

УДУНТ

ДНІПРО

Т. М. Бусарова, Т. С. Гришечкіна,
О. В. Звонарьова, Г. І. Семенець

ВИЩА МАТЕМАТИКА. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ НАУКИ І ТЕХНОЛОГІЙ

Т. М. Бусарова, Т. С. Гришечкіна, О. В. Звонарьова, Г. І. Семенець

Вища математика.
Лінійна алгебра. Векторна алгебра.

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ДНІПРО
2025

УДК 512.64(075.8)

В 55

Авторський колектив:

Бусарова Т. М., Гришечкіна Т. С., Звонарьова О. В., Семенець Г. І.

Рекомендовано Радою якості освітньої діяльності УДУНТ

Протокол № 10 від 18 червня 2024 р.

В 55 Вища математика. Лінійна алгебра. Векторна алгебра : навч. посіб. / Т. М. Бусарова, Т. С. Гришечкіна, О. В. Звонарьова, Г. І. Семенець ; Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Електрон. вид. – Дніпро : УДУНТ, 2025. – 136 с.

ISBN 978-617-8314-20-0 (PDF)

Посібник містить основний теоретичний матеріал, велику кількість розв’язаних прикладів (різного ступеня складності), приклади для самостійного розв’язання, варіанти індивідуальних завдань, а також приклади тестових завдань з відповідями.

Для студентів першого курсу всіх спеціальностей.

Іл. 28, Бібліогр. 4 назв.

УДК 512.64(075.8)



Цей твір ліцензовано на умовах Ліцензії Creative Commons

[«Attribution-NonCommercial-ShareAlike» 4.0 International \(CC BY-NC-SA 4.0\)](#)

[\(«Із зазначенням авторства – Некомерційна – Поширення на тих самих умовах» 4.0 Міжнародна\)](#)

ISBN 978-617-8314-20-0 (PDF)
DOI 10.15802/978-617-8314-20-0

© Бусарова Т. М., Гришечкіна Т. С., Звонарьова О. В.,
Семенець Г. І., 2025
© Укр. держ. ун-т науки і технологій, 2025

Зміст

ВСТУП.....	5
1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА. ПОНЯТТЯ МАТРИЦІ. ВИДИ МАТРИЦЬ.....	6
2. ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ.....	8
2.1. Додавання матриць	8
2.2. Множення матриці на число	9
2.3. Добуток двох матриць	9
Розв'язання прикладів	11
Приклади для самостійного розв'язання	13
3. ВИЗНАЧНИКИ	14
3.1. Властивості визначників	15
3.2. Мінори та алгебраїчні доповнення визначника	16
Розв'язання прикладів	19
Приклади для самостійного розв'язання	23
4. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ. МАТРИЧНІ РІВНЯННЯ	24
Розв'язання прикладів	25
Приклади для самостійного розв'язання	27
5. РАНГ МАТРИЦІ	28
5.1. Метод обвідних мінорів	29
5.2. Метод елементарних перетворень	29
Розв'язання прикладів	30
Приклади для самостійного розв'язання	35
6. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ (НЕОДНОРІДНІ)	35
6.1. Розв'язання систем лінійних рівнянь методом Крамера.....	36
Розв'язання прикладів	37
6.2. Розв'язання систем лінійних рівнянь матричним методом	38
Розв'язання прикладів	39
6.3. Розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гаусса. Теорема Кронекера–Капеллі.....	40
Розв'язання прикладів (метод Гаусса)	42
Приклади для самостійного розв'язання	48
7. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ (ОДНОРІДНІ).....	48
Розв'язання прикладів	49
Приклади для самостійного розв'язання	51
8. ФУНДАМЕНТАЛЬНА СИСТЕМА РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОРІДНОЇ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ (ФСР)	51
9. ВЛАСНІ ВЕКТОРИ ТА ВЛАСНІ ЧИСЛА	53
Розв'язання прикладів	54
10. ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ.....	56

10.1. Застосування лінійної алгебри в економічних задачах	56
10.2. Застосування лінійної алгебри в аналізі даних.....	57
Індивідуальні завдання	61
Приклади тестів	78
11. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА	82
11.1. Основні поняття	82
11.2. Лінійні операції над векторами	82
11.3. Лінійно залежні й лінійно незалежні вектори.....	84
11.4. Поняття векторного базису. Розкладання довільного вектора за базисом.....	84
11.5. Проекція вектора на вісь	85
11.6. Прямокутна система координат. Розкладання вектора за базисом. Модуль вектора, проекції вектора	87
11.7. Дії з векторами, які задані своїми проекціями	93
11.8. Напрямні косинуси вектора.....	95
Розв'язання прикладів	97
Приклади для самостійного розв'язання	101
11.9. Скалярний добуток векторів	102
11.9.1. Скалярний добуток векторів у координатній формі	104
11.9.2. Кут між векторами. Умова перпендикулярності двох векторів	104
11.9.3. Фізичний зміст скалярного добутку векторів	105
Розв'язання прикладів.....	106
Приклади для самостійного розв'язання	110
11.10. Векторний добуток векторів	111
11.10.1. Властивості векторного добутку	111
11.10.2. Обчислення векторного добутку	112
11.10.3. Фізичний зміст векторного добутку.....	113
Розв'язання прикладів.....	114
11.11. Мішаний добуток трьох векторів	117
11.11.1. Властивості мішаного добутку	118
11.11.2. Обчислення мішаного добутку векторів.....	118
11.11.3. Геометричний зміст мішаного добутку.....	119
11.11.4. Умова компланарності трьох векторів	120
Розв'язання прикладів.....	122
Приклади для самостійного розв'язання	124
11.12. Застосування векторної алгебри	124
Індивідуальні завдання	125
Приклади тестів.....	131
Список використаних джерел	135

ВСТУП

Мета викладання дисципліни «Вища математика» – допомогти студентам оволодіти знаннями, необхідними для опрацювання математичних моделей, пов'язаних з їхньою подальшою практичною діяльністю. Темі цього посібника є необхідною й важливою частиною курсу лекцій з вищої математики.

Навчальний посібник «Вища математика. Лінійна алгебра. Векторна алгебра» допоможе студентам засвоїти теоретичну частину відповідного розділу математики та методи розв'язання задач.

Відмітимо переваги посібника: з одного боку – невеликий формат, з іншого – містить усе, що потрібно студенту для підготовки до відповідного контрольного заходу.

Кожен розділ посібника починається з теоретичного матеріалу (означення, теореми і формули). Потім розглядається достатня кількість розв'язаних прикладів різного ступеня складності. Крім того, наприкінці тем «Лінійна алгебра», «Векторна алгебра» наведено варіанти індивідуальних завдань і приклади тестів.

Навчальний посібник «Вища математика. Лінійна алгебра. Векторна алгебра» може бути застосований і як доповнення до лекційного матеріалу, і для самостійної роботи студентів.

У результаті опанування матеріалу посібника студенти повинні знати основні поняття та формули і, головне, вміти їх застосовувати під час розв'язання прикладних задач.

1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА. ПОНЯТТЯ МАТРИЦІ. ВИДИ МАТРИЦЬ

Означення. Матрицею A розміру $m \times n$ називають прямокутну **таблицю** чисел (або функцій), яка складається із m рядків і n стовпців.

Матриця A має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{m2}, \dots, a_{mn}$ називаються **елементами** матриці.

Розміщення кожного елемента a_{ij} у матриці визначається двома індексами: i – номер рядка, j – номер стовпця, на перетині яких міститься цей елемент. Наприклад, елемент a_{34} міститься на перетині третього рядка й четвертого стовпця.

Іноді замість круглих дужок матриця позначається так:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ або } A = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|.$$

Матрицю також можна позначати й іншими літерами: B , C і т. д.

Варто мати на увазі, що **матриця** – це **таблиця чисел**, тому, наприклад, вираз $A = 5$ не має змісту.

У скороченому вигляді матрицю можна записати таким чином:

$$A = (a_{ij})_{mn}, \text{ або } A = (a_{ij})_{m \times n}, \text{ або } A = [a_{ij}]_{m \times n}, \text{ або } A = \|a_{ij}\|_{m \times n}.$$

Означення. Дві матриці однакових розмірів з рівними відповідними елементами називають **рівними** між собою.

Означення. Матриця називається **нульовою**, якщо всі її елементи – нулі. Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ – нульова матриця розміру } [2 \times 3].$$

Означення. Матриця, яка складається з одного стовпця, називається **стовпцевою**. Вона має розмір $[m \times 1]$ і такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Означення. Матриця, яка складається з одного рядка, називається **рядковою**. Її розмір $[1 \times n]$, а вигляд:

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \dots \quad a_{1n}).$$

Означення. Якщо замінити в матриці рядки на стовпці так, щоб перший рядок став першим стовпцем, другий рядок – другим стовпцем і т. д., то дістанемо матрицю, яку називають **транспонованою** матрицею й позначають через A^T ,

$$\text{тобто якщо } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Якщо розмір матриці A $[m \times n]$, то розмір матриці A^T $[n \times m]$.

Приклад. Задано матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^T .

Розв'язання.

Матриця A має розмір $[3 \times 2]$, а A^T буде мати розмір $[2 \times 3]$:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Означення. Елемент рядка будемо називати **крайнім**, якщо він не дорівнює нулю, а всі елементи цього рядка, які стоять ліворуч від нього, дорівнюють нулю.

Наприклад, у рядку $(0 \ 0 \ 0 \ 5 \ 0 \ 0 \ 6 \ 9)$ елемент 5 буде крайнім.

Означення. Матриця називається **ступінчатою**, якщо крайній елемент кожного рядка розташований праворуч крайнього елемента попереднього рядка.

$$\text{Наприклад, } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Це означення можна формулювати інакше: матриця ступінчата, якщо крайній елемент кожного рядка розташований ліворуч крайнього елемента наступного рядка.

Означення. Матриця, у якій кількість рядків дорівнює кількості стовпців, називається **квадратною** матрицею.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її **порядком**. Тобто матриця A має порядок n . Елементи $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ утворюють так звану **головну** діагональ, а елементи $a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, a_{n1}$ – **побічну** діагональ.

Наприклад, у матриці третього порядку

$$\begin{matrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{matrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{matrix}$$

побічна діагональ головна діагональ

елементи a_{11}, a_{22}, a_{33} утворюють **головну** діагональ, а елементи a_{13}, a_{22}, a_{31} – **побічну**.

Означення. Якщо у **квадратній** матриці всі елементи, розміщені поза головною діагоналлю, – нулі, то матриця називається **діагональною**.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} - \text{діагональна матриця третього порядку.}$$

Наприклад, матриця $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ – діагональна третього порядку.

Означення. **Діагональна** матриця, у якій усі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, називається **одиничною**. Одинична матриця позначається буквою E .

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{одинична матриця четвертого порядку.}$$

Нагадаємо, що діагональні, а тому й одиничні матриці бувають тільки у квадратних матрицях.

2. ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

2.1. Додавання матриць

Означення. **Сумою** двох матриць **однакових** розмірів називається матриця такого самого розміру, елементи якої дорівнюють сумам відповідних елементів матриць, які додаються. Тобто сумою матриць $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ називається матриця $C = (c_{ij})$ того самого розміру, причому $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, j$.

Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця $C = A + B$ буде дорівнювати

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Властивості операції додавання матриць

Операція додавання підпорядковується переставному закону:

$$A + B = B + A.$$

Крім того, очевидно, що $A + 0 = A$, $0 + A = A$, де 0 – нульова матриця.

Тобто нульова матриця в теорії матриць виконує ту саму роль, що й число

нуль в арифметиці.

Аналогічним чином можна дати означення **різниці** двох матриць.

2.2. Множення матриці на число

Означення. Добутком матриці $A = (a_{ij})$ на число λ ($\lambda \neq 0$) називається матриця $B = (b_{ij})$ того самого розміру, що й A , елементами якої є добутки елементів матриці A на число λ , тобто $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$, $\forall i, j$.

