом з дискретним часом, якщо система, в якій він відбувається, змінює свій стан тільки в лічильні моменти часу  $t_2, \dots, t_i$ . Випадковий процес називається процесом з безперервним часом, якщо переходи системи з одного стану до іншого відбуваються в будь-який момент часу  $t$  усього періоду, що спостерігається.

При дослідженні технологічних процесів з використанням цифрових методів обробки інформації ми найчастіше маємо справу з процесами, що мають дискретний стан та дискретний час. Дискретність часу визначається періодичністю вимірювань параметрів технологічного процесу, а дискретність стану розрядністю перетворення безперервного сигналу на цифровий.

## 7.2. Випадкові величини та закони їх розподілу

Випадковою величиною називається величина, яка може приймати ті чи інші значення з множини можливих, заздалегідь невідомих. Випадкову реалізацію, що складається з дискретних випадкових величин, називатимемо дискретною.

Ймовірність  $\text{Prob}(A)$  деякої події визначається як відносна частота її настання. Припустимо, деякий експеримент повторюється велику кількість разів у однакових умовах. Нехай  $A$  – цікавий для нас результат експерименту, що був повторений  $N$  разів, настав  $N_a$  разів, тоді ймовірність результату  $A$

$$\text{Prob}(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_a}{N}. \quad (7.1)$$

Таким чином, ймовірність події  $A$  дорівнює межі відношення числа  $N_a$  настання результату  $A$  до загального числа результатів, коли кількість випробувань прагне до нескінченності.

Розглянемо дискретну випадкову реалізацію з випадковими величинами  $Q[n]$ . Діапазон та дискретність випадкових величин визначається квантуванням сигналів у цифровій обчислювальній машині. Можливі значення  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  випадкова величина може прийняти з деякою ймовірністю. В результаті досліду величина  $Q[n]$  прийме одне з цих значень. Позначимо ймовірності цих подій у такий спосіб:  $\text{Prob}(Q_1), \text{Prob}(Q_2), \dots, \text{Prob}(Q_n)$ . Так як ці несумісні події утворюють повну групу, то сума ймовірностей всіх можливих значень дорівнює 1:

$$\sum_{n=1}^N \text{Prob}(Q[n]) = 1. \quad (7.2)$$

Цю суму ймовірностей якимось чином розподілено між окремими значеннями випадкової величини.

Випадкова дискретна реалізація буде повністю визначена з ймовірнісної точки зору, якщо ми задамо цей розподіл та точно вкажемо, яку ймовірність має кожна з цих подій. Цим ми встановимо закон розподілу випадкової величини.

Законом розподілу випадкової величини називається будь-яке співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними ймовірностями. Про випадкову величину будемо говорити, що вона підпорядкована цьому закону розподілу – ряду розподілу.

Ряд розподілу не застосовується до безперервних випадкових процесів. Безперервна випадкова величина має незліченну кількість можливих значень, що заповнюють певний проміжок. Скласти таблицю, у якій перераховані всі можливі значення такої випадкової величини неможливо.

Для кількісної оцінки розподілу ймовірностей безперервної випадкової величини зручно скористатися не ймовірністю події  $\text{Prob}[X(t)] = \xi$ , а ймовірністю події  $X(t) < \xi$ , де  $\xi$  – деяка поточна змінна. Ймовірність цієї події залежить від  $\xi$  і є певною функцією від  $x$ . Позначимо її як

$$P(Q, \xi) = \text{Prob}[Q(t) < \xi]. \quad (7.3)$$

Функція розподілу випадкової величини (вона ж інтегральна функція розподілу ймовірностей) – це ймовірність того, що випадкова величина  $Q(t)$  набуде значення меншого, ніж конкретне числове значення  $\xi$ .

Функція розподілу – найуніверсальніша характеристика випадкових величин як безперервних, так і дискретних випадкових процесів.

Розглянемо цю функцію. Вважатимемо, що аналізований випадковий процес стаціонарний та ергодичний.

Розглянемо реалізацію  $Q_n = \text{rnorm}(N, \mu, \sigma)$  випадкових дискретних величин (рис. 7.7) та припустимо, що нас цікавить подія, яка полягає в тому, що виміряні значення реалізації випадкового процесу не перевищують  $\xi$ .

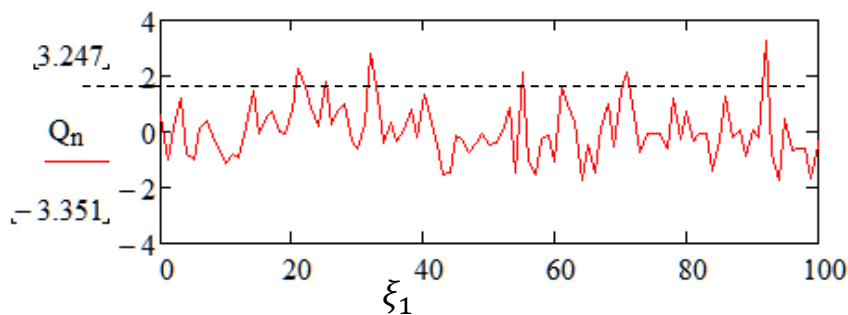


Рис. 7.7. Огинаюча випадкових значень реалізації  $Q[n]$

За визначенням, ймовірність цієї події дорівнює

$$\text{Prob}(Q[n] < \xi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M(Q[n] < \xi)}{N}, \quad (7.4)$$

де  $M(Q[n] < \xi)$  – кількість значень реалізації, величина яких менша  $\xi$ .

Задамо інтервал зміни рівнів значень  $\xi$  від  $-2$  до  $3$  з дискретністю  $0,1$  і визначимо середню кількість значень менших  $\xi$ . Графік функції  $\text{Prob}(Q, \xi)$  наведено на рис. 7.8. Надалі позначатимемо функцію розподілу  $P(Q, \xi)$ .

$$\xi := -2, -1.9 \dots 3$$

$$\text{Prob}(Q, \xi) := \left( \frac{1}{N} \right) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \Phi(\xi - Q_n)$$

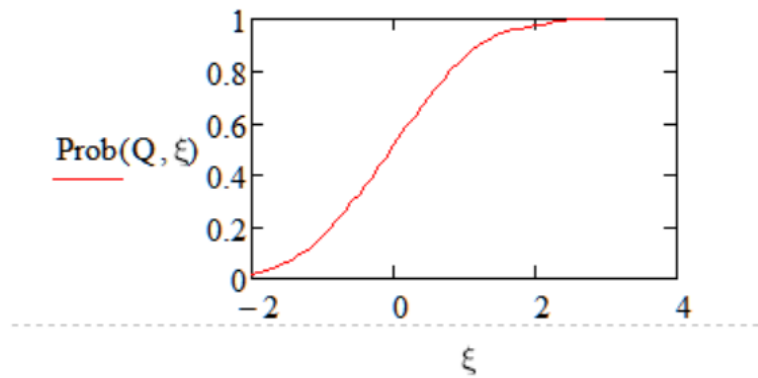


Рис. 7.8. Графік функції Prob (Q, ξ)

Функція розподілу визначає ймовірність того, що миттєве значення  $Q[n]$  у певному інтервалі  $0 \dots N$  відліків не перевищує заданого значення  $\xi$ .

$\Phi(x)$  – функція Хевісайда, що повертає 1, якщо  $x = 0$ , і 0 в інших випадках. В даному випадку функція  $\Phi$  в залежності від знаку різниці ( $\xi - Q[n]$ ) приймає значення 1 чи 0. На рисунку 7.9 наведено приклад дискретної функції  $Q[n]$ . Пунктиром виділено значення реалізації  $Q_1[n] < 1$ , де

$$Q_1(n) = Q[n] \cdot \Phi(1 - Q[n]). \quad (7.5)$$

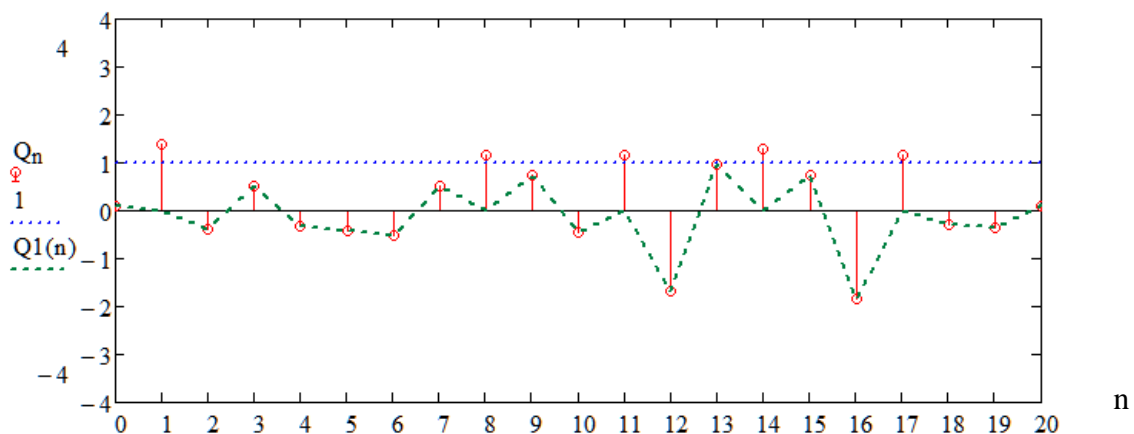


Рис. 7.9. Значення  $Q_1[n]$  для  $\xi = 1$

Визначимо ймовірність того, що значення реалізації  $Q_1[n]$  будуть меншими 1. Позначимо кількість значень  $Q_1[n]$  через  $M(Q_1[n])$ :

$$M(Q_1[n]) = 16; N = 20; \text{Prob}(Q_1[n] < 1) = \frac{M(Q_1[n] < 1)}{N} = 0,8.$$

Властивості функції розподілу.

1. Імовірність того, що випадкова величина набуде значення на напівінтервалі  $(a, b)$ , де  $a < b$ , дорівнює різниці значень функції розподілу на кінцях цього інтервалу.



2. Функція розподілу  $P(Q, \xi)$  прагне до нуля при необмеженому зменшенні  $\xi$  і до одиниці – при необмеженому зростанні  $\xi$ .