Властивості операції множення матриці на число (λ і μ – числа, $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$):

$$\lambda \cdot (\mu A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A,$$

$$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B,$$

$$(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A.$$

Зауважимо, що коли $\lambda = 0$, то добуток $A \cdot 0$ дорівнює нульовій матриці.

Приклад. Задано матрицю $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю $2A$.

Розв'язання.

$$2A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 & -4 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 0 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.3. Добуток двох матриць

Означення. Дві матриці A і B називаються **узгодженими**, якщо число **стовпців** матриці A (першої матриці) дорівнює числу **рядків** матриці B (другої матриці).

Тобто, для того щоб матриці A і B були узгодженими, вони повинні мати розміри $A = [m \times n]$, $B = [n \times p]$.

Означення. Добутком двох узгоджених матриць A і B називається третя матриця C , кожний елемент c_{ij} якої дорівнює **сумі добутків** елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B .

Наголосимо, що з першої (лівої) матриці A використовують **тільки рядки**, а з другої (правої) матриці B – **тільки стовпці**. Формула знаходження елементів матриці C має вигляд

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj},$$
$$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, p.$$

Якщо розміри матриць A і B відповідно $[m \times n]$ і $[n \times p]$, то розмір матриці $C = A \cdot B$ буде дорівнювати $[m \times p]$.

Увага!

Множити можна тільки узгоджені матриці.

До речі, якщо для матриць A і B виконується рівність $A \cdot B = B \cdot A$, то матриці називають **переставними**.

Властивості операції добутку матриць

Добуток матриць не має переставної властивості, тобто **не завжди** $A \cdot B = B \cdot A$.

Якщо A , B і C – матриці, які можна додавати або множити, а λ – деяке число ($\lambda \neq 0$), то наявні такі рівності:

$$\begin{aligned}\lambda(A \cdot B) &= (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B); \\ A \cdot B \cdot C &= (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C); \\ A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C.\end{aligned}$$

Добуток матриці A на узгоджену з нею одиничну матрицю дорівнює матриці A :

$$A \cdot E = A.$$

Добуток матриці A на узгоджену з нею нульову матрицю дорівнює нульовій матриці:

$$A \cdot 0 = 0.$$

Приклад. Знайти добуток матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Матриця A має розмір $[2 \times 3]$, матриця B має розмір $[3 \times 4]$ (кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B). Отже, A і B – узгоджені матриці. Тоді матриця $C = A \cdot B$ буде мати розмір $[2 \times 4]$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix}.$$

Знайдемо елемент c_{11} . Від матриці A візьмемо перший рядок, а від матриці B – перший стовпець: $(2 \quad 1 \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, тоді $c_{11} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 5 = -2$.

Для того щоб знайти елемент c_{12} , від матриці A візьмемо перший рядок, а від матриці B – другий стовпець: $c_{12} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 5$.

Для того щоб знайти, наприклад, елемент c_{23} , потрібно від матриці A взяти другий рядок, а від матриці B третій стовпець:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & \underline{1} & 4 \\ 0 & 1 & \underline{2} & -2 \\ 5 & 1 & \underline{0} & -1 \end{pmatrix},$$

$$c_{23} = (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 5.$$

Таким чином, після обчислення всіх елементів c_{ij} одержимо матрицю C :

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 & 6 \\ 21 & 5 & 5 & -14 \end{pmatrix}.$$

Питання для самоперевірки

1. Що таке матриця?
2. Які дві матриці можна назвати рівними?
3. Що таке транспонована матриця?
4. Яка матриця називається ступінчатою?
5. Чи може діагональна матриця бути прямокутною?
6. Яка матриця називається одиничною?
7. Які матриці називають узгодженими?
8. Чи можна помножити квадратну матрицю на неквадратну?
9. Як називають матриці A і B , якщо $A \cdot B = B \cdot A$?

Розв'язання прикладів

Розділ I (найпростіші приклади)

Приклад 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти: 1) $3A$; 2) $2A - 4B$; 3) $A + 2B^T$.

Розв'язання.

- 1) $3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$;
- 2) $2A - 4B = 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ -8 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -18 \\ 14 & -18 \end{pmatrix}$;
- 3) Спочатку знаходимо B^T : $B^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Далі знаходимо $A + 2B^T$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -9 \\ 3 & 12 & 0 \end{pmatrix}$. Знайти $A^T - \frac{1}{3}B$.

Розв'язання.

Спочатку знайдемо A^T і $\frac{1}{3}B$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тоді } A^T - \frac{1}{3}B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Знайти добуток матриць:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

Розв'язання.

Перша і друга матриці мають розмірність $[2 \times 2]$, тобто вони узгоджені, і матриця, яку ми одержимо, буде такого самого розміру (другого порядку).

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) & 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 \\ 3 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) & 3 \cdot 4 + (-3) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розділ II

Приклад 1. Знайти добуток матриць:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (4 \quad 1 \quad -2 \quad 1);$$

$$3) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

1) Перша матриця квадратна, має розмірність $[3 \times 3]$ (або третього порядку), друга матриця має розмірність $[3 \times 1]$, тобто вони узгоджені. Матриця, яку ми одержимо, повинна мати розмірність $[3 \times 1]$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) \\ (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2) Розмірність першої матриці $[4 \times 1]$, другої $[1 \times 4]$, вони узгоджені й ми одержимо матрицю розмірністю $[4 \times 4]$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (4 \quad 1 \quad -2 \quad 1) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) & 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 4 & (-1) \cdot 1 & (-1) \cdot (-2) & (-1) \cdot 1 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -4 & 2 \\ -4 & -1 & 2 & -1 \\ 12 & 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

3) Розмірність першої матриці $[3 \times 2]$, другої $[3 \times 3]$. Матриці неузгоджені, тому помножити їх неможливо.

Приклад 2. Знайти значення $f(A)$, якщо $f(x) = x^2 + 2x - 4$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Спочатку обчислимо $f(A)$: $f(A) = A^2 + 2A - 4E$. Тут E – одинична матриця третього порядку.

Знайдемо A^2 :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 12 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Далі визначимо $2A$ і $4E$:

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 8 & 4 & -2 \end{pmatrix};$$

$$4E = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Складові $f(A)$ знайдені, тому перейдемо до заключного етапу розв'язання:

$$f(A) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 12 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 8 & 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 12 & 5 & 6 \\ 12 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Приклади для аудиторної роботи

- Приклад 1.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -0 & 9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Знайти: 1) $(-2)A$;
2) $3A^T + 2B$.

Приклад 2. Знайти добуток матриць:

$$1) \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Чи можна помножити матриці $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 9 \\ -1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$?

Приклад 4. Знайти значення $f(A)$, якщо:

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Приклади для самостійного розв'язання

Приклад 1. $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Знайти: 1) $\frac{1}{4} \cdot A$; 2) $2A^T - 3B$.

Приклад 2. Знайти добуток матриць:

$$1) \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Знайти значення матричного многочлена $f(A)$, якщо

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 3, A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповіді:

Приклад 1. 1) $\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 13 & -9 \\ 11 & -16 \end{pmatrix}$.

Приклад 2. 1) $\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -8 & 20 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 17 & 21 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}$.

Приклад 3. $\begin{pmatrix} 18 & -20 \\ 30 & -2 \end{pmatrix}$ (зауваження: $f(A) = 2A^3 - A^2 + 3E$, де E – одинична матриця другого порядку).

3. ВИЗНАЧНИКИ

З кожною **квадратною** матрицею A n -го порядку пов'язують її числову характеристику, яка називається **визначником**, або **детермінантом**, цієї матриці.

Визначник матриці A позначається так:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Іноді замість $\det A$ пишуть Δ_A або просто Δ .

Зауважимо, що матриця та визначник матриці відрізняються за змістом: **матриця** – це **таблиця** чисел (або функцій), **визначник** – це **число** (або числовий вираз).

Детермінант так само, як і матриця, має порядок. Він дорівнює порядку матриці.

Розглянемо матрицю другого порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Визначник цієї матриці обчислюється за формулою

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Нагадаємо, що елементи a_{11}, a_{22} утворюють **головну** діагональ, а елементи a_{21}, a_{12} – **побічну** діагональ. Тому для того щоб обчислити визначник другого порядку, потрібно від добутку елементів головної діагоналі відняти добуток елементів побічної діагоналі.

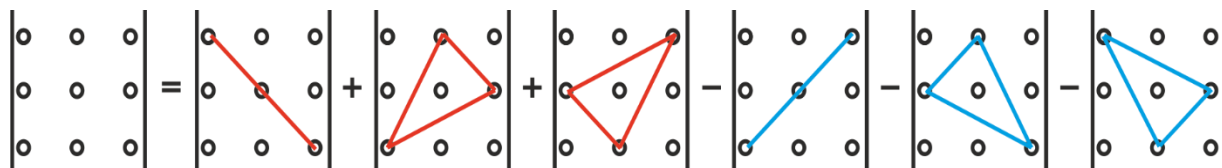
Визначник третього порядку (для відповідної матриці третього порядку) обчислюється за формулою:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

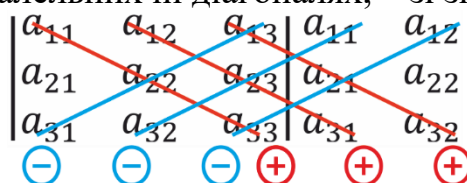
$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} -$$

$$- a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{22} \cdot a_{11}.$$

Формула обчислення на перший погляд складна, тому краще запам'ятати так зване **правило трикутників**:



Крім правила трикутників можна користуватися **правилом приписування стовпців**: до визначника приписують елементи першого і другого стовпців. Добутки елементів, що розміщені на головній діагоналі й на паралельних їй діагоналях, беруться зі знаком «плюс». А добутки елементів, розміщених на побічній діагоналі й на паралельних їй діагоналях, – зі знаком «мінус»:



Приклад. Обчислити визначник за допомогою правила трикутників і правила приписування стовпців:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. За правилом трикутників

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot (-1) - 4 \cdot 5 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 \cdot 3 -$$

$$- 1 \cdot (-2) \cdot 2 = 34.$$

Тепер обчислимо визначник за допомогою правила приписування стовпців.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) \cdot 4 + (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 5 \cdot (-1) -$$

$$- 1 \cdot (-2) \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 1 = 34.$$

Обчислення визначників порядку вище за третій дивись нижче (формула (3.2)).

3.1. Властивості визначників

1. Величина визначника не зміниться, якщо всі його рядки замінити стовпцями, причому кожний рядок замінити стовпцем з тим самим номером.

2. Якщо поміняти місцями два рядки (стовпці), то визначник змінить знак на протилежний.
3. Визначник, який має два однакових рядки (стовпці) дорівнює нулю.
4. Якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника:

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Висновок. Якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) дорівнюють нулю, то й визначник дорівнює нулю (для перевірки цього висновку достатньо розглянути властивість 4 при $\lambda = 0$).

5. Якщо відповідні елементи двох рядків (стовпців) визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю. Цю властивість можна вважати наслідком властивостей 3 і 4.

6. Якщо кожний елемент деякого рядка (стовпця) є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких рядками (стовпцями) є відповідні доданки, а решта збігається із рядками (стовпцями) цього визначника:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

7. Визначник не зміниться, якщо до елементів якого-небудь рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на деяке число.

Дійсно, розглянемо два визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \lambda a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \lambda a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доведемо, що $\Delta_1 = \Delta_2$. Застосуємо для цього спочатку властивість 6, далі властивість 4, а потім властивість 3:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \lambda a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \lambda a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta_1 + \lambda \cdot 0 = \Delta_1. \end{aligned}$$

3.2. Мінори та алгебраїчні доповнення визначника

Розглянемо визначник n -го порядку. Викреслимо в ньому елементи i -го рядка і j -го стовпця. Зауважимо, що на їх перетині міститься елемент a_{ij} .

Означення. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n -го порядку називається визначник $(n-1)$ -го порядку, який складається із **невикреслених** елементів цього визначника.

Наприклад, мінором M_{32} елемента a_{32} визначника третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

буде визначник другого порядку $M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{21}$.

З поняттям мінора M_{ij} пов'язане поняття алгебраїчного доповнення.

Означення. Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} дорівнює мінору M_{ij} того самого елемента, якщо $(i+j)$ – число парне, і $-M_{ij}$, якщо $(i+j)$ – число непарне.

Тобто формулу обчислення алгебраїчного доповнення можна записати таким чином:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Приклад. Обчислити M_{12} , A_{12} , M_{31} , A_{31} , якщо задано визначник третього порядку: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

Для того щоб знайти M_{12} , потрібно у визначнику Δ викреслити перший рядок і другий стовпець, тоді:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-4) - 3 \cdot (-3) = 4 + 9 = 13.$$

Алгебраїчне доповнення A_{12} від мінора M_{12} буде відрізнятися тільки знаком. Дійсно, $i + j = 1 + 2 = 3$ – число непарне, тому $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -13$.

Знайдемо мінор M_{31} . Відразу зауважимо, що $i + j = 3 + 1 = 4$ – парне число, тому $M_{31} = A_{31}$. Викреслимо третій рядок і перший стовпець.

$$M_{31} = A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 5 \cdot 4 = -3 - 20 = -23.$$

Тепер розглянемо ще одну формулу, за допомогою якої можна обчислити визначник третього порядку.

Значення визначника дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

$$\det A = \sum_{i=1}^3 a_{ij} A_{ij}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

Формулу (3.1) називають **розкладанням визначника за елементами рядка (стовпця)**.

Для визначника третього порядку існує шість формул виду (3.1) (три рядки + три стовпці). Наприклад, розкладемо (обчислимо) визначник за елементами другого рядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}.$$

А тепер розкладемо визначник за елементами третього стовпця:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33}.$$

Таким чином, щоб обчислити (розкрити) визначник третього порядку можна використати три правила: правило трикутників, правило приписування стовпців і правило розкладання за елементами якого-небудь рядка (стовпця).

Визначники порядку вище третього можна обчислювати тільки **за правилом розкладання за елементами рядка (стовпця)**:

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Цей метод дає можливість звести обчислення визначника n -го порядку до обчислення n визначників $(n-1)$ -го порядку. Очевидно, що обчислення визначника можна скоротити, якщо розкласти його за елементами рядка (стовпця), у якого деякі елементи дорівнюють нулю.

Розглянемо «метод утворення нулів». Він ґрунтується на використанні властивості 7.

Приклад. Утворити нулі в якому-небудь рядку (стовпці):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Наголосимо, що простіше утворювати нулі в тому рядку (стовпці), де маємо елемент 1 (або -1). Виберемо перший стовпець:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & -3 & -2 \\ \mathbf{3} & 1 & 2 & 1 \\ \mathbf{-2} & 2 & 1 & 3 \\ \mathbf{4} & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

За допомогою властивості 7 утворимо в першому стовпці нулі замість елементів $a_{21} = 3$, $a_{31} = -2$, $a_{41} = 4$. Для цього елементи першого рядка помножимо на -3 і додаємо до відповідних елементів другого рядка:

$$\Delta = (-3) \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & -3 & -2 \\ \mathbf{3} & 1 & 2 & 1 \\ \mathbf{-2} & 2 & 1 & 3 \\ \mathbf{4} & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Результат запишемо в другий рядок (замість заданих елементів другого рядка). Нагадаємо, що значення визначника не зміниться.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ \mathbf{0} & -5 & 11 & 7 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Потім перший рядок помножимо на 2 і додаємо до елементів третього рядка:

$$\Delta = (2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 7 \\ \color{red}{0} & 6 & -5 & -1 \\ 4 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

І нарешті, перший рядок множимо на -4 і додаємо до елементів четвертого рядка:

$$\Delta = (-4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & 11 & 7 \\ 0 & 6 & -5 & -1 \\ \color{red}{0} & -6 & 10 & 13 \end{vmatrix}.$$

У першому стовпці одержали три нулі. Зрозуміло, що розкривати одержаний визначник зручно за першим стовпцем.

Питання для самоперевірки

1. Чим відрізняється поняття матриці від поняття визначника?
2. Чи може матриця розміру $[2 \times 3]$ мати визначник?
3. Як записується формула обчислення визначника третього порядку за правилом трикутників?
4. Що буде з визначником, якщо поміняти місцями два стовпці?
5. Що таке мінор M_{ij} ?
6. Чим відрізняється мінор M_{ij} від алгебраїчного доповнення A_{ij} ?
7. За якими правилами можна обчислити визначники третього порядку?
8. За яким правилом обчислюють визначники, які мають порядок вище третього?

Розв'язання прикладів

Розділ I (найпростіші приклади)

Приклад 1. Обчислити визначник другого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = \cos \varphi \cdot \cos \varphi - \sin \varphi \cdot (-\sin \varphi) = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\begin{vmatrix} x+5 & 2 \\ 2x+1 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} x+5 & 2 \\ 2x+1 & 3 \end{vmatrix} = (x+5) \cdot 3 - 2(2x+1) = 3x + 15 - 4x - 2 = 0;$$

$$-x + 13 = 0;$$

$$x = 13.$$

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\begin{vmatrix} x & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} < 4$. У відповіді вказати найбільше ціле число, яке задовольняє цю нерівність.

Розв'язання.

$$\text{Обчислимо визначник } \begin{vmatrix} x & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 15.$$

А тепер розв'яжемо нерівність:

$$2x - 15 < 4 \Rightarrow 2x < 19 \Rightarrow x < \frac{19}{2}, \text{ або } x < 9,5.$$

Найбільше ціле число, яке задовольняє нерівність: $x = 9$.

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\begin{vmatrix} 3 & 2x \\ -4 & 7 \end{vmatrix} > 1$. У відповіді вказати найменше ціле число, яке задовольняє нерівність.

Розв'язання.

Розкриємо визначник, а потім розв'яжемо нерівність:

$$21 + 8x > 1 \Rightarrow 8x > -20 \Rightarrow x > -2,5.$$

Найменше ціле число: $x = -2$.

Приклад 5. Обчислити визначник за допомогою:

- 1) правила трикутників;
- 2) правила приписування стовпців;
- 3) правила розкладання за елементами рядка (стовпця).

Розв'язання.

$$1) \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 7 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 \cdot 5 - 5 \cdot 2 \cdot 0 - 7 \cdot 4 \cdot 2 - \\ - 3 \cdot (-1) \cdot 1 = 4 + 0 - 20 - 0 - 56 + 3 = -69.$$

$$2) \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 \cdot 5 + \\ + 0 \cdot 3 \cdot 7 - 0 \cdot 2 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \cdot 7 - (-1) \cdot 3 \cdot 1 = -69.$$

- 3) Розкладемо визначник за третім стовпцем (можна за першим рядком), оскільки в цьому стовпці є нуль:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{13} + 4 \cdot A_{23} + 1 \cdot A_{33} = \\ = 4 \cdot (-1)^{2+3} \cdot M_{23} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \\ = (-4) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-4) \cdot [2 \cdot 7 - 5 \cdot (-1)] + 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = \\ = -76 + 4 + 3 = -69.$$

Розділ II

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0$.

Розв'язання.

Скористаємося правилом «трикутників».

$$\begin{aligned}
 2 \cdot 7 \cdot 6 + 0 \cdot (x-3) \cdot 5 + (-1) \cdot (-3) \cdot 3 - 5 \cdot 7 \cdot 3 - (-3) \cdot (x-3) \cdot 2 - \\
 (-1) \cdot 0 \cdot 6 &= 0; \\
 84 + 9 - 105 + 6(x-3) &= 0; \\
 -12 + 6(x-3) &= 0; \\
 6(x-3) &= 12; \\
 x-3 &= 2; \\
 x &= 5.
 \end{aligned}$$

Приклад 2. Користуючись властивостями визначників, обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} b & a^2 + b^2 & 1 \\ c & a^2 + b^2 & 1 \\ d & a^2 + b^2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

Спочатку скористаємося властивістю 6, потім властивістю 4, а потім властивістю 3.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} b & a^2 + b^2 & 1 \\ c & a^2 + b^2 & 1 \\ d & a^2 + b^2 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} b & a^2 & 1 \\ c & a^2 & 1 \\ d & a^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b^2 & 1 \\ c & b^2 & 1 \\ d & b^2 & 1 \end{vmatrix} = \\
 &= a^2 \begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \\ d & 1 & 1 \end{vmatrix} + b^2 \begin{vmatrix} b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \\ d & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.
 \end{aligned}$$

Приклад 3. Довести рівність $\begin{vmatrix} 1-x & 1+x & 2 \\ 2+x & 2-x & 4 \\ 3-x & 3+x & 2 \end{vmatrix} = 4x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

Розв'язання.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1-x & 1+x & 2 \\ 2+x & 2-x & 4 \\ 3-x & 3+x & 2 \end{vmatrix} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Скористаємося} \\ \text{властивістю 4} \end{array} \right\} = 2 \begin{vmatrix} 1-x & 1+x & 1 \\ 2+x & 2-x & 2 \\ 3-x & 3+x & 1 \end{vmatrix} = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{додамо елементи другого стовпця до} \\ \text{відповідних елементів першого} \\ \text{стовпця (властивість 7; } \lambda = 1), \text{ а потім} \\ \text{знов скористаємося властивістю 4} \end{array} \right\} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1+x & 1 \\ 4 & 2-x & 2 \\ 6 & 3+x & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 4 \begin{vmatrix} 1 & 1+x & 1 \\ 2 & 2-x & 2 \\ 3 & 3+x & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Скористаємося властивістю 6,} \\ \text{а потім властивістю 3} \end{array} \right\} = \\
 &= 4 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} + 4 \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & -x & 2 \\ 3 & x & 1 \end{vmatrix} = 4x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Приклад 4. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}.$

Розв'язання.

Цей приклад можна розв'язати двома способами. Перший: вибрати рядок (стовпець), віддаючи перевагу рядку (стовпцю), де є нуль, і розкласти визначник за вибраним рядком (стовпцем). Можна вибрати 1-й, 2-й або 3-й рядки або 1-й, 2-й або 3-й стовпці. Другий спосіб: утворити в якому-небудь рядку (стовпці) найбільше нулів і розкласти визначник за цим рядком (стовпцем). Розглянемо обидва способи.

I спосіб. Розкладемо визначник, наприклад, за третім рядком:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} + \\ + 3 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -4 \end{vmatrix} = \\ 2 \cdot [-6 - 8 - 30 - 16] + [2 - 4 - 2 - 20] - 3 \cdot [-4 - 3 - 15] = -120 - \\ 24 + 66 = -78.$$

II спосіб. Виберемо перший стовпець і утворимо в ньому нулі (за допомогою властивості 7).

$$\begin{aligned} & (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{елементи першого рядка} \\ \text{помножимо на } (-2) \text{ і додамо} \\ \text{до елементів третього рядка} \end{array} \right\} = \\ & (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{елементи першого рядка} \\ \text{помножимо на } (-1) \text{ і додамо} \\ \text{до елементів четвертого рядка} \end{array} \right\} = \\ & = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

А тепер розкладемо визначник за першим стовпцем.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \\ = -18 - 32 - 24 - 4 = -78.$$

Зауважимо, що у II способі, крім першого стовпця, утворювати нулі можна у другому стовпці, в четвертому рядку і т. д.

Приклади для аудиторної роботи

Приклад 1. Обчислити визначники:

$$1) \begin{vmatrix} x & xy \\ 1 & y \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}.$$

Приклад 2. Обчислити визначник за допомогою:

- 1) правила трикутників;
- 2) правила приписування стовпців;
- 3) правила розкладання за елементами рядка (стовпця).