Насправді, при  $P(Q, \xi) \rightarrow -\infty$  випадкова подія  $Q[n]$  стає неможливою, оскільки випадкова величина неспроможна приймати значення менш ніж  $-\infty$ . З іншого боку, випадкова подія при  $P(Q, \xi) \rightarrow -\infty$  є достовірною.

**Щільність ймовірності розподілу**

Якщо функція розподілу  $P(Q, \xi)$  безперервної випадкової реалізації  $Q(t)$  диференційована, завжди можна взяти її похідну – щільність ймовірності

$$p(Q, \xi) = \frac{dP(Q, \xi)}{d\xi}, \tag{7.8}$$

яка визначатиме нахил функції розподілу. Наприклад, для функції розподілу (рис. 7.10) графік щільності виглядатиме як на рисунку 7.11.

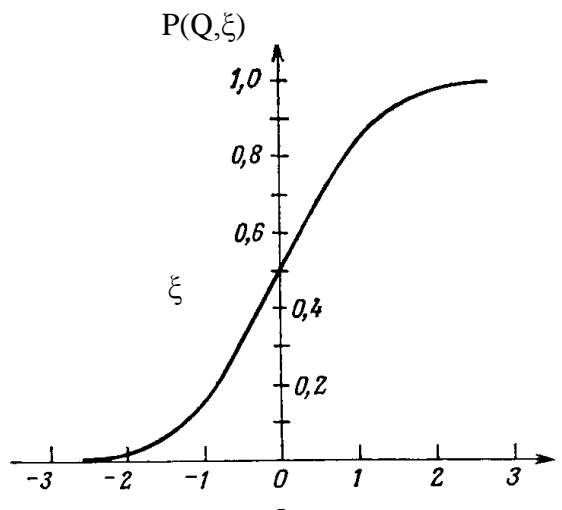


Рис. 7.10. Графік функції розподілу

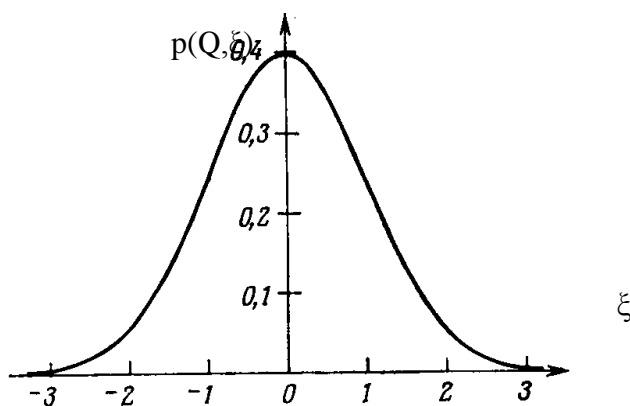


Рис. 7.11. Графік щільності

Насправді, по-перше, час спостереження подією обмежено і, по-друге, випадкова величина набуває дискретні значення. Тому взяти похідну (7.8) неможливо. Приблизно щільність можна визначити, взявши відношення збільшення функції розподілу до діапазону зміни цієї функції

$$p(\xi) := \frac{\text{Prob}[Q, (\xi + \Delta\xi)] - \text{Prob}(Q, \xi)}{\Delta\xi} \quad (7.9)$$

Приклад графіка щільності ймовірностей дискретної випадкової реалізації являє собою гістограму (рис. 7.12).

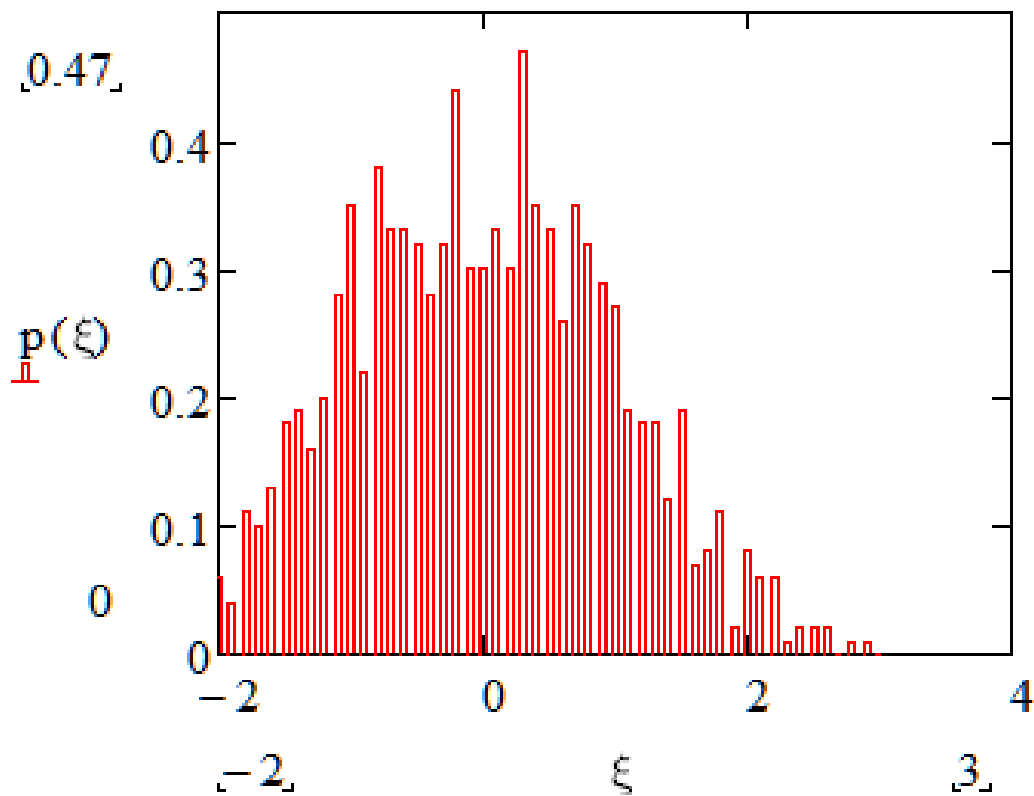


Рис. 7.12. Гістограма щільності ймовірностей дискретної випадкової реалізації

### ***Властивості щільності ймовірності***

1. Імовірність того, що значення безперервної випадкової реалізації укладаються між  $x_1$  та  $x_2$  дорівнює

$$\text{Prob}[x_1 \leq x(t) \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = \text{Prob}(x_2) - \text{Prob}(x_1). \quad (7.10)$$

2. Інтеграл від щільності розподілу ймовірностей по всій числовій осі дорівнює 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1. \quad (7.11)$$

### 7.3. Моменти та середні значення реалізацій випадкового процесу

Розрахунки, виконані з використанням функцій розподілу ймовірностей чи її щільності, громіздкі та складні. Багато властивостей реалізацій випадкових процесів можуть бути описані на основі числових характеристик, які визначають положення центру розсіювання та міру розсіювання значень процесу.

Однією з найважливіших числових характеристик випадкової величини є її середнє значення, зване також математичним очікуванням.

Математичним очікуванням  $M[x(t)]$  випадкової величини  $x(t)$  називається число, яке визначається інтегралом виду

$$M[x(t)] = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)p(x)dx, \quad (7.12)$$

де  $p(x)$  – щільність розподілу випадкової величини  $x(t)$ .

Моменти стаціонарного випадкового процесу  $x(t)$ , що описує деяку подію, визначаються наступним чином

$$M[x^k(t)] = \mu^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k(t_1)p(x)dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (7.13)$$

Перший момент є математичним очікуванням чи середнім значенням.

Другий та вищі моменти, обчислені щодо середнього значення, називаються центральними моментами.

Другий центральний момент називається дисперсією –

$$M[x(t)^2] = \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t_1)p(x)dx. \quad (7.14)$$

Позитивний квадратний корінь з дисперсії називається середньо-квадратичним відхиленням

$$\sigma[x(t)] = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - \mu]^2 p(x) dx}. \quad (7.15)$$

#### 7.4. Оцінювання середніх значень випадкових величин

Математичне очікування, дисперсія, та середньоквадратичне відхилення, що задаються відповідними формулами (7.12), (7.14), (7.16), для дискретних випадкових величин можуть бути визначені безпосереднім усередненням значень випадкових величин  $Q[n]$  реалізації випадкового процесу.

Оцінка середнього значення

$$\mu_d = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Q[n]. \quad (7.16)$$

Обчислення дисперсії

$$\sigma_d^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \{Q[n] - \mu_d\}^2. \quad (7.17)$$

Середньоквадратичне відхилення

$$\sigma_d = \sqrt{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (Q[n] - \mu_d)^2}, \quad (7.18)$$

де  $n$  – номер відліку випадкової величини.

У математичному пакеті Mathcad наведено команди для обчислення характеристик випадкових величин:

- mean(x) – вибіркове середнє значення;
- median(x) – вибіркова медіана (median) – значення аргументу, яке поділяє гістограму щільності ймовірностей на дві рівні частини;
- var(x) – вибіркова дисперсія (variance);
- stdev(x) – середньоквадратичне (стандартне) відхилення (standard deviation);
- max(x), min(x) – максимальне та мінімальне значення вибірки;
- mode(x) – мода – значення вибірки, що зустрічається найбільш часто;
- var(x), stdev(x) – вибіркова дисперсія та середньоквадратичне відхилення;
- x – вектор (або матриця) із вибіркою випадкових даних.

Наведемо деякі оцінки для сформованої випадкової реалізації (рис. 7.2), розраховані в пакеті Matlab:

$\text{mean}(Q) = -0.06$  – середнє значення;

$\text{var}(Q) = 0.969$  – дисперсія;

$\text{stdev}(Q) = 0.984$  – середньоквадратичне відхилення.

Наведені формули (7.16) – (7.18) містять операцію переходу до межі, яка практично не здійсненна, оскільки не можна обробити нескінченне число реалізацій чи одну реалізацію нескінченної довжини.

Неможливість фактично виконати граничний перехід призводить до вибіркової мінливості оцінок, отриманих під час обробки даних. Тому необхідно оцінювати помилки, пов'язані з вибірковою мінливістю оцінок. В літературі [4] наведено вирази для визначення нормованих помилок оцінок середнього та середнього квадрата. Нормована помилка дисперсії:

$$\varepsilon_{\mu} = \frac{\text{var}(Q)}{\sqrt{N}} = 0,031. \quad (7.19)$$

На графіку рисунка 7.13 для наведеної в літературі випадкової реалізації, видно, що приблизно після 50-ти значень, зменшення стандартної помилки середньої різко сповільнюється, після 100 – нахил поступово стає майже нульовим.

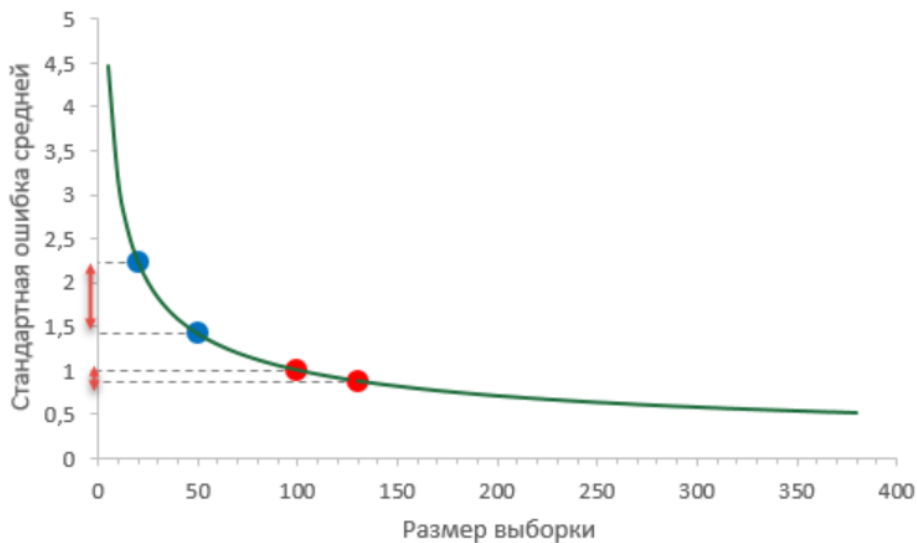


Рис. 7.13. Графік зменшення стандартної помилки

## 7.5. Нормальний (гаусовський) шум

Щільності розподілу великої кількості випадкових процесів, що описують фізичні явища, добре апроксимуються виразом виду

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad (7.20)$$

де  $\mu$  і  $\sigma$  – відповідно, середнє значення та середньоквадратичне відхилення.

Функція (7.22) була отримана у 1733 р. Карлом Фрідріхом Гауссом для так званого нормального розподілу випадкової величини. Для зручності зазвичай табулюється та графічно зображується щільність нормованої випадкової величини і відповідно середнє значення та середньоквадратичне відхилення з нульовим середнім значенням та одиничним середньоквадратичним відхиленням:

$$z = (x - \mu) / \sigma. \quad (7.21)$$

Цим простим перетворенням вираз (7.22) наводиться до вигляду

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}. \quad (7.22)$$

Нормований нормальний розподіл має вигляд

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz. \quad (7.23)$$

Графіки функцій нормованого нормального розподілу та його щільності наведено на рисунку 7.14.

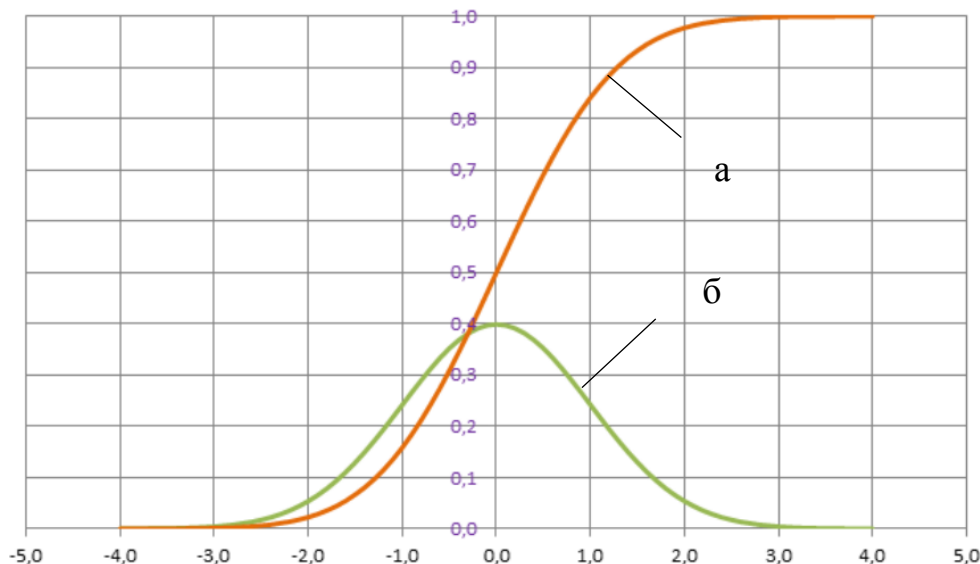


Рис. 7.14. Функції нормованої випадкової величини:  
а – функція розподілу; б – щільність розподілу

Близько 68 % значень із нормального розподілу знаходяться на відстані не більше одного стандартного відхилення  $\sigma$  від середнього; близько 95 % значень лежать на відстані не більше  $2\sigma$ ; а 99,7 % – більше  $3\sigma$  (рис. 7.15).

Відомо правило «трьох сигм» – практично всі значення нормально розподіленої випадкової величини лежать в інтервалі  $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ .

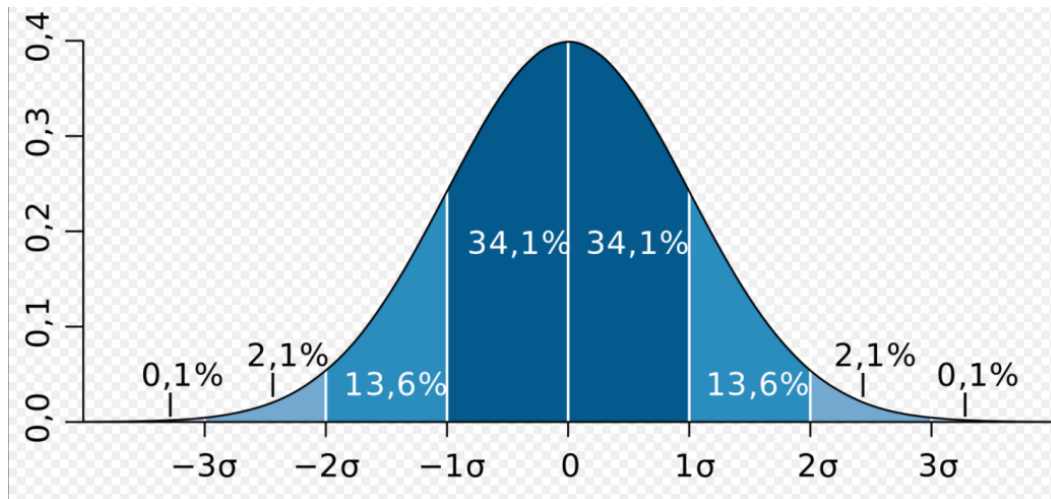


Рис. 7.15. Діпазони нормального розподілу випадкової величини

Важливість нормального розподілу визначається застосовністю на практиці центральної граничної теореми теорії ймовірностей, яка не суворо формулюється наступним чином: «Якщо випадкова величина  $x$  є сумою статистично незалежних випадкових величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$  з довільними щільностями розподілу, то щільність розподілу  $x_1, x_2, \dots, x_n$  наближається до нормальної щільності при  $n \rightarrow \infty$ ». Випадкові явища часто дійсно є результатом взаємодії багатьох незалежних випадкових факторів, тому нормальний розподіл служить доброю апроксимацією щільності випадкових процесів.

Як впливає з формули (7.25), нормальний розподіл повністю визначається середнім значенням та середньоквадратичним відхиленням. Тому для визначення нормальної щільності достатньо оцінити лише ці параметри процесу. Також важливо, що усі лінійні операції над нормально розподіленими випадковими величинами призводять до нормально розподіленої випадкової величини. Це означає, що такі операції як перетворення Фур'є та інтегрування, що виконуються над нормально розподіленими випадковими величинами, дають у результаті нормально розподілені величини.

## 7.6. Індивідуальне завдання № 3

### Випадкові величини та їх закони розподілу.

#### Моменти та середні значення реалізації випадкового процесу

##### *Мета роботи*

Освоїти застосування математичного пакета Matlab для аналізу статистичних властивостей реалізації випадкового процесу. Визначити закон розподілу ймовірностей та числові характеристики значень реалізації випадкового процесу.

##### *Порядок проведення роботи*

1. Згенерувати в пакеті Excel масив 254 значень реалізації випадкового процесу, задавши середнє значення  $\mu = 0$  і стандартне відхилення  $\sigma = 1$ .
2. Відповідно до наведеного прикладу виконати у пакеті Matlab для цього масиву розрахунок числових характеристик та випадкових функцій.
3. Визначити тип функції розподілу та її щільності.
4. Зробити висновки.

##### *Зміст звіту*

1. Навести програмний код написаної програми.
2. Пояснити розрахунок періоду дискретизації сигналу за часом.
3. Навести графік розподілу ймовірностей та порівняти його з підібраним теоретичним розподілом.
4. Зробити висновки.

##### Приклад програми

```
clearvars -except -regexp
y=load('stat2.txt'); t=1:254; k=1:20; N=254
y1=y+4
figure(1)
plot(t,y1)
Z=mean(y1); V=var(y1); St=std(y1);
L=1:0.1:6
for k=1:1:51
for t=1:1:N
x(t,1)=L(1,k)-(y1(t,1));
if x(t,1)>0
j(t,k)=1; else j(t,k)=0
end
end
end
S=sum(j,1)/N
W=S(1:51)
figure(2)
plot((1:51),W)
```



```

m=0:0.1:7
P=normpdf(m,Z,St)
figure(3)
plot(m,P); title('Щільність розподілу'),grid;
xlabel('Діапазон зміни сигналу'); ylabel('Ймовірність')
Z
V
St

```

Приклад оформлення результатів статистичних властивостей реалізації випадкового процесу відображено на рисунках 7.16-7.18.