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння і нерівність:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0; 2) \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$$

$$\text{Приклад 4. Обчислити визначник четвертого порядку: } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Приклад 5. Обчислити визначник за допомогою властивостей визначника:

$$\begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 1 \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & 1 \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & 1 \end{vmatrix}.$$

Приклади для самостійного розв'язання

Приклад 1. Обчислити визначники:

$$1) \begin{vmatrix} x^2 & x \\ xy^2 & y^2 \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} \sqrt{x} & -1 \\ x & \sqrt{x} \end{vmatrix}.$$

Приклад 2. Обчислити визначник за допомогою:

- 1) правила трикутників;
- 2) правила приписування стовпців;
- 3) правила розкладання за елементами рядка (стовпця).

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння і нерівність.

$$1) \begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; 2) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1.$$

$$\text{Приклад 4. Обчислити визначник четвертого порядку: } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Приклад 5. Обчислити визначник за допомогою властивостей визначника:

$$\begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & \cos 2\beta \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}.$$

Відповіді:

Приклад 1. 1) 0; 2) $2x$.

Приклад 2. -116.

Приклад 3. 1) $x_1 = 2, x_2 = -10$; 2) $x > 3,5$.

Приклад 4. 52.

Приклад 5. 0.

4. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ. МАТРИЧНІ РІВНЯННЯ

Розглянемо **квадратну** матрицю A .

Означення. Квадратна матриця A називається **невиродженою**, якщо її визначник не дорівнює нулю, тобто $\det A \neq 0$.

Нехай матриця A буде квадратною й невинродженою.

Означення. Матриця A^{-1} називається **оберненою** до матриці A , якщо виконуються рівності:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E. \quad (4.1)$$

Розглянемо **алгоритм знаходження** оберненої матриці:

1. Обчислюємо визначник матриці (він не повинен дорівнювати нулю; якщо $\det A = 0$ – матриця A вироджена й обернену матрицю для неї знайти неможливо).
2. Складаємо матрицю з алгебраїчних доповнень до елементів її визначника.
3. Одержану матрицю транспонуємо, позначаємо $\tilde{A}$ і будемо називати **присднаною (або союзною)**.
4. Обчислюємо обернену матрицю за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}. \quad (4.2)$$

Таким чином, якщо матриця A квадратна й невинроджена, то вона завжди має обернену матрицю.

Зауваження. Для того щоб перевірити відповідь, користуються формулою (4.1). Тобто, множать матрицю A на A^{-1} (або навпаки). Якщо в результаті одержано одиничну матрицю E , то обернена матриця знайдена правильно.

Тепер розглянемо так звані **матричні рівняння**. Почнемо з такого:

$$A \cdot X = B.$$

У цьому рівнянні припускається, що матриці A і X можна множити. X – невідома матриця. Оскільки $X \neq \frac{B}{A}$ (у лінійній алгебрі немає дії ділення матриці на матрицю), то підемо іншим шляхом. Помножимо рівність $A \cdot X = B$ на матрицю A^{-1} (зліва): $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Тоді $A^{-1} \cdot A = E$ і $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$, або $X = A^{-1} \cdot B$.

Аналогічно можна знайти X з рівняння $X \cdot A = B$. Тут множимо рівність на A^{-1} (праворуч): $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$, або $X \cdot E = B \cdot A^{-1}$ і $X = B \cdot A^{-1}$.

Розглянемо ще одне рівняння $A \cdot X \cdot C = B$. Знайдемо X .

Спочатку помножимо рівняння на A^{-1} (ліворуч):

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot C = A^{-1} \cdot B, \text{ або } X \cdot C = A^{-1} \cdot B.$$

Потім множимо рівняння на C^{-1} (праворуч):

$$X \cdot C \cdot C^{-1} = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}, \text{ або } X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}.$$

Нагадуємо, що добуток матриць у загальному вигляді не має переставної властивості, тобто $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Матричне рівняння	Розв'язання
$A \cdot X = B$	$X = A^{-1} \cdot B$
$X \cdot A = B$	$X = B \cdot A^{-1}$
$A \cdot X \cdot C = B$	$X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$

Питання для самоперевірки

1. Яка матриця називається невиродженою?
2. Чи може матриця A розміром $[3 \times 4]$ мати обернену матрицю?
3. Які умови повинна задовольняти матриця A , щоб мати обернену матрицю?
4. Яка матриця називається приєднаною?
5. Як записується алгоритм знаходження оберненої матриці?
6. Як розв'язується матричне рівняння $X \cdot C = A$?

Розв'язання прикладів

Розділ I (найпростіші приклади)

Приклад . Знайти матрицю, обернену матриці A : $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Користуємося сформульованим алгоритмом:

1. Обчислюємо визначник матриці

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 7 = 22 \neq 0.$$

Матриця A невироджена, тому продовжуємо обчислення.

2. Знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів визначника матриці A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 3; A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = 1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -7; A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 5.$$

З алгебраїчних доповнень складаємо матрицю $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Одержану матрицю транспонуємо (нагадуємо, що її називають приєднаною, або союзною):

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Користуємося формулою (4.2):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розділ II

Приклад 1. Знайти матрицю, обернену матриці A : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Користуємося сформульованим алгоритмом:

1. Обчислюємо визначник матриці

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 2 + 4 - 6 - 3 - 12 = 12 \neq 0.$$

Матриця A не вироджена, тому продовжуємо обчислення.

2. Знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів визначника матриці A :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8; & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4; & A_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4; \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5. \end{aligned}$$

З алгебраїчних доповнень складаємо матрицю $\begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ -5 & 7 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Одержану матрицю транспонуємо: $\bar{A} = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Нагадуємо, що матрицю $\bar{A}$ називають приєднаною.

4. Скористаємося формулою (4.2):

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \bar{A} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Зауваження. Матрицю A^{-1} можна залишити в такому вигляді, а можна кожний елемент матриці помножити на число $\frac{1}{12}$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{12} & -\frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{4}{12} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{4}{12} & \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}.$$

Такий вираз є більш громіздким, тому краще записати відповідь у вигляді (4.3). У розглянутому прикладі завжди можна зробити перевірку. Для цього використаємо рівності (4.1). Перевіримо, наприклад, рівність $A \cdot A^{-1} = E$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 8 + 2 \cdot (-4) + 1 \cdot (-4) & 3 \cdot (-5) + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 \\ 2 \cdot 8 + 3 \cdot (-4) + 1 \cdot (-4) & 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 \\ 2 \cdot 8 + 1 \cdot (-4) + 3 \cdot (-4) & 2 \cdot (-5) + 1 \cdot 7 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Розв'язати матричне рівняння $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Маємо рівняння виду $A \cdot X = B$, де $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Тоді X буде дорівнювати $X = A^{-1} \cdot B$.

Тобто, для розв'язання нам потрібно знайти A^{-1} , а потім помножити A^{-1} на B .
Знайдемо A^{-1} .

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-3) = -3; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-1) = -1.$$

Утворимо матрицю з алгебраїчних доповнень і потім транспонуємо її:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю: $A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайдемо шукану матрицю X :

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) \\ 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Приклади для аудиторної роботи

Приклад 1. Знайти матриці, обернені наведеним нижче. Зробити перевірку.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Приклад 2. Розв'язати матричні рівняння.

1) $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Приклади для самостійного розв'язання

Приклад 1. Знайти матриці, обернені наведеним нижче. Зробити перевірку.

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Розв'язати матричні рівняння.

$$1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Відповіді:

Приклад 1. 1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Приклад 2. 1) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$; 2) $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$

5. РАНГ МАТРИЦІ

У розділі 3 було розглянуто поняття мінора M_{ij} елемента a_{ij} визначника n -го порядку. Але поняття мінора можна ввести й для матриці.

Означення . Мінором k -го порядку M_k матриці A називається визначник, утворений з елементів матриці, які розташовані на перетині деяких k рядків і k стовпців.

Якщо розмір матриці $[m \times n]$, то k не перевищує меншого із чисел m і n .

Наприклад, у матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ можна вказати такі мінори:

- першого порядку: усі елементи матриці;
- другого порядку: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ і т.д.;
- третього порядку: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ і т.д.

Означення. Рангом матриці A називається найбільший із порядків її мінорів, що не дорівнюють нулю.

Тобто, якщо матриця A має відмінний від нуля мінор (визначник) порядку r , а всі мінори вищого порядку (якщо вони є) дорівнюють нулю, то число r називається рангом матриці A .

Ранг матриці A позначається таким чином: $r(A)$, або $\text{rang} A$, або $\text{Rg} A$, або r .

Ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ дорівнює 1, $r(A) = 1$, тому що всі мінори другого порядку дорівнюють нулю.

Ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ дорівнює 2, оскільки існує мінор другого порядку $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -5$, який не дорівнює нулю, а мінорів третього порядку в матриці A немає.

Ранг нульової матриці за означенням вважають рівним нулю. Для визначення рангу матриці використовують:

- 1) метод обвідних мінорів;
- 2) метод елементарних перетворень.

5.1. Метод обвідних мінорів

Суть цього методу така:

1. Знаходимо який-небудь мінор M_1 першого порядку (тобто елемент матриці), відмінний від нуля. Якщо такого мінора немає, то $r(A) = 0$ (матриця A – нульова).
2. Обчислюємо мінори другого порядку, які містять M_1 (обводять M_1) доти, поки не знайдеться мінор M_2 , відмінний від нуля. Якщо такого мінора немає, то $r(A) = 1$, якщо є, то $r(A) \geq 2$ і т. д.
.....
- k. Обчислюємо мінори k -го порядку, які обводять мінор $M_{k-1} \neq 0$ (якщо вони існують). Якщо таких мінорів немає або вони всі дорівнюють нулю, то $r(A) = k - 1$; якщо хоча б один мінор $M_k \neq 0$, то $r(A) \geq k$ і т. д.

За такого способу знаходження рангу матриці достатньо на кожному кроці знайти всього один ненульовий мінор k -го порядку, причому шукати його потрібно тільки серед мінорів, які обводять мінор $M_{k-1} \neq 0$.

5.2. Метод елементарних перетворень

До елементарних перетворень належать такі операції над матрицею:

- 1) переставлення двох рядків (стовпців);
- 2) множення елементів рядка (стовпця) на число, відмінне від нуля;
- 3) додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), попередньо помножених на деяке число (яке не дорівнює нулю).

Матриці, які ми одержуємо за допомогою елементарних перетворень, називаються **еквівалентними** й позначаються знаком $\sim$.

Справедливі такі теореми.

Теорема 1. Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.

Теорема 2. Ранг ступінчатої матриці дорівнює кількості її ненульових рядків.

Ненульовий рядок – це рядок, який містить хоча б один елемент, який не дорівнює нулю.

Зауважимо, що ранг матриці не зміниться, якщо її транспонувати.

Означення. Ранг матриці дорівнює рангу ступінчатої матриці, яка одержана із цієї матриці за допомогою елементарних перетворень.

Метод елементарних перетворень знаходження рангу матриці має таку суть:

1. Матрицю A за допомогою елементарних перетворень зводимо до

ступінчатого вигляду.

2. Підраховуємо число ненульових рядків одержаної ступінчатої матриці. Це число й буде рангом цієї матриці A .

Зауваження. Якщо після застосування елементарних перетворень будуть з'являтися однакові рядки (стовпці), то будемо залишати тільки один, а решту викреслимо.

Питання для самоперевірки

1. Що називається мінором k -го порядку матриці?
2. Сформулюйте два означення рангу матриці.
3. Які методи використовуються для обчислення рангу матриці?
4. Які перетворення над матрицею називають елементарними?
5. Чому дорівнює ранг ступінчатої матриці?
6. Чи зміниться ранг матриці, якщо її транспонувати?
7. Чи може ранг матриці дорівнювати нулю? Бути менше нуля? Дорівнювати 4,5?