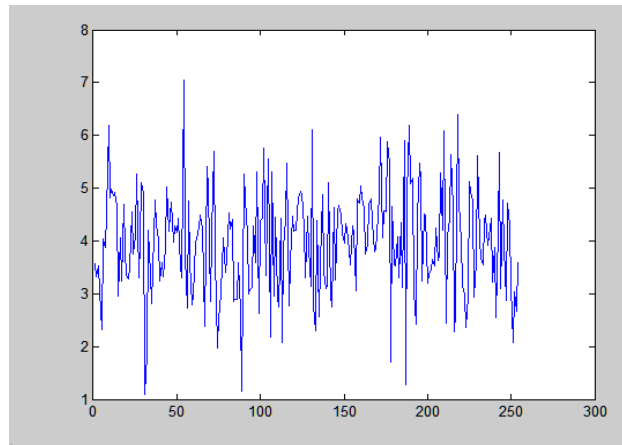


Рис. 7.16. Графік реалізації випадкового процесу

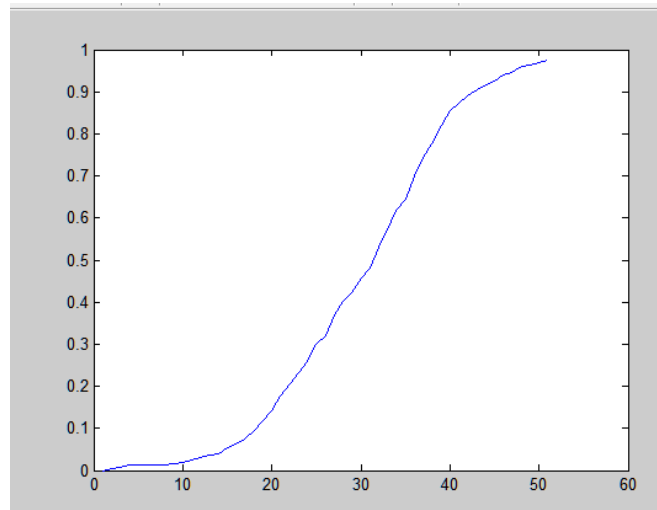


Рис. 7.17. Функція розподілу ймовірностей

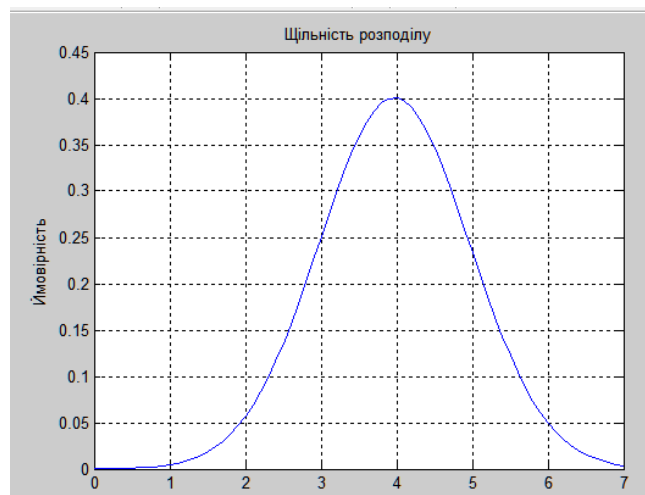


Рис. 7.18. Функція щільності розподілу ймовірностей

### Контрольні запитання та завдання

1. За допомогою яких функцій можна описати будь-яке фізичне явище з позиції теорії випадкових процесів?
2. У якому випадку випадковий процес називається нестационарним?
3. Що таке ергодичні процеси?
4. Для чого використовується метод ковзного середнього?
5. Що таке медіанна фільтрація?
6. За якими ознаками можна класифікувати випадкові процеси?
7. Що називається законом розподілу випадкової величини?
8. Що представляє собою функція розподілу випадкової величини?
9. Назвіть властивості функції розподілу.
10. Опишіть правило «трьох сигм».

## 8. ОСНОВНІ ФУНКЦІЇ МОВИ ПРОГРАМУВАННЯ МАТЛАВ ДЛЯ ОБРОБКИ ДАНИХ

### 8.1. Поняття про суцільне та вибіркоче спостереження

З погляду охоплення об'єкта дослідження, статистичний аналіз можна поділити на два види: суцільний та вибіркочий. Суцільний статаналіз передбачає вивчення генеральної сукупності даних, тобто всього явища у всьому його різноманітті без поширення висновків на інші елементи, які не входять в аналізовану сукупність. З назви цього аналізу випливає, що спостереженню піддаються тотально всі елементи. Його результат поширюється на всю генеральну сукупність без будь-яких припущень та

поправок. Даний тип статистичного дослідження є найбільш повним і точним, тому що додаткові знання почерпнути вже нема звідки – інформація зібрана з усіх елементів об'єкта дослідження. Це безперечний плюс.

Але таке суцільне дослідження має негативну сторону – на його організацію та проведення можуть знадобитися значні ресурси. Одна річ взяти пробу з партії товарів, інша – перевіряти всю партію. Одна річ опитати тисячу перехожих на вулиці, зовсім інша – організувати перепис усього населення.

Тому, на противагу суцільному, звичайно проводять вибіркове спостереження. Назва методу точно відбиває його суть: з генеральної сукупності відбирається і аналізується лише частина даних, а висновки поширюють всю генеральну сукупність. Відбір даних відбувається таким чином, щоб вибірка була репрезентативною, тобто зберегла внутрішню структуру та закономірності генеральної сукупності. Якщо цієї умови не дотримано, то подальший аналіз втрачає сенс.

Сам аналіз вибіркових даних відбувається так само, як і при суцільному спостереженні (розраховуються різні показники, робляться прогнози тощо), лише з поправкою на помилку. Це означає, що, розраховуючи той чи інший показник, ми розуміємо, що при повторній вибірці його значення може бути іншим. Наприклад, провели опитування громадської думки. Опитування показало, що за кандидата N бажають проголосувати 60 % опитаних. Якщо провести ще одне таке ж опитування, навіть у тому ж місці, то результат відрізнятиметься. Тобто, взявши перше значення 60 %, слід розуміти, що з тією чи іншою ймовірністю воно могло бути, скажімо, і 58 %, і 62 %. Точність та розкид вибіркових показників залежать від характеру даних.

У вибіркового спостереження є один суттєвий плюс і один мінус, проте, порівняно з суцільним спостереженням, крайності змінюються місцями. Плюс полягає в тому, що для проведення вибіркового обстеження потрібно набагато менше ресурсів. Мінус – у тому, що, взагалі кажучи, вибіркове спостереження завжди є помилковим. Тому основне завдання вибіркового спостереження – досягти максимальної точності при прийнятних витратах на його проведення.

Розглянемо поняття вибіркової незміщеної дисперсії. Дисперсія, як і середнє арифметичне значення, також змінює свою величину від вибірки до вибірки, але є цікава особливість. Адже дисперсія розраховується від середнього значення, а воно, у свою чергу, теж визначається за вибіркою, тобто є помилковою. Як же ця обставина впливає на оцінювання дисперсії?

Якби ми знали справжнє середнє значення (за генеральною сукупністю), то помилка дисперсії була б пов'язана тільки з нерепрезентативністю, тобто з тим, що дані у вибірці виявилися ближче чи далі від середнього значення, ніж загалом за генеральною сукупністю. При багаторазовому повторенні дані прагнули б до свого реального розташування відносно середнього.

Вибірковий показник, який при багаторазовому повторенні вибірки прагне до свого теоретичного значення, називається незміщеною оцінкою. Чому оцінкою? Тому що ми не знаємо реального значення показника (за генеральною сукупністю), і за допомогою вибіркового спостереження намагаємося його оцінити. Оцінка показника – це його характеристика, розрахована за вибіркою.

Тепер уважно дивимось на вибіркоче середнє, яке є незміщеною оцінкою математичного очікування, оскільки середня величина з середніх вибіркових прагне до свого теоретичного значення за генеральною сукупністю і розташована у центрі вибірки. Середнє завжди знаходиться в центрі значень, за якими розрахована. А якщо вибіркоче середнє знаходиться в центрі вибірки, то з цього випливає, що сума квадратів відстаней від кожного значення вибірки до середнього вибіркового завжди менше, ніж до будь-якої іншої точки, в тому числі і до генерального середнього. Це є ключовим моментом. А якщо так, то дисперсія в кожній вибірці буде занижена. Середня із занижених дисперсій також дасть занижене значення. Тобто при багаторазовому повторенні експерименту вибіркова дисперсія не прагнучиме свого справжнього значення (як вибіркоче середнє), а буде зміщена щодо справжнього значення за генеральною сукупністю.

Відхилення вибіркового середнього від середнього за генеральною сукупністю показано на рисунку 8.1.

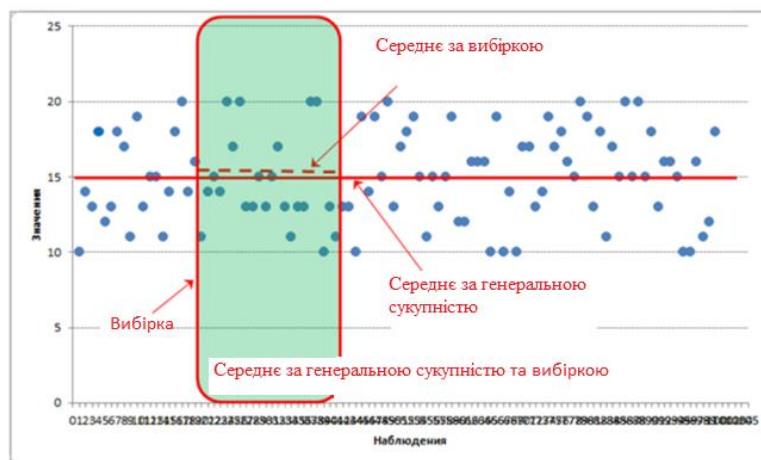


Рис. 8.1. Середнє за вибіркою та за генеральною сукупністю

Незміщеність оцінки – одна з найважливіших характеристик статистичного показника. Зміщена оцінка показника наперед свідчить про тенденцію до помилки. Тому показники намагаються оцінювати таким чином, щоб їх оцінки були незміщеними (як середня арифметична). Щоб вирішити проблему зміщеності вибіркової дисперсії, її розрахунок вносять коригування – множать на  $n/(n-1)$ , або при розрахунку в знаменник ставлять не  $n$ , а  $n-1$ .