Розв'язання прикладів

Розділ I (найпростіші приклади)

Приклад 1. Знайти ранг матриці за допомогою елементарних перетворень.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Зручно, щоб елемент a_{11} дорівнював одиниці (або -1). У цьому випадку це неважко зробити: достатньо вжити **елементарне перетворення 1**: переставити перший і другий рядки (ранг одержаної матриці не зміниться).

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тепер утворимо ступінчатую матрицю, тобто таку матрицю, у якій **всі** елементи, які розташовані **нижче діагоналі**, будуть дорівнювати нулю. Утворювати нулі ми будемо за допомогою **елементарного перетворення 3**:

1. Помножимо елементи першого рядка на 3 і додамо одержані числа до відповідних елементів другого рядка (результат запишемо в другий рядок):

$$3 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 6 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Помножимо елементи першого рядка на 4 і додамо одержані числа до відповідних елементів третього рядка (результат запишемо в третій рядок):

$$4 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 6 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 6 \\ 0 & 9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, ми одержали нулі в першому стовпці нижче діагоналі. Надалі рекомендуємо ці дві операції об'єднувати в одну:

$$3 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim 4 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 6 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 6 \\ 0 & 9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Далі є два варіанти одержання ступінчатої матриці. Тут ми розглянемо один з них (на нашу думку, він більше підходить у цьому прикладі). Для цього застосуємо **елементарне перетворення 2**:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{помножимо елементи} \\ \text{другого, третього і четвертого рядків} \\ \text{на відповідні числа:} \\ \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{9}, \quad (-1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{9} \\ (-1) \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 6 \\ 0 & 9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ми бачимо в матриці три однакових рядки, два з яких можна відкинути. Одержимо ступінчасту матрицю:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Її ранг, а тому і ранг матриці A , дорівнює 2, тобто $r(A) = 2$.

Приклад 2. Знайти ранг матриці за допомогою елементарних перетворень.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Як і в попередньому прикладі, за допомогою методу елементарних перетворень утворимо з матриці A ступінчасту матрицю. Зручно, щоб елемент a_{11} дорівнював одиниці: переставимо перший і третій рядки.

Нагадаємо, що в ступінчастій матриці елементи, які розташовані нижче головної діагоналі, повинні дорівнювати нулю. Порядок «утворення нулів»:

спочатку в першому стовпці, потім у другому.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Елементи першого рядка множимо на (-4) і додаємо до відповідних елементів другого рядка (результат записуємо в другий рядок). Потім елементи першого

рядка помножимо на (-3) і додаємо їх до елементів третього рядка (результат записуємо в третій рядок).

$$(-4) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim (-3) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -15 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -15 & 3 \\ 0 & -10 & 2 \end{pmatrix}$$

Тепер потрібно зробити так, щоб елемент a_{32} дорівнював нулю. Для цього елементи другого рядка помножимо на $(-\frac{1}{3})$, а третього – на $\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -15 & 3 \\ 0 & -10 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1/3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -10 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1/2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Тепер елементи другого рядка додаємо до елементів третього рядка й результат запишемо в третій рядок:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким чином, матриця A стає ступінчатою за допомогою елементарних перетворень. Кількість ненульових рядків у ступінчатій матриці дорівнює 2. За теоремою 2 ранг ступінчатої, а тому й ранг матриці A дорівнює 2, тобто $r(A) = 2$.

Зауваження. Закінчити розв'язання цього прикладу можна інакше. Якщо другий рядок помножити на $\frac{1}{3}$, третій на $\frac{1}{2}$, то ми одержимо два однакових рядки, один з яких можна й потрібно прибрати.

Розділ II

Приклад 1. Знайти ранг матриці методом обвідних мінорів.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Нагадаємо, що, обчислюючи ранг матриці потрібно переходити від мінорів менших порядків до мінорів вищих порядків. Якщо вже знайдено мінор k -го порядку, який не дорівнює нулю, то далі потрібно обчислювати лише мінори $(k+1)$ -го порядку, що обводять цей мінор. Якщо всі вони дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k .

Вибираємо, наприклад, мінор першого порядку: $M_1 = a_{11} = 1 \neq 0$. Розглянемо мінор другого порядку, що обводить мінор M_1 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -9$$

Тепер переходимо до обчислення мінорів 3-го порядку, які обводять мінор

другого порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 10 - 12 + 1 + 32 - 15 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -6 \\ 1 & -3 & -7 \end{vmatrix} = 7 - 12 - 36 + 3 - 18 + 56 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 20 + 4 + 2 + 5 + 8 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -6 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 24 + 12 + 6 + 6 - 0 = 0$$

Усі чотири мінори, які обводять мінор другого порядку, дорівнюють нулю. Наголосимо, що мінор четвертого порядку обчислювати не потрібно, тому що він теж буде дорівнювати нулю.

Отже, $r(A) = 2$.

Приклад 2. Знайти ранг матриці за допомогою елементарних перетворень.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Перетворимо матрицю A на ступінчасту. Нагадаємо порядок перетворення: спочатку «утворюємо нулі» в першому стовпці, потім «утворюємо нулі» в другому стовпці й т. д.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-3)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim 5 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Одержимо ступінчасту матрицю, яка має три ненульових рядки. Тому ранг цієї матриці, а отже, і ранг матриці A дорівнює 3: $r(A) = 3$.

Зауваження. Останню дію в прикладі можна було б не виконувати. Дійсно, якщо матриця має n однакових рядків, то $(n-1)$ рядок можна відкинути. У нашому випадку одержимо два однакових рядки, один з яких можна відкинути.

Зауважимо, що надалі потрібно обирати метод знаходження рангу матриці залежно від її виду.

Наприклад, потрібно знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ або матриці $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 4 \\ 5 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Ясно, що існує (і не один) мінор другого порядку, який не дорівнює нулю. А мінорів більше другого порядку в матриці A немає. Тому $r(A) = 2$. Аналогічно $r(B) = 2$.

І, нарешті, розглянемо приклад, де ранг знаходиться за допомогою елементарних перетворень, які ми будемо застосовувати до стовпців.

Приклад 3. Знайти ранг матриці за допомогою елементарних перетворень (будемо їх застосовувати до стовпців).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 6 \\ -3 & -6 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Додамо до елементів другого стовпця відповідні елементи першого стовпця, помножені на (-2) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -4 & 6 \\ -3 & -6 & 6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ -3 & 0 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Тепер до елементів третього стовпця додамо відповідні елементи першого стовпця, помноживши їх на 2, а до елементів 4-го стовпця – відповідні елементи першого стовпця, помноживши їх на (-3) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ -3 & 0 & 6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тепер ми бачимо, що ранг останньої матриці дорівнює 1, тому що всі визначники другого й третього порядку дорівнюють нулю.

Приклади для аудиторної роботи

Приклад. Знайти ранги матриць (за допомогою методу елементарних перетворень):

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -5 \\ 4 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \\ 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 12 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix};$$

$$5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 5 & 6 & 32 \end{pmatrix}.$$

Приклади для самостійного розв'язання

Приклад. Знайти ранги матриць (за допомогою методу елементарних перетворень):

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -7 \\ 2 & 6 & 8 & 14 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 11 \end{pmatrix};$$

$$4) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$5) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}; 6) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: 1) $r = 1$; 2) $r = 2$; 3) $r = 2$; 4) $r = 3$; 5) $r = 3$; 6) $r = 4$.

6. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ (НЕОДНОРІДНІ)

Нехай задано систему m лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (6.1)$$

де числа a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$) називають коефіцієнтами системи, а числа $b_1, b_2, \dots, b_m$ – вільними членами. Якщо $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ - система (6.1) називається **однорідною** (у протилежному випадку її називають **неоднорідною**). У цьому параграфі розглянемо неоднорідні системи.

Означення. Розв'язком системи (6.1) називається така сукупність чисел $(c_1, c_2, \dots, c_n)$, коли при заміні x_1 на c_1 , x_2 на c_2 і т. д. кожне рівняння перетворюється на тотожність.

Якщо система має хоча б один розв'язок – вона називається **сумісною**. Система, яка не має жодного розв'язку, називається **несумісною**. Сумісна система називається **визначеною**, якщо вона має один розв'язок, і

невизначеною, якщо вона має нескінченну кількість розв'язків.

Потрібно запам'ятати, що система (якщо вона сумісна) може мати або один розв'язок, або нескінченну кількість розв'язків.

Означення. Дві сумісні системи лінійних рівнянь з однаковою кількістю невідомих називаються **рівносильними (еквівалентними)**, якщо вони мають однакові розв'язки.

Систему (6.1) можна записати в матричній формі:

$$A \cdot X = B,$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матриця системи,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець, складена з невідомих системи,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець, складена з вільних членів системи.

Питання для самоперевірки

1. Що таке розв'язок системи лінійних рівнянь?
2. Яка система називається сумісною (несумісною)?
3. Яка система є сумісною визначеною (сумісною невизначеною)?
4. Чи може система мати два розв'язки?
5. Які системи називають еквівалентними (рівносильними)?
6. Як записати систему (6.1) в матричному вигляді?
7. Що таке матриця системи A ?

Далі ми розглянемо три методи розв'язання системи (6.1): метод Крамера, матричний метод і метод Гаусса.

6.1. Розв'язання систем лінійних рівнянь методом Крамера

Цим методом можна розв'язувати системи n лінійних рівнянь з n невідомими. Для спрощення, розглянемо систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (6.2)$$

Введемо такі позначення:

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ – визначник, складений із коефіцієнтів при невідомих.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \text{визначник, який ми одержали з визначника } \Delta$$

заміною першого стовпця на стовпець вільних членів.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} - \text{заміна другого стовпця на стовпець вільних членів.}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} - \text{заміна третього стовпця на стовпець вільних членів.}$$

Невідомі x_1, x_2, x_3 , знаходять за так званими **формулами Крамера**:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Записані формули використовуються для систем трьох рівнянь з трьома невідомими (систем виду (6.2)). Якщо ж система складається з двох рівнянь з двома невідомими, то формули Крамера будуть мати вигляд

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Якщо система має більше трьох невідомих, то розв'язувати її за допомогою формул Крамера недоцільно (наприклад, при $n = 4$ потрібно обчислити п'ять визначників четвертого порядку).

Зауваження. Методом Крамера доцільно розв'язувати системи лінійних рівнянь, які задовольняють три умови:

- 1) система повинна бути неоднорідною;
- 2) кількість рівнянь повинна дорівнювати кількості невідомих;
- 3) визначник Δ не повинен дорівнювати нулю.

Питання для самоперевірки

1. Чи можна розв'язати систему трьох рівнянь з чотирма невідомими методом Крамера?
2. Який вигляд мають формули Крамера для системи трьох рівнянь з трьома невідомими?
3. Яким умовам повинна задовольняти система лінійних рівнянь, щоб її можна було розв'язати методом Крамера?

Розв'язання прикладів

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1; \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

Розв'язання.

Система неоднорідна; кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих. Перевіримо третю умову – знайдемо Δ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 - 1 + 3 - 4 - 0 = 0.$$

Система не може бути розв'язана методом Крамера. Але це ще не означає, що система несумісна. Просто цю систему потрібно розв'язувати іншим методом. Цей метод ми розглянемо в розділі 6.3.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -8; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -3; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Розв'язання.

Перші дві умови виконуються. Знайдемо Δ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 4 + 2 - 6 - 3 - 12 = 12 \neq 0.$$

Визначник $\Delta \neq 0$, тому систему можна розв'язати методом Крамера. Обчислимо визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -8 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -72 - 2 - 3 + 3 + 8 + 18 = -48.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -8 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -27 - 16 - 2 + 6 + 3 + 48 = 12.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -8 \\ 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9 - 12 - 16 + 48 + 9 + 4 = 24.$$

Тепер застосуємо формули Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-48}{12} = -4; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{12}{12} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{24}{12} = 2.$$

Перевірка: $3 \cdot (-4) + 2 \cdot 1 + 2 = -8$; $2 \cdot (-4) + 3 \cdot 1 + 2 = -3$;

$2 \cdot (-4) + 1 + 3 \cdot 2 = -1$.

6.2. Розв'язання систем лінійних рівнянь матричним методом

Цим методом можна розв'язувати системи n лінійних рівнянь з n невідомими. Далі (для спрощення) розглянемо систему (6.2).

Запишемо її в матричному вигляді:

$$A \cdot X = B, \tag{6.3}$$

де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матриця, складена з коефіцієнтів при невідомих системи (6.2), розміром $[3 \times 3]$.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець з невідомих – матриця розміром $[3 \times 1]$.

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець вільних членів – матриця розміром $[3 \times 1]$.

Знайдемо X з рівняння (6.3). Нагадаємо послідовність дій. Для цього помножимо рівняння (6.3) на A^{-1} зліва:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B, \text{ або } E \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B, \text{ або} \\ X = A^{-1} \cdot B. \quad (6.4)$$

Тобто зміст матричного методу полягає в тому, що (див.(6.4)) спочатку знаходиться обернена матриця A^{-1} , а потім обчислюється добуток матриці A^{-1} на стовпець вільних членів B . Зауважимо, що матриці A^{-1} і B можна перемножати, оскільки вони узгоджені.

Зауваження. Матричним методом доцільно розв'язувати системи лінійних рівнянь, які задовольняють три умови:

- 1) система повинна бути неоднорідною;
- 2) кількість рівнянь повинна дорівнювати кількості невідомих;
- 3) визначник Δ не повинен дорівнювати нулю.

Питання для самоперевірки

1. Як записується система n лінійних рівнянь з n невідомими в матричній формі?
2. Що таке матриці X , B ? Чому дорівнює розмірність цих матриць?
3. Як розв'язати матричне рівняння $A \cdot X = B$? Тобто, як знайти X ?

Розв'язання прикладів

Приклад. Розв'язати систему рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5; \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Система неоднорідна, кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих.

Знайдемо Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 0 - 6 - 3 - 9 - 0 = -12 \neq 0.$$

Система може бути розв'язана матричним методом. Спочатку знайдемо A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці A ми вже обчислили: $\Delta_A = -12$. Тепер знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці A :

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3; & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5; & A_{13} &= \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3; \\
A_{21} &= -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3; \\
A_{31} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -9; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3.
\end{aligned}$$

Утворимо матрицю з алгебраїчних доповнень і транспонуємо її. Одержимо приєднану матрицю $\bar{A}$:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -9 \\ -5 & 1 & 7 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \cdot \bar{A} = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & -9 \\ -5 & 1 & 7 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

І, нарешті, за формулою (6.4) знайдемо X :

$$\begin{aligned}
X &= A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & -9 \\ -5 & 1 & 7 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12} \cdot \\
&\begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & (-3) \cdot (-5) & (-9) \cdot 0 \\ (-5) \cdot 1 & 1 \cdot (-5) & 7 \cdot 0 \\ (-3) \cdot 1 & 3 \cdot (-5) & (-3) \cdot 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -10 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \text{ тобто}
\end{aligned}$$

$$x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = \frac{5}{6}, x_3 = \frac{3}{2}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Перевірка: } 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 3 \cdot \frac{5}{6} + \frac{3}{2} &= 1, \quad 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 3 \cdot \frac{5}{6} - 2 \cdot \frac{3}{2} = -5, \\
-\frac{3}{2} + \frac{3}{2} &= 0.
\end{aligned}$$

6.3. Розв'язання систем лінійних рівнянь методом Гаусса. Теорема Кронекера–Капеллі

Розглянемо метод, за допомогою якого можна розв'язати будь-яку систему (або довести її несумісність).

Розглянемо загальний випадок, коли кількість невідомих дорівнює n , а кількість рівнянь дорівнює m ; крім того, умова, що $\Delta \neq 0$, відкидається. Залишається одна умова: система рівнянь повинна бути неоднорідною. Отже, знову розглянемо систему (6.1). Нагадаємо, що матриця A – це матриця системи, яка складається з коефіцієнтів при невідомих.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Через B/A позначимо матрицю, яку отримують з матриці A приєднанням

стовпця вільних членів:

$$B/A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{pmatrix}.$$

Матрицю B/A називають **розширеною матрицею** системи (6.1).

Теорема (Кронекера-Капеллі). Система (6.1) сумісна тоді й тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи, тобто $r(A) = r(B/A)$.

Висновки: 1. Якщо $r(A) = r(B/A) = r = n$ (де n – кількість невідомих), то система сумісна й має один розв'язок.

2. Якщо $r(A) = r(B/A) = r < n$, то система сумісна й має нескінченну кількість розв'язків.

Зауважимо, що коли $r(A) \neq r(B/A)$, то система (6.1) несумісна (розв'язків не має).

Очевидно, що зручніше, перш ніж розв'язувати систему (особливо, коли $m \neq n$), дослідити її на сумісність за допомогою теореми Кронекера-Капеллі, а потім вже, у разі сумісності, знайти розв'язок цієї системи.

Для дослідження систем лінійних рівнянь і знаходження їх розв'язків (у разі сумісності системи) будемо використовувати **метод Гаусса**.

1. Розв'язання починаємо із з'ясування питання про сумісність системи.

Для цього знаходимо $r(A)$ і $r(B/A)$ і порівнюємо їх (ранги доцільно знаходити шляхом зведення матриць до ступінчатого вигляду):

– якщо $r(A) \neq r(B/A)$, то **система несумісна** (розв'язання закінчено).

Цей варіант відповідає випадку, коли в деякому рядку матриці B/A всі елементи, крім останнього, дорівнюють нулю;

– якщо $r(A) = r(B/A)$ система сумісна й розв'язання продовжуємо.

2. Якщо $r(A) = r(B/A) = r = n$ система має **єдиний розв'язок** (у цьому випадку матриця A має трикутний вигляд).

Повертаємося до системи, яка відповідає ступінчатій матриці B/A , і з **останнього** рівняння знаходимо x_n . Потім, підставляючи його значення в **передостаннє** рівняння, знаходимо x_{n-1} . Аналогічно знаходимо $x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_2, x_1$.

3. Якщо $r(A) = r(B/A) = r < n$, то система має **нескінченну кількість розв'язків** (у цьому випадку матриця A має трапецієподібний вигляд). Продовжуємо розв'язання таким чином:

невідомі $x_1, x_2, \dots, x_n$ розділяємо на дві групи. r невідомих називаємо **базисними**, а останні $(n - r)$ – **вільними** невідомими.

Як визначити, які невідомі назвати базисними, а які – вільними? Взагалі це не має значення. Зазвичай перші r невідомих, тобто $x_1, x_2, \dots, x_r$, називають **базисними**, а останні $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ – **вільними**. Але наголосимо, що

визначник, складений із коефіцієнтів при базисних невідомих, **не повинен** дорівнювати нулю. Якщо він все ж дорівнює нулю, то можна, наприклад, поміняти місцями x_r і x_{r+1} , тобто x_r рахувати вільною, а x_{r+1} – базисною невідомою.

Після цього повертаємося до системи, яка відповідає ступінчатій матриці B/A , і записуємо її таким чином, щоб базисні невідомі (разом зі своїми коефіцієнтами) залишилися **ліворуч**, а вільні невідомі (зі своїми коефіцієнтами) переносимо в рівняннях **праворуч**.

Далі, починаючи з **останнього рівняння**, виражаємо **базисну** невідому (вона повинна бути в цьому рівнянні одна) через **вільні** невідомі. Потім з **передостаннього** рівняння виражаємо наступну базисну невідому через вільні невідомі й т. д.

Питання для самоперевірки

1. Яка матриця називається розширеною матрицею системи лінійних рівнянь?
2. Як формулюється теорема Кронекера–Капеллі?
3. У якому випадку система лінійних рівнянь має єдиний розв’язок? Нескінченну кількість розв’язків?
4. Як називають систему, у якій $r(A) \neq r(B/A)$?
5. Якщо $r(A) = r(B/A) = r = 3$, а $n = 5$, то скільки буде базисних невідомих і скільки вільних?

Розв’язання прикладів (метод Гаусса)

Приклад. Дослідити системи лінійних рівнянь. Якщо вони сумісні, то знайти їхній розв’язок.

$$1) \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -5; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 4; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0; \\ 3x_1 + x_3 - x_4 = 2; \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 3; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1; \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7; \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3; \\ x_1 + 3x_2 = 0; \\ 5x_1 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв’язання.

1)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -5; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 2; \\ 2x_1 + x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$$

Спочатку знайдемо ранги матриць A і B/A . Для спрощення, зазвичай, знаходження рангів об'єднують: складають розширену матрицю B/A (**матриця A міститься в матриці B/A**) і за допомогою елементарних перетворень зводять її до ступінчатого вигляду. До речі, і саме зведення можна скоротити.

$$B/A = \begin{pmatrix} (-2)(-3) & (1 & -1 & 3 & : & -5) \\ 3 & -1 & -1 & : & 2 \\ 2 & 1 & -9 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} (-3) & (1 & -1 & 3 & : & -5) \\ 0 & 2 & -10 & : & 17 \\ 0 & 3 & -15 & : & 10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & : & -5 \\ 0 & 2 & -10 & : & 17 \\ 0 & 0 & 0 & : & -31 \end{pmatrix}.$$

Матриці A і B/A зведені до ступінчатого вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -10 \end{pmatrix} \text{ (нульовий рядок можна відкинути), } r(A) = 2.$$

$$B/A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -10 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -31 \end{pmatrix}, r(B/A) = 3.$$

Робимо висновок, що **система несумісна: $r(A) \neq r(B/A)$** (до речі, ознака несумісності: рядок матриці B/A , у якому всі елементи, за винятком останнього, дорівнюють нулю).

2)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Знаходимо ранги матриць A і B/A :

$$B/A = \begin{pmatrix} (-4)(-3) & (1 & -2 & 4 & : & 12) \\ 3 & 1 & -1 & : & 2 \\ 4 & 3 & 1 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} (-11) & (1 & -2 & 4 & : & 12) \\ 0 & 7 & -13 & : & -34 \\ 0 & 11 & -15 & : & -48 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & : & 12 \\ 0 & 7 & -13 & : & -34 \\ 0 & 0 & 38 & : & 38 \end{pmatrix}.$$

$r(A) = 3$, $r(B/A) = 3$. **Система сумісна.** Кількість невідомих $n = 3$, тому **система має один розв'язок**. Від одержаної ступінчатої матриці перейдемо до відповідної системи:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12; \\ 7x_2 - 13x_3 = -34; \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Зауважимо, що в ступінчатій матриці елементи останнього рядка помножили на $\frac{1}{38}$. Починаємо розв'язання системи з останнього рівняння (метод оберненого ходу): $x_3 = 1$.

Переходимо до передостаннього рівняння:

$$7x_2 - 13x_3 = -34.$$

Підставляємо $x_3 = 1$:

$$7x_2 - 13 = -34, 7x_2 = -21, x_2 = -3.$$

І, нарешті, переходимо до першого рівняння:

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12.$$

Підставляємо $x_2 = -3, x_3 = 1$:

$$x_1 + 6 + 4 = 12, x_1 = 2.$$

Таким чином, $x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = 1$.

Перевірка підтверджує правильність відповіді.