Тепер подивимося на практичну сторону відхилення зміщеної та незміщеної дисперсії. Співвідношення між вибірковою та генеральною дисперсією становить  $n/n-1$ . Нескладно здогадатися, що зі зростанням  $n$  (обсягу вибірки) цей вираз прагне до 1, тобто різниця між значеннями вибіркової та генеральної дисперсіями зменшується.

Наприклад, у вибірці з 11-ти спостережень відносна різниця становить:  $(11 - 10) / 10 = 10\%$ . При 21-му спостереженні відмінність скорочується до 5 %, при 31-му спостереженні – до 3,3 %, при 51-му – до 2 %, при 101-му – до 1 %. Тобто, при досить великій вибірці даних (50 і вище) відносна різниця між зміщеною та незміщеною дисперсією практично зникає. Оцінка параметра, коли зі зростанням вибірки його відхилення від теоретичного значення зменшується, називається асимптотично незміщеною оцінкою.

При переході до середньоквадратичного відхилення за вибіркою (корінь із вибіркової дисперсії) різниця стає ще меншою.

Таким чином, ефект зміщеної дисперсії проявляється у невеликих вибірках. У великих вибірках можна використовувати генеральну дисперсію.

## 8.2. Знаходження максимального та мінімального елементів масиву та стандартного відхилення

До найпростішого аналізу даних, які знаходяться у деякому масиві, відноситься пошук їх елементів з максимальним і мінімальним значеннями [min; max]. Визначені такі функції програмних засобів для знаходження мінімальних та максимальних елементів масиву:

- $\max(A)$  повертає найбільший елемент, якщо  $A$  – вектор; або повертає вектор-рядок, що містить максимальні елементи кожного стовпця, якщо  $A$  – матриця;
- $\max(A,B)$  повертає масив того ж розміру, що  $A$  та  $B$ , кожен елемент якого є максимальний із відповідних елементів цих масивів;
- $\max(A, [ ], \dim)$  повертає найбільший елемент по стовпцях або по рядках матриці в залежності від значення скаляра  $\dim$ . Наприклад,  $\max(A, [ ], 1)$  повертає максимальні елементи кожного стовпця матриці  $A$ ;
- $[C,I] = \max(A)$  – крім максимальних значень, повертає вектор індексів елементів із цими значеннями.

До елементарної статистичної обробки даних у масиві зазвичай відносять знаходження їх середнього значення, медіани (серединного значення) та стандартного відхилення. Для цього визначено такі функції програмних засобів обробки даних:

- $\text{mean}(A)$  повертає арифметичне середнє значення елементів масива, якщо  $A$  – вектор; або повертає вектор-рядок, що містить середні значення елементів кожного стовпця, якщо  $A$  – матриця. Арифметичне середнє значення є сума елементів масиву, поділена з їхнє число;

- `mean(A,dim)` повертає середнє значення елементів по стовпцях або по рядках матриці в залежності від значення скаляра `dim` (`dim = 1` за стовпцями і `dim = 2` за рядками, відповідно);
- `median(A)` повертає медіану, якщо `A` – вектор; або вектор рядок медіан для кожного стовпця, якщо `A` – матриця;
- `median(A,dim)` повертає значення медіан для стовпців або рядків матриці залежно від значення скаляра `dim`. Стандартне відхилення для вектора `X` обчислюється за формулою

$$\sigma_d = \sqrt{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (Q[n] - \mu_d)^2}. \quad (8.1)$$

Якщо `Q` – матриця, то `std(X)` повертає вектор-рядок, що містить стандартне відхилення елементів кожного стовпця (зверніть увагу, що воно відрізняється від середньоквадратичного відхилення). Стандартне відхилення визначається такою функцією:

- `std(X)` повертає стандартне відхилення елементів масиву;
- `std(X,flag)` повертає те ж значення, що і `std(X)`, якщо `flag=0`;  
якщо `flag=1`, функція `std(X,1)` повертає середньоквадратичне відхилення (квадратний корінь з незміщеної дисперсії), що обчислюється за (8.1);
- `std(X,flag,dim)` повертає стандартне або середньоквадратичне відхилення по рядках або стовпцях матриці `Q` в залежності від значення змінної `dim`.

### 8.3. Оператори MatLab

Оператори циклу [7]

1. Цикл `for`

Оператор `for` задає фіксоване число циклів. У MatLab цикл `for` може бути двох видів:

- Перший вид оператора `for`

`for i = a:b:c`

<Команди програми>

`End;`

В операторі вище змінні мають такий зміст:

`i` – змінна циклу;

`a` – початкове значення змінної циклу;

`b` – крок збільшення змінної циклу;

`c` – кінцеве значення змінної циклу.

Розглянемо як приклад роботу даного циклу.

`for i = 1:2:5;`

`a = 4 + i end;`

На першому циклі  $i = 1$ , потім буде виконано команди всередині циклу,  $a = 4 + 1$ . Після команди `end` виконання циклу розпочнеться спочатку.

На другому циклі змінна циклу збільшиться на крок  $i = 1 + 2 = 3$ , потім буде виконано команди всередині циклу,  $a = 4 + 3$ . Після команди `end` виконання циклу розпочнеться спочатку.

На третьому циклі змінна циклу ще збільшиться на крок  $i = 3 + 2 = 5$ , потім буде виконано команди всередині циклу,  $a = 4 + 5$ . Після команди `end` виконання циклу розпочнеться спочатку.

Як і в попередніх циклах, буде обчислена змінна циклу  $i = 5 + 2 = 7$ . Обчислене значення буде порівняно з кінцевим значенням змінної циклу, тому якщо в цьому випадку змінна циклу  $i = 7$  буде більшою за кінцеве значення змінної циклу, то цикл виконуватися більше не буде. Програма закінчить роботу.

Сформулюємо ряд положень, які необхідно знати під час використання даного оператора.

1. Крок збільшення змінної циклу може бути як позитивним, так і негативним.

2. Якщо крок збільшення змінної циклу не пишеться, то вважається, що він дорівнює одиниці.

2. Оператор умови `if`.

Цей оператор може бути у 3-х видах:

Вид 1

```
if <логічний вираз>  
  <Команди програми>  
end;
```

Вид 2

```
if <логічний вираз>  
  <Команда програми 1>  
else;  
  <Команда програми 2>  
end;
```

Вид 3

```
if <логічний вираз 1>  
  < Команди програми 1>  
elseif ;  
  <логічний вираз 2>  
  <Команди програми 2>  
elseif <логічний вираз 3>  
  < Команди програми 3>  
else;  
  < Команди програми 4>  
end;
```

Сформулюємо положення, які необхідно знати при використанні даного оператора:

1. В операторі першого виду: якщо <логічний вираз> – вірно, то виконуються з <Команди програми>, <якщо логічний вираз> – невірно, то оператор if взагалі не виконується.

2. В операторі другого виду: якщо <логічний вираз> – вірно, то виконуються <Команда програми 1>, якщо <логічний вираз> – невірно, то виконуються <Команда програми 2>.

3. В операторі третього виду може бути будь-яка кількість командних слів elseif. Крім того, командне слово else може бути відсутнім.

4. У операторі третього виду: якщо <логічний вираз 1> вірно, то виконуються <Команди програми 1>; якщо <логічний вираз 1> невірно, то перевіряється <логічний вираз 2>; якщо воно вірне, то виконуються <Команда програми 2>; якщо <логічний вираз 2> невірно, то перевіряється <логічний вираз 3> і т.д. Якщо всі логічні вирази невірні, то виконуються <Команда програми 4>.

5. Зазвичай «логічний вираз», як у операторі if, і у операторі while має такий вид:

Вираз 1 <операція відносини> Вираз 2

Операціями відношення є такі операції (<, <=, >, >=, =, ~ =). Однак, це не обов'язково.

6. Якщо логічний вираз – матриця, то оператор if виконується, якщо всі елементи цієї матриці відмінні від нуля.

Наведемо ще деякі оператори:

$TT2 = \text{lag}(TT1) - TT2 = \text{lag}(TT1)$  зсуває дані в кожній змінній вперед на  $TT1$  у часі на один часовий крок. Зрушення вперед у часі є відставання.

$Y = \text{round}(X)$  –  $Y = \text{round}(X)$  округлює кожен елемент  $X$  до найближчого цілого числа. У випадку, коли елемент має дробову частину 0,5 (в межах помилки округлення) в десятковій дробі, функція round округляє від нуля до найближчого цілого числа з більшою величиною.

## 8.4. Кореляційні функції

Випадковий процес вважається повністю заданим, якщо відомі всі його  $n$ -мірні функції розподілу. Проте експериментальне визначення навіть двовимірних функцій, як і засновані на них розрахунки, виявляються дуже складними і громіздкими. Загальну залежність значень випадкового процесу в деякий час від його значень в інший час можна отримати з допомогою автокореляційної функції.

Широке коло інженерних додатків теорії випадкових процесів і розв'язання цих завдань за допомогою цифрових методів обробки інформації пов'язані з виявленням лінійних залежностей між двома чи більше сукупностями даних [6,11]. Такі лінійні залежності визначаються зазвичай



через кореляційні функції, або їх перетворення Фур'є, звані спектральними щільностями. Кореляційні функції та спектральні щільності в принципі містять однакову інформацію, але історично ці підходи виникли незалежно. У деяких випадках зручніше користуватися кореляційними функціями, але останнім часом в інженерних додатках ширше застосування знаходять спектральні щільності.

Для характеристики стаціонарного випадкового процесу часто використовують автокореляційну функцію (АКФ)

$$K_{xx}(t_1, \tau) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t_1) \cdot u(t_1 + \tau) dt, \quad (8.2)$$

яка характеризує ступінь близькості сусідніх значень випадкового процесу (або процесів), що віддаляються на інтервал  $\tau$  (чим повільніше змінюється випадковий процес, тим менше відрізняються сусідні значення його, що відстають на інтервал  $\tau$ , тобто випадкова функція зменшується повільніше). Обчислення АКФ дозволяє виявляти приховані періодичності випадкових процесів та визначати їх періоди.

Значення АКФ при  $t = 0$  дорівнює дисперсії ВП –  $K_{xx}(0) = D_x$ .

Нормована за дисперсією  $D_x$  АКФ –  $k_{xx}(\tau) = \frac{1}{D_x} K_{xx}(\tau)$ .