3)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 4; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0; \\ 3x_1 + x_3 - x_4 = 2; \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 3; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$$

Знаходимо ранг матриці B/A (для спрощення міняємо місцями перший і другий рядки – щоб елемент a_{11} дорівнював одиниці).

$$\begin{aligned} B/A &= (-1)(-3)(-2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & : & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & : & 4 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & : & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & : & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -3 & : & -3 \end{pmatrix} \sim (-2)(-3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & : & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & : & 4 \\ 0 & -3 & 7 & -1 & : & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & : & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & : & -3 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim (-\frac{1}{5}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & : & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & : & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -10 & : & -10 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & : & -5 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & : & -3 \end{pmatrix} \sim (-2)(-3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & : & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & : & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & : & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & : & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & : & -1 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & : & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & : & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & : & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & : & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & : & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & : & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & : & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & : & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & : & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & : & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(маємо два однакових рядки, тому один рядок можна відкинути. Або інакше: четвертий рядок множимо на -1 і додаємо до п'ятого рядка – у результаті одержуємо останній нульовий рядок). Маємо: $r(A) = 4, r(B/A) = 4$. Система сумісна. Продовжуємо розв'язання.

Оскільки кількість невідомих $n = 4$, то система має єдиний розв'язок. Повертаємось до системи і записуємо її відповідно до одержаної матриці B/A :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0; \\ -x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4; \\ x_3 + 2x_4 = 2; \\ -x_4 = -1. \end{cases}$$

Починаємо розв'язування цієї системи з останнього рівняння (метод

оберненого ходу):

$$x_4 = 1$$

Переходимо до передостаннього рівняння і т. д.

$$x_3 + 2x_4 = 2, \text{ або } x_3 + 2 \cdot 1 = 2, x_3 = 0,$$

$$-x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4, \text{ або } -x_2 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 4, x_2 = -1,$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \text{ або } x_1 - 1 - 2 \cdot 0 = 0, x_1 = 1.$$

Таким чином: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 1$.

$$\text{Перевірка: } 2 \cdot 1 - 1 + 3 \cdot 1 = 4; \quad 1 - 1 - 2 \cdot 0 = 0; \quad 3 \cdot 1 + 0 - 1 = 2;$$

$$2 \cdot 1 + 0 + 1 = 3; \quad 1 - 1 + 4 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3.$$

4)

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1; \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7; \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8. \end{cases}$$

Знаходимо ранги матриць A і B/A :

$$\begin{aligned} B/A &= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & : & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 5 & : & 7 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & : & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & : & -1 \\ 0 & -5 & 5 & 5 & : & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & : & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{складемо відповідні елементи} \\ \text{другого і третього рядків, а результат} \\ \text{запишемо в третій рядок} \end{array} \right\} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & : & -1 \\ 0 & -5 & 5 & 5 & : & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{другий рядок помножимо} \\ \text{на } -\frac{1}{5}, \text{ а третій рядок} \\ \text{відкинемо} \end{array} \right\} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & : & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & : & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$r(A) = r(B/A) = r = 2$. Система сумісна. Кількість невідомих $n = 4$, тому система має нескінченну кількість розв'язків.

Запишемо систему, яка відповідає матриці B/A :

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1; \\ x_2 - x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

Базисних невідомих буде дві (оскільки $r = 2$), вільних – теж дві (оскільки $n - r = 4 - 2 = 2$). Виберемо базисні невідомі x_1 і x_2 (можна вибрати базисними невідомими інші змінні). Далі ми перевіримо правильність цього вибору. Тоді x_3 і x_4 будуть вільними.

Запишемо систему таким чином. Базисні невідомі (зі своїми коефіцієнтами) запишемо в лівій частині рівнянь, а вільні невідомі (зі своїми коефіцієнтами) перенесемо в праву частину рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1 - 2x_3; \\ x_2 = -1 + x_3 + x_4. \end{cases} \quad (6.5)$$

Перевіримо, чи можуть бути x_1 і x_2 базисними невідомими. Для цього складемо визначник із коефіцієнтів при базисних невідомих. Він не повинен дорівнювати нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Задаємо питання: а якщо визначник буде дорівнювати нулю? У цьому випадку базисну невідому записуємо вільною, а вільна стає базисною. Наприклад, x_2 стає вільною, а x_3 – базисною. У нашому випадку зміни не потрібні.

Повертаємось до системи (6.5). З другого рівняння ми одержуємо значення базисної невідомої x_2 :

$$x_2 = -1 + x_3 + x_4.$$

Тепер у перше рівняння замість x_2 підставляємо його одержане значення:

$$x_1 - 4(-1 + x_3 + x_4) = -1 - 2x_3.$$

Виражаємо x_1 – базисну невідому – через вільні невідомі x_3, x_4 :

$$x_1 + 4 - 4x_3 - 4x_4 = -1 - 2x_3,$$

$$x_1 = -5 + 2x_3 + 4x_4.$$

Тоді x_2 :

$$x_2 = -1 + x_3 + x_4.$$

Система розв'язана, базисні невідомі x_1, x_2 виражені через вільні невідомі x_3, x_4 .

Нагадаємо, що система рівнянь має нескінченну кількість розв'язків. Тобто, надаючи вільним невідомим різні числові значення (які завгодно), будемо одержувати значення базисних невідомих. Наведемо приклад.

Нехай $x_3 = 1, x_4 = -2$. Тоді $x_1 = -11, x_2 = -2$. Тобто, ми одержали **один** розв'язок **із нескінченної кількості розв'язків**: $x_1 = -11, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = -2$. Якщо вільним невідомим x_3 і x_4 надати інші числові значення й знайти відповідні x_1 і x_2 – одержимо ще один розв'язок із нескінченної кількості розв'язків.

5)

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3; \\ x_1 + 3x_2 = 0; \\ 5x_1 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання аналогічне.

$$B/A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & : & 0 \\ 3 & -1 & 2 & : & 2 \\ 4 & -3 & 3 & : & 3 \\ 5 & 0 & 3 & : & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & : & 0 \\ 0 & -10 & 2 & : & 2 \\ 0 & -15 & 3 & : & 3 \\ 0 & -15 & 3 & : & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{\text{маємо три однакові рядки}\} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & : & 0 \\ 0 & -5 & 1 & : & 1 \\ 0 & -5 & 1 & : & 1 \\ 0 & -5 & 1 & : & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & : & 0 \\ 0 & -5 & 1 & : & 1 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = r(B/A) = 2, n = 3.$$

Система сумісна й має нескінченну кількість розв'язків.

Оскільки $r(A) = r(B/A) = r = 2$, то і базисних невідомих буде дві. Тоді кількість вільних невідомих буде дорівнювати $n - r = 3 - 2 = 1$. Нехай базисні невідомі x_1 і x_2 , тоді x_3 буде вільною невідомою. Від останньої матриці повернемося до системи рівнянь. Базисні невідомі залишимо в лівій частині, а вільну невідому перенесемо праворуч:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0; \\ -5x_2 = -x_3 + 1. \end{cases} \quad (6.6)$$

Складемо визначник із коефіцієнтів при базисних невідомих (для того щоб продовжувати розв'язання, потрібно, щоб цей визначник не дорівнював нулю).

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) - 0 \cdot 3 = -5 \neq 0$$

Тепер із другого рівняння системи (6.6) знайдемо базисну невідому x_2 (за допомогою вільної невідомої x_3):

$$\begin{aligned} -5x_2 &= -x_3 + 1, \\ x_2 &= \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Із першого рівняння визначаємо базисну невідому x_1 :

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 0, \text{ або } x_1 = -3x_2, \\ x_1 &= -3\left(\frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}\right) = -\frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Таким чином, розв'язок системи має вигляд:

$$x_1 = -\frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{5}, \quad x_2 = \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{5}.$$

Надаючи вільній невідомій x_3 різні числові значення, одержимо нескінченну кількість розв'язків. Наприклад:

Нехай $x_3 = 1$, тоді $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Нехай $x_3 = 0$, тоді $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = -\frac{1}{5}$ і т.д.

Приклади для аудиторної роботи

Приклад 1. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Крамера і матричним методом:

$$1) \begin{cases} x + 2y + 3z = 5; \\ 4x + 5y + 6z = 8; \\ 7x + 8y = 2. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1; \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x - 3y + z = -7; \\ x + 2y - 3z = 14; \\ -x - y + 5z = -18. \end{cases}$$

Приклад 2. Дослідити системи лінійних рівнянь, для сумісних систем знайти розв'язки методом Гаусса.

$$1) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -14; \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 7; \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = -7; \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 10x_4 = -7. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11; \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 8; \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1; \\ 4x_1 - 7x_2 - 18x_3 + 11x_4 = -13; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9. \end{cases}$$

Приклади для самостійного розв'язання

Приклад 1. Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Крамера і матричним методом:

$$1) \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9; \\ 2x + 5y - 3z = 4; \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1; \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Приклад 2. Дослідити системи лінійних рівнянь, для сумісних систем знайти розв'язки методом Гауса.

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13; \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = -1; \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 11; \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 19. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y + z = 3; \\ 2x - y + z = 2; \\ x + 4y + 2z = 5. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3; \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7; \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$$

Відповіді:

Приклад 1. 1) $x = 2, y = 3, z = 5$. 2) $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 3$.

Приклад 2. 1) система сумісна й визначена: $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = -2$.

2) система несумісна;

3) система сумісна й невизначена: $x_3 = 1 - 3x_1 - 4x_2, x_4 = 1$.

7. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ (ОДНОРІДНІ)

Нагадаємо, що коли в системі (6.1) $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, то система називається **однорідною**.

У матричній формі однорідна система буде мати вигляд $A \cdot X = 0$. Однорідна система **завжди сумісна** ($r(A) = r(B/A) = r = n$), оскільки завжди має розв'язок: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ (у цьому випадку, якщо матриця A квадратна – визначник системи не дорівнює нулю). Цей розв'язок називають тривіальним. Однорідна система має нетривіальний (ненульовий) розв'язок, якщо $r < n$. У цьому випадку система має нескінченну кількість розв'язків (якщо матриця A квадратна, то визначник системи дорівнює нулю). Розв'язок однорідної системи здійснюється за допомогою метода Гаусса.

Питання для самоперевірки

1. Яка система називається однорідною?
2. Чи може однорідна система бути несумісною?

3. За якою умовою однорідна система має тільки нульовий розв'язок? ненульовий розв'язок?

Розв'язання прикладів

Приклад. Знайти розв'язки однорідних систем рівнянь:

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0; \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} & 2) & \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_3 = 0. \end{cases} \\ 3) & \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язання.

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0; \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Можна почати розв'язування системи із знаходження визначника системи. Якщо він не дорівнює нулю, то система буде мати тільки тривіальний розв'язок. Але ж якщо визначник буде дорівнювати нулю, то потрібно буде знайти ранг матриці системи. Тому краще почнемо відразу зі знаходження рангу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-4)(-8)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$r(A) = 3$ і $n = 3$, тобто система має один розв'язок (тривіальний, нульовий).

Повернемося до системи:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ -5x_2 + 2x_3 = 0; \\ 5x_3 = 0. \end{cases} \quad \text{Звідси: } \begin{cases} x_3 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що визначник системи не дорівнює нулю.

$$2) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Приведемо матрицю системи до ступінчатого вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці дорівнює 2, тобто $r = 2$, а $n = 3$. Тому маємо дві базисні невідомі й одну вільну. Нехай x_1 і x_2 – базисні, x_3 – вільна. Запишемо відповідну систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3x_3; \\ -2x_2 = 7x_3. \end{cases}$$

Складемо визначник із коефіцієнтів при x_1 і x_2 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Із останнього рівняння знаходимо x_2 (виражаємо базисну невідому x_2 через вільну невідому x_3):

$$x_2 = -\frac{7}{2}x_3.$$

Далі в перше рівняння підставляємо знайдене значення x_2 :

$$x_1 - \frac{7}{2}x_3 = -3x_3.$$

Виражаємо x_1 через x_3 :

$$x_1 = \frac{7}{2}x_3 - 3x_3 \Rightarrow x_1 = \frac{x_3}{2}.$$

Розв'язок системи має вигляд:

$$x_1 = \frac{1}{2}x_3; x_2 = -\frac{7}{2}x_3.$$

Надаючи вільній змінній x_3 різні числові значення, одержуємо нескінченну кількість розв'язків. Наприклад, нехай $x_3 = 2$, тоді $x_1 = 1$, $x_2 = -7$.