Спектральна щільність та автокореляційна функція взаємопов'язані наступними залежностями:

$$K_{uu}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad (8.3)$$

$$S_u(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{uu}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Розглянемо класичне поняття кореляції. Нехай у деякому експерименті отримано дві множини результатів вимірювань  $x_i$  та  $y_i$  при  $i = 1, 2, \dots, N$ . Наприклад, вхідний і вихідний сигнали підсилювача постійного струму:  $x_i$  – вхідна напруга,  $y_i$  – вихідна напруга. В ідеальному випадку проведені вимірювання дають ідеальну лінійну характеристику (рис. 8.2, а).

Тоді одразу можна записати рівняння

$$y = a + bx, \quad (8.4)$$

де  $a$  – значення лінійної функції при  $x = 0$ ;  $b$  – нахил прямої.

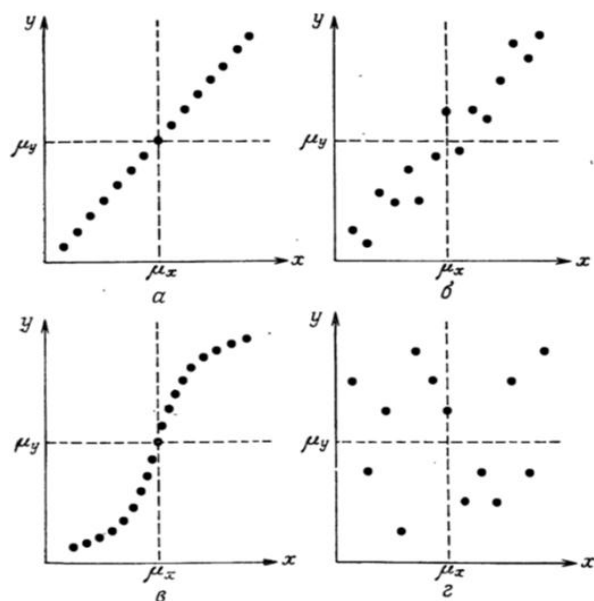


Рис. 8.2. Різні ступені кореляції:  
 а – точна лінійна кореляція; б – помірна лінійна кореляція;  
 в – нелінійна кореляція; г – відсутність кореляції

Однак при більш точних дослідженнях напруги ця залежність може виявитися не зовсім ідеальною прямою. Тоді ми отримуємо результати експериментів, зображені на рис. 8.2, б, де також вгадується лінійний зв'язок між  $x_i$  та  $y_i$ .

Міру лінійності зв'язку між  $x$  та  $y$  можна задавати за допомогою коефіцієнта коваріації

$$\text{cov}(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y). \quad (8.5)$$

У випадку, представленою на рисунку 8.2, б, множники  $(x_i - \mu_x)$  і  $(y_i - \mu_y)$  одночасно або позитивні, або негативні та їх усереднений добуток завжди позитивний. Якщо  $x_i$  та  $y_i$  не пов'язані між собою, як на рисунку 8.2, г, то сума отриманих позитивних добутоків  $(x_i - \mu_x)$  і  $(y_i - \mu_y)$  дорівнює сумі негативних значень цих добутоків і усереднене значення  $\sigma_{xy} = 0$ .

### **Коефіцієнт кореляції**

Співвідношення між  $x$  і  $y$  лінійне, якщо пряма лінія, проведена через центральну частину скупчення точок, дає найбільш відповідну апроксимацію спостережуваного співвідношення. Можна виміряти, як близько знаходяться спостереження до прямої лінії, яка найкраще описує їхнє лінійне співвідношення шляхом обчислення коефіцієнта кореляції Пірсона, що зазвичай називається просто коефіцієнтом кореляції.

Нехай  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_i, y_i)$  – вибірка з  $N$  спостережень змінних  $(x, y)$ . Вибірковий коефіцієнт кореляції визначається як

$$r(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)^2 \sum_{i=1}^N (y_i - \mu_y)^2}}. \quad (8.6)$$

Таким чином, кореляція відображає наскільки спільно змінюються випадкові величини щодо своїх середніх значень. Це дозволяє дізнатися, як поводить одна змінна, залежно від того, як змінюється інша змінна. Тобто коли  $X$  зростає, то як  $Y$  змінюється. Таким чином, кореляція  $r_{xy} > 0$ , коли  $X$  і  $Y$  збільшується або зменшується одночасно – маємо позитивний зв'язок. А коли  $X$  збільшується, а  $Y$  зменшується, або навпаки (маємо негативний зв'язок), то кореляція  $r_{xy} < 0$ .

Якщо додати часове зрушення одного сигналу щодо іншого, то отримаємо взаємну кореляцію

$$r_{x_1, x_2}[j] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] \cdot x_2[n + j] \quad (8.7)$$

Автокореляція описує статистичний зв'язок між послідовностями величин одного ряду, взятими зі зсувом, наприклад, для випадкового процесу – зі зсувом за часом:

$$r_{11}[j] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] \cdot x_1[n + j]. \quad (8.8)$$

### ***Коефіцієнт автокореляції та перевірка його значущості***

Ступінь автокорелюваності процесів вимірюється коефіцієнтом автокореляції, який встановлює кореляційний зв'язок між поточними та минулими спостереженнями часового ряду та розраховується за формулою

$$Corr(x) = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)(x_{i+j} - \mu_y)}{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)^2}. \quad (8.9)$$

де  $j$  – кількість лагів (запізнювань). На рисунку 8.3 показано, як впливає кількість лагів на коефіцієнт автокореляційної функції.

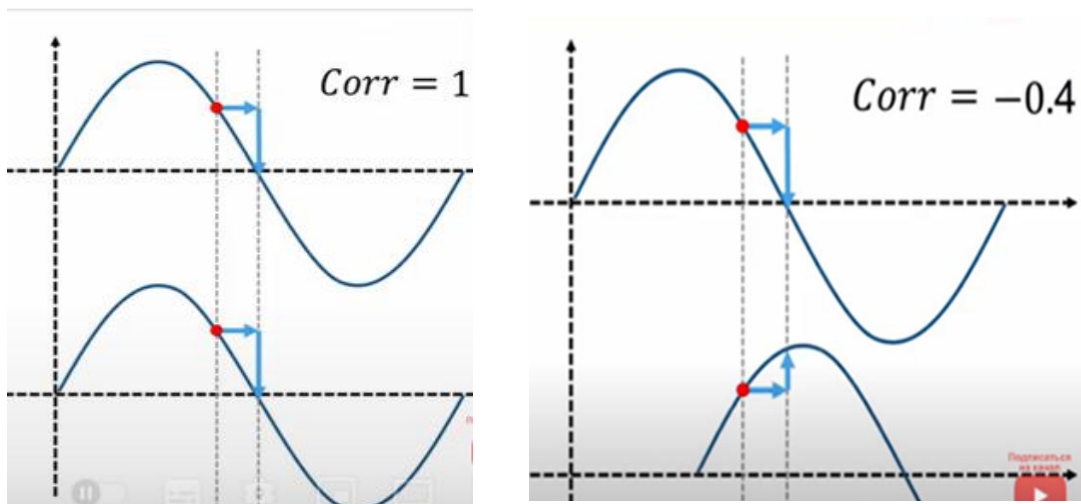


Рис. 8.3. Вплив кількості лагів на коефіцієнт автокореляційної функції

Приклад обчислення коефіцієнтів кореляції у пакеті MatLab

<code>fs=10</code>	Частота дискретизації
<code>ts=0:1/fs:10-1/fs</code>	Діапазон вибірки
<code>N=length(ts)</code>	
<code>rng shuffle</code>	Випадковий генератор
<code>g=round(ts)</code>	
<code>x=2*rand(1,N)+sin(6.28*ts)</code>	Сигнал x
<code>y=3*rand(1,N)+cos(6.28*2*ts)</code>	Сигнал y
<code>subplot(3,1,1)</code>	
<code>plot(x), grid on</code>	
<code>[xc,lags]=xcorr(x)</code>	Автокореляція x
<code>subplot(3,1,2)</code>	
<code>plot(xc)</code>	
<code>subplot(3,1,3)</code>	
<code>W=xcorr(x,y)</code>	Взаємна кореляція x, y
<code>plot(W)</code>	
<code>R = corrcoef(x,y)</code>	Коефіцієнт кореляції x, y
<code>R = 1.0000 - 0.0854</code>	
<code>- 0.0854 1.0000</code>	

Результати розрахунків наведено на рисунках 8.4-8.6.

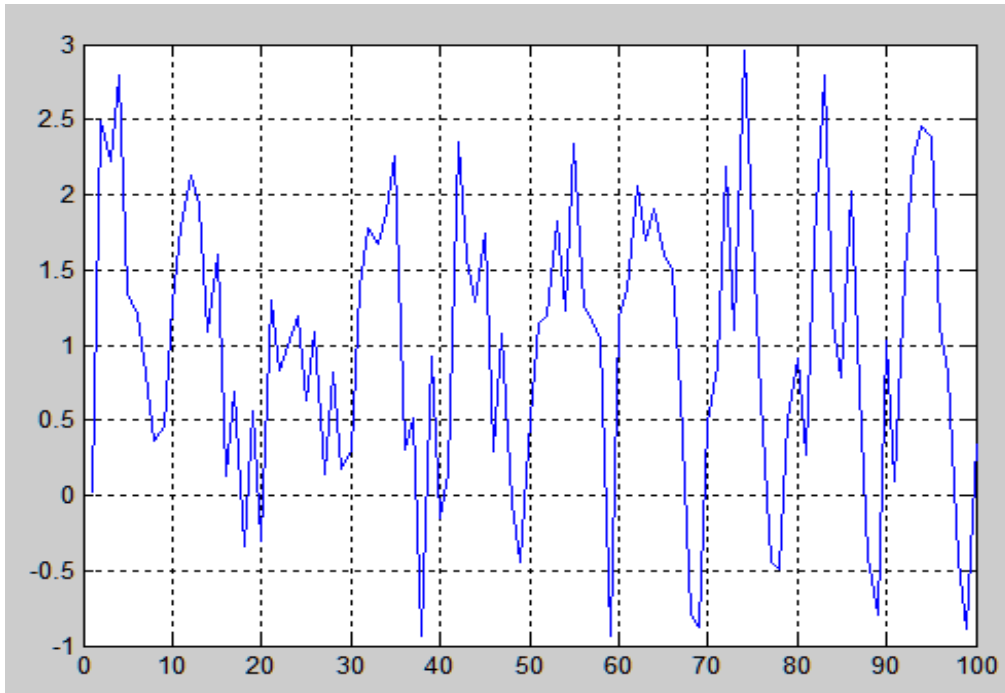


Рис. 8.4. Сигнал  $x$  –  $\text{plot}(x)$

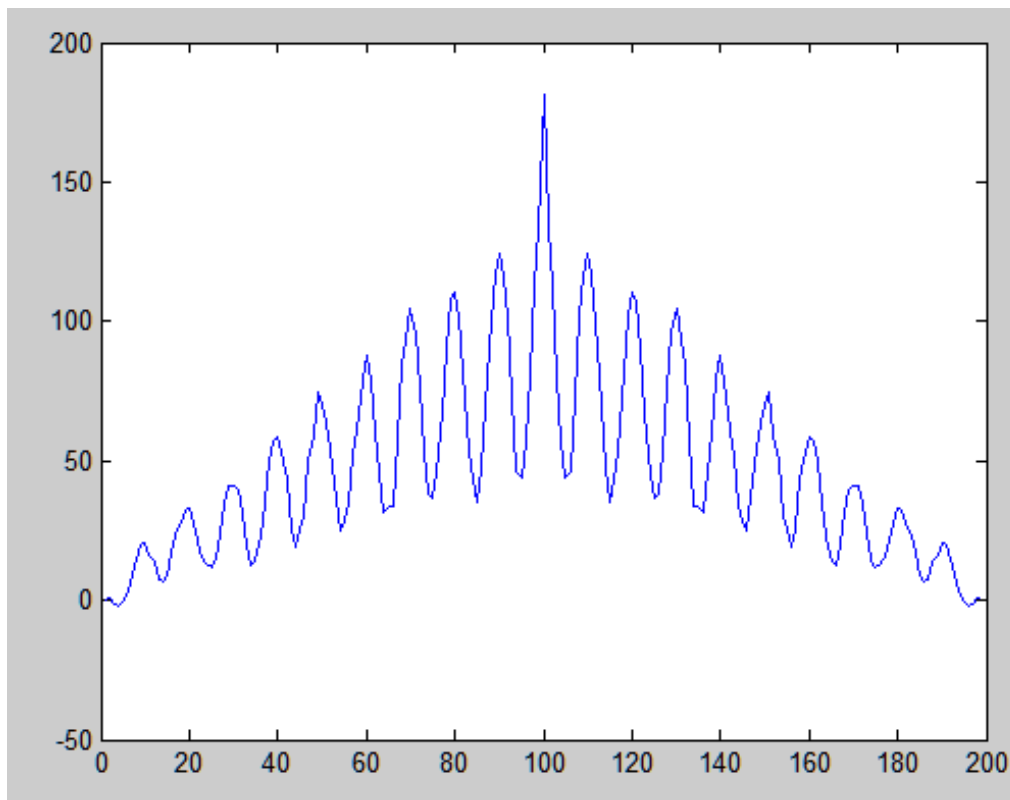


Рис. 8.5. Автокореляція  $x$  –  $\text{plot}(x_c)$

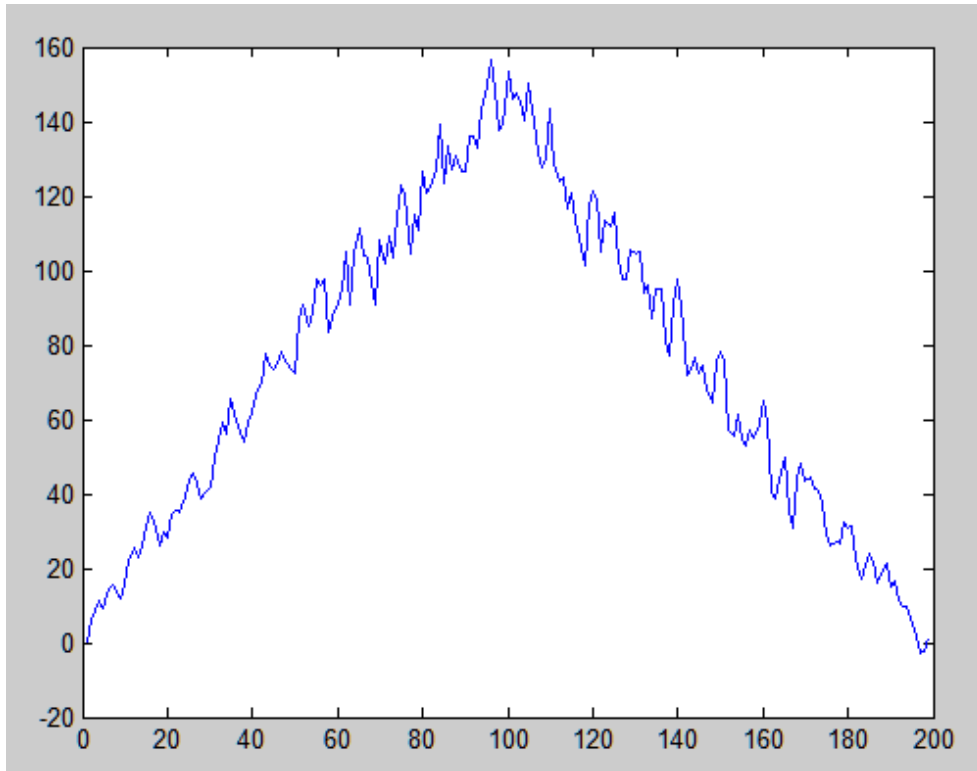


Рис. 8.6. Взаємна кореляція  $x, y$  –  $\text{plot}(W)$

### **8.5. Приклад використання кореляції для визначення місцезнаходження витоку у трубопроводі**

Корелятори – це потужні цифрові пристрої для визначення місця витоку в трубі під тиском, коли шляхом огляду це неможливо, а довжина труби досить велика. Два або більше датчиків розміщують по обидва боки від місця витоку. Ці сенсори записують і передають звук по радіоканалу на пристрій обробки інформації. За допомогою математичних алгоритмів, які розрізняють профілі шумів (наприклад, звук шипіння), розраховується час, за який шум витоку дійшов трубою до першого та другого датчика. Корелюючи різницю часу, пристрій розраховує місце знаходження витоку (рис. 8.7).

Далі наведено приклад програми обробки сигналів датчиків запису шумів течії води у трубі, а на рисунку 8.8 – графіки відповідних сигналів.



Рис. 8.7. Пошук витоків у водопровідній мережі

```
x=load('x.txt')
```

Сигнал датчика x

```
y=load('y.txt')
```

Зрушений за часом сигнал датчика y

```
N=length(x)
```

```
k=1:1:200
```

```
ts=0.01
```

Частота опитування датчиків

```
t=ts*200
```

```
subplot(3,1,1);plot(x)
```

```
subplot(3,1,2);plot(y)
```

```
W=xcorr(y,x)
```

Кореляція сигналів

```
subplot(3,1,3)
```

```
plot(W)
```

```
max(W)
```

```
[U,ind]=max(W)
```

```
L=ind*ts
```

```
U =23.5586
```

```
ind =215
```

```
L=2.1500
```

## Обчислення відстані від витоку до датчика у

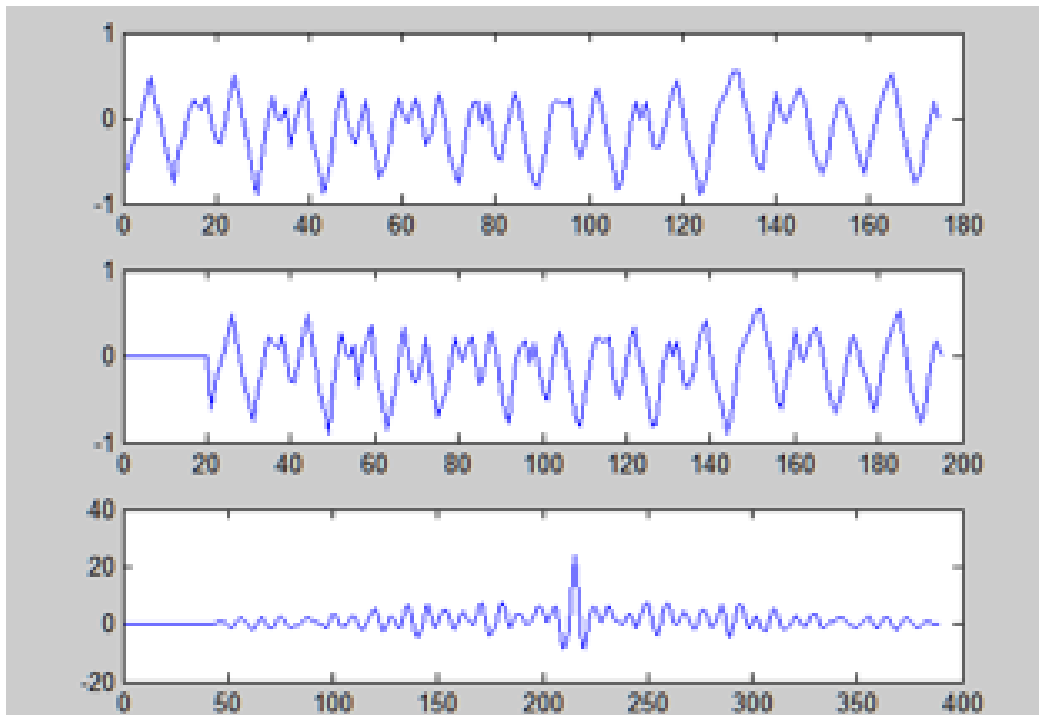


Рис. 8.8. Сигнал  $x$ ; сигнал  $u$ ; кореляція при запізненні сигналу  $u$

Якщо сигнали шуму води з витоку приходять одночасно до обох датчиків, то максимум кореляції знаходиться посередині діапазону –  $N \dots 0 \dots N$ ,  $175 \dots 0 \dots 175$  (рис. 8.9).

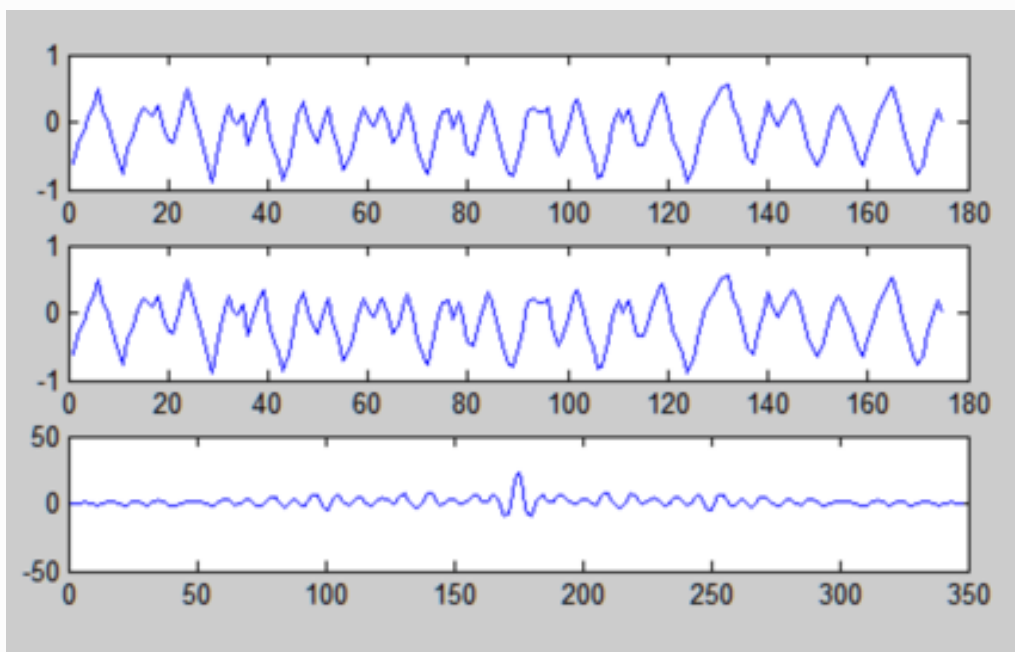


Рис. 8.9. Сигнал  $x$ , сигнал  $u$ , кореляція при положенні витоку посередені між датчиками  $x$  і  $u$



Тоді:  $x=y$ ;  $ind=175$ ;  $L=1.7500$

При цьому відстань до датчиків становить  $L = 1,75$  м.

### Контрольні запитання та завдання

1. Опишіть, що таке вибіркова незміщена дисперсія.
2. Що відноситься до елементарної статистичної обробки даних у масиві ?
3. Перерахуйте основні оператори у Matlab.
4. Що показує автокореляційна функція (АКФ)?
5. Чим вимірюється ступінь автокорельованості процесів?
6. Наведіть приклад використання кореляції у реальному житті?

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Рибальченко М. О., Єгоров О. П., Зворикін В. Б. Цифрова обробка сигналів. навч. посіб. Дніпро : НМетАУ, 2018. 79 с.
2. Котенко А. М., Хлапонін Ю. І. Цифрова обробка сигналів : конспект лекцій для студентів спеціальності 123 «Комп'ютерна інженерія». Київ : КНУБА, 2024. 96 с.
3. Основи цифрової обробки сигналів : навч. посіб. / Самборський І. І., Шолохов С. М., Юрченко О. В., Ніколаєнко Б. А. Київ : ІСЗЗІ КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 171 с.
4. Егоров А. П., Заикин А. А., Котляров В. В. Теория информации и ее применение для исследования систем автоматического управления : учеб. пособ. Днепропетровск : ГИПОмет, 2001. 66 с.
5. Егоров А. П., Малик П. В., Кузьменко М. Ю. Цифровые системы управления и обработки информации : учеб. пособ. Днепропетровск : НМетАУ, 2012. 178 с.
6. Філатова Г. Є. Математичні основи обробки сигналів та зображень: теорія та практика : підручник. Харків : НТУ «ХПІ», 2021. 237 с.
7. Help Center. *MathWorks – Entwickler von MATLAB und Simulink – MATLAB & Simulink*. URL: <https://de.mathworks.com/help/> (date of access: 06.05.2024.).
8. Радиолокационный контроль металлургических процессов : монография / Головки В. И. и др. Днепропетровск : Журфонд, 2010. 428 с.
9. Егоров А. П. Усовершенствование систем автоматического управления многосвязанными электроприводами группы клетей при прокатке с петлерегулированием : дис. ... канд. техн. наук : Днепропетровск, 1981. 145 с.
10. Єгоров О. П., Рибальченко М. О., Маначин І. О. Адаптивна система управління швидкісним режимом вільної прокатки з нечітким регулятором. *Фундаментальні та прикладні проблеми чорної металургії*. 2023. Вип. 37. С. 340-348.
11. Юхимчук С. В., Ваховська Л. М., Захарченко Л. М. Елементи кореляційної теорії випадкових процесів : навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2005. 82 с.

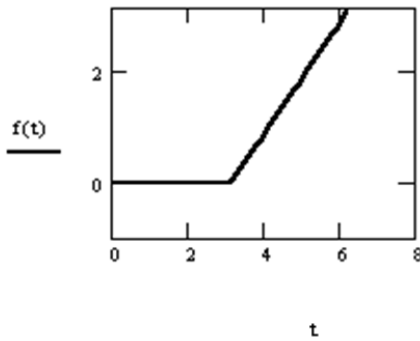
**ВИХІДНІ ДАНІ ДО ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ № 1**  
**«ПРЯМЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ДЕТЕРМІНОВАНОГО СИГНАЛУ»**

Вид функції:

Значення:

$$1. f(t) := \begin{cases} A & \text{if } t \leq \pi \\ tB - \pi & \text{if } t > \pi \end{cases} \quad t := 0, 0.1 \dots 2\pi$$

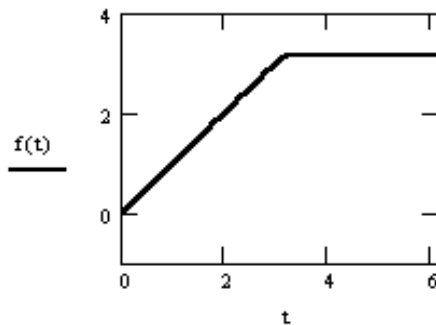
A	0	1	2	1	2	$\pi$
B	1	2	3	1	2	1



Значення:

$$2. f(t) := \begin{cases} tB & \text{if } 0 \leq t \leq \pi \\ \pi + A & \text{if } \pi < t \leq 2\pi \end{cases} \quad t := 0, 0.1 \dots 2\pi$$

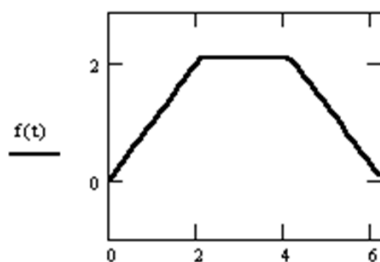
A	-2	-1	0	1	2	$-\pi$
B	1	2	1	3	0.5	1



Значення:

$$5. f(t) := \begin{cases} t & \text{if } 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \cdot A & \text{if } \frac{2\pi}{3} < t \leq \frac{4\pi}{3} \\ -t + 2\pi & \text{if } \frac{4\pi}{3} < t \leq 2\pi \end{cases} \quad t := 0, 0.1 \dots 2\pi$$

A	0.8	1	1.2	0.9	1	1.1
---	-----	---	-----	-----	---	-----

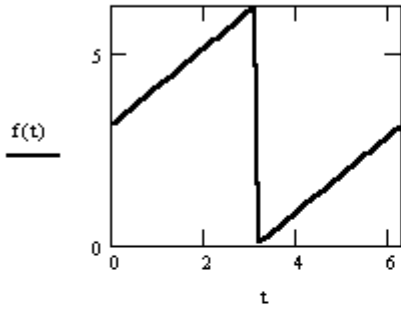


t

$$3. f(t) := \begin{cases} \pi + t \cdot A & \text{if } 0 \leq t \leq \pi \\ -\pi + t \cdot B & \text{if } \pi < t \leq 2 \cdot \pi \end{cases} \quad t := 0, 0.1 \dots 2 \cdot \pi$$

Значення:

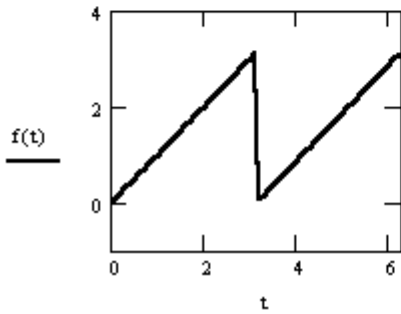
A	0	-1	0	1	1	2
B	2	1	1	2	1	1



Значення:

$$4. f(t) := \begin{cases} t \cdot A & \text{if } 0 \leq t \leq \pi \\ t \cdot B - \pi & \text{if } \pi < t \leq 2 \cdot \pi \end{cases} \quad t := 0, 0.1 \dots 2 \cdot \pi$$

A	0	1	0	0.2	0.5	2
B	1	1	2	2	1	1



Навчальне видання

*Єгоров Олександр Петрович, Рибальченко Марія Олександрівна,  
Михайловський Микола Володимирович, Маначин Іван Олександрович*

**ЦИФРОВА ОБРОБКА СИГНАЛІВ.  
КОМП'ЮТЕРНІ МЕТОДИ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ  
СИГНАЛІВ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ**

Навчальний посібник

Електронне видання

Відповідальний редактор М. О. Рибальченко  
Комп'ютерна верстка М. О. Рибальченко  
Дизайн обкладинки О. Ю. Потап

Експертний висновок склав канд. техн. наук, доц. В. Шибакінський

Зареєстровано НМВ УДУНТ (№ 759 від 07.10.2024)

Формат 60x84<sub>1/16</sub>. Ум. друк. арк. 7,67. Обл.-вид. арк. 4,25.  
Зам. № 86

Видавець: Український державний університет науки і технологій.  
вул. Лазаряна, 2, ауд. 2216, ауд. 263 (наукова бібліотека)  
м. Дніпро, 49010.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 7709 від 14.12.2022