Отже, один розв'язок із нескінченної кількості розв'язків: $x_1 = 1$, $x_2 = -7$, $x_3 = 2$.

$$3) \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Приведемо матрицю системи до ступінчатого вигляду:

$$A = (-1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

Ранг матриці A дорівнює 2, тобто $r = 2$, а $n = 4$, тому робимо висновок, що система має нескінченну кількість розв'язків. Маємо дві базисних і дві вільних невідомих. Нехай x_1 і x_2 – базисні, x_3 і x_4 – вільні. Запишемо відповідну систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2x_3 - 3x_4; \\ 3x_2 = -2x_3 + 7x_4. \end{cases}$$

Складемо визначник із коефіцієнтів при базисних невідомих і обчислимо його (він не повинен дорівнювати нулю):

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Із останнього рівняння одержуємо x_2 :

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_4.$$

Тепер знаходимо x_1 :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 + 2x_3 - 3x_4, \\ x_1 &= -\frac{2}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_4 + 2x_3 - 3x_4, \\ x_1 &= \frac{4}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4. \end{aligned}$$

Розв'язок системи має вигляд:

$$x_1 = \frac{4}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4, x_2 = -\frac{2}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_4.$$

Надаючи вільним змінним різні числові значення, одержимо нескінченну кількість розв'язків. Наприклад:

$$x_3 = 0, x_4 = 3, \text{ тоді } x_1 = -2, x_2 = 7;$$

$$x_3 = -1, x_4 = 2, \text{ тоді } x_1 = -\frac{8}{3}, x_2 = \frac{16}{3} \text{ і т.д.}$$

Приклади для аудиторної роботи

Приклад. Розв'язати однорідні системи лінійних рівнянь.

$$1) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Приклади для самостійного розв'язання

Приклад. Розв'язати однорідні системи лінійних рівнянь.

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0; \\ 8x_1 + 5x_2 = 0; \\ 7x_1 + 8x_2 = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0; \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0; \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0; \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Відповіді: 1) $x_1 = x_2 = 0$; 2) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$; 3) $x_1 = -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5$, $x_2 = \frac{7}{4}x_3 + \frac{5}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_5$; 4) $x_1 = \frac{11}{7}x_3$, $x_2 = \frac{2}{7}x_3$.

8. ФУНДАМЕНТАЛЬНА СИСТЕМА РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОРІДНОЇ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ (ФСР)

Розглянемо поняття фундаментальної системи розв'язків (ФСР) однорідної системи лінійних рівнянь. **ФСР, за визначенням**, це система лінійно незалежних розв'язків. точніше, максимальний набір лінійно незалежних розв'язків системи однорідних рівнянь. ФСР містить $(n - r)$ розв'язків і одержується із загального розв'язку, якщо вільним змінним надають послідовні значення:

$$1, 0, 0, 0, \dots, 0; 0, 1, 0, 0, \dots, 0; \dots; 0, 0, 0, 0, \dots, 1.$$

Приклад. Знайти фундаментальну систему розв'язків (ФСР) однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

За методом Гаусса приведемо матрицю до ступінчатого вигляду та знайдемо загальний розв'язок рівнянь.

$$A = (-3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & -1 \end{pmatrix},$$

$r = 2$, $n = 5$, система має нескінченну кількість розв'язків. Нехай базисні невідомі x_1, x_2 . Перевіримо правильність нашого вибору. Обчислимо визначник, складений із коефіцієнтів при базисних невідомих (він не повинен дорівнювати нулю):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді решта невідомих x_3, x_4, x_5 будуть вільними. Запишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3x_3 + 2x_4 - x_5; \\ -x_2 = 6x_3 - 5x_4 + x_5. \end{cases} \Rightarrow x_2 = -6x_3 + 5x_4 - x_5.$$

Підставимо значення x_2 у перше рівняння:

$$x_1 - 6x_3 + 5x_4 - x_5 = -3x_3 + 2x_4 - x_5.$$

Звідси

$$x_1 = 6x_3 - 5x_4 + x_5 - 3x_3 + 2x_4 - x_5.$$

Після скорочень

$$x_1 = 3x_3 - 3x_4.$$

Отже, загальний розв'язок

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_3 - 3x_4; \\ x_2 &= -6x_3 + 5x_4 - x_5. \end{aligned}$$

А тепер одержимо ФСР.

Перевизначимо

$$x_3 = c_1, x_4 = c_2, x_5 = c_3.$$

Тоді загальний розв'язок буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3c_1 - 3c_2; \\ x_2 &= -6c_1 + 5c_2 - c_3. \end{aligned}$$

Тут c_1, c_2, c_3 – довільні числа.

Тепер нехай $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 0$.

Із загального розв'язка одержимо:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3; \\ x_2 &= -6; \\ x_3 &= 1; \\ x_4 &= 0; \\ x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Далі, нехай $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0$.

$$\begin{aligned} x_1 &= -3; \\ x_2 &= 5; \\ x_3 &= 0; \\ x_4 &= 1; \\ x_5 &= 0. \end{aligned}$$

І, нарешті, $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 1$.

Тоді

$$\begin{aligned}x_1 &= 0; \\x_2 &= -1; \\x_3 &= 0; \\x_4 &= 0; \\x_5 &= 1.\end{aligned}$$

Одержали фундаментальну систему розв'язків (ФСР):

$$\{(3; -6; 1; 0; 0), (-3; 5; 0; 1; 0), (0; -1; 0; 0; 1)\}.$$

Приклад (розв'язати самостійно).

Знайти фундаментальну систему розв'язків:

$$\begin{cases}x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0; \\2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0; \\3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0.\end{cases}$$

Відповідь: $\{(3; -2; 1; 0)\}, \{(-2; 1; 0; 1)\}.$

9. ВЛАСНІ ВЕКТОРИ ТА ВЛАСНІ ЧИСЛА

Розглянемо квадратну матрицю A .

Означення. Якщо існує ненульовий вектор $\bar{x}$ і число λ такі, що виконується рівність

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x},$$

то говорять, що λ – **власне число** матриці A , а $\bar{x}$ – **власний вектор** матриці, який відповідає власному числу λ .

Властивості $\bar{x}$ і λ

1. Кожному власному вектору $\bar{x}$ відповідає одне власне число λ .
2. Якщо $\bar{x}$ – власний вектор матриці A , а λ – власне число матриці A , то вектор $t\bar{x}$ (k – деяке число, $t \neq 0$) також є власним вектором матриці A з числом λ .
3. Якщо $\bar{x}_1$ і $\bar{x}_2$ власні вектори матриці A , а λ – власне число матриці A , то $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$ є також власним вектором матриці A з власним числом λ .

Тобто можна зробити висновок, що кожному власному числу λ відповідає нескінченна кількість колінеарних власних векторів.

Розглянемо матрицю A третього порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Вектор $\bar{x}$ запишемо у вигляді матриці X :

$$\bar{x} = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Тоді рівняння $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ можна записати у вигляді:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

або

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \lambda x_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \lambda x_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \lambda x_3. \end{cases}$$

Перейдемо до однорідної системи:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0; \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0. \end{cases} \quad (9.1)$$

Відомо, що однорідна система має ненульові розв'язки тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (9.2)$$

(9.2) називають **характеристичним рівнянням матриці A** . Розкриємо визначник і одержимо кубічне рівняння. Корені цього рівняння можуть бути:

1) дійсними (різними або кратними); 2) комплексними.

Далі підставляємо в систему (9.1) **по черзі** знайдені власні числа й знаходимо її розв'язки, які і визначають координати власних векторів, відповідних власним числам.

Розв'язання прикладів

Приклад 1. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Складаємо характеристичне рівняння матриці A :

$$\begin{vmatrix} 17 - \lambda & 6 \\ 6 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислюємо визначник:

$$\begin{aligned} (17 - \lambda)(8 - \lambda) - 36 &= 0, \\ \lambda^2 - 25\lambda + 100 &= 0, \\ \lambda_1 &= 20, \lambda_2 = 5. \end{aligned}$$

Одержані числа і є власними числами матриці. Знайдемо відповідні власні вектори. Складемо систему виду (9.1):

$$\begin{cases} (17 - \lambda)x_1 + 6x_2 = 0; \\ 6x_1 + (8 - \lambda)x_2 = 0. \end{cases} \quad (9.3)$$

Нехай $\lambda = \lambda_1 = 20$, тоді система (9.3) буде мати вигляд

$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 = 0; \\ 6x_1 - 12x_2 = 0 \end{cases}$$

або, після скорочення:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0; \\ x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Одержали два однакових рівняння, одне з яких можна відкинути. Ранг

системи $r = 1$, кількість невідомих $n = 2$. Одержуємо одну базисну невідому (нехай це буде x_1) і одну вільну x_2 . Тоді $x_1 = 2x_2$ і відповідний власний вектор:

$$\overline{x}_1 = X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix},$$

t – довільне число.

Тепер нехай $\lambda = \lambda_2 = 5$. Підставимо $\lambda = 5$ у систему (9.3):

$$\begin{cases} 12x_1 + 6x_2 = 0; \\ 6x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Як і в попередньому випадку, одне рівняння можна відкинути:

$$2x_1 + x_2 = 0;$$

$$2x_1 = -x_2.$$

Власний вектор запишемо у вигляді

$$\overline{x}_2 = X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} t \\ -2t \end{pmatrix},$$

t – довільне число.

Тобто, матриця A має два власних числа – $\lambda_1 = 20$ і $\lambda_2 = 5$ і два власних вектори:

$$\overline{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t, \overline{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} t.$$

Розглянемо ще один приклад, у якому власні вектори будуть визначатися іншим методом.

Приклад 2. Знайти власні числа та власні вектори матриці $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Складаємо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 5 & 4 \\ 5 & 4 - \lambda & 4 \\ 4 & 4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розв'язуємо його:

$$(4 - \lambda)^2(5 - \lambda) + 80 + 80 - 16(4 - \lambda) - 16(4 - \lambda) - 25(5 - \lambda) = 0.$$

Після відповідних перетворень одержимо:

$$\lambda^3 - 13\lambda^2 - \lambda + 13 = 0,$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 13) = 0.$$

Одержали три власних числа:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 13.$$

Перейдемо до знаходження власних векторів. Запишемо систему:

$$\begin{cases} (4 - \lambda)x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0; \\ 5x_1 + (4 - \lambda)x_2 + 4x_3 = 0; \\ 4x_1 + 4x_2 + (5 - \lambda)x_3 = 0. \end{cases} \quad (9.4)$$

Нехай $\lambda = \lambda_1 = -1$

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0; \\ 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0; \\ 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Матриця одержаної системи:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 5 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Звідси } \bar{x}_1 = X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 14 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} t.$$

Нагадаємо, що A_{11} , A_{12} , A_{13} – алгебраїчні доповнення матриці.

Нехай $\lambda = \lambda_2 = 1$.

Систему (9.4) запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0; \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0; \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тоді } \bar{x}_2 = X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} t.$$

Нехай $\lambda = \lambda_3 = 13$.

Тоді система (9.4) буде мати вигляд

$$\begin{cases} -9x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0; \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 0; \\ 4x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}, \quad A = \begin{pmatrix} -9 & 5 & 4 \\ 5 & -9 & 4 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тоді } \bar{x}_3 = X_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 56 \\ 56 \\ 56 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t.$$

Тут t – довільне число.

10. ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Елементи лінійної алгебри застосовуються для розв'язання широкого кола практичних задач із різних сфер: в економічних розрахунках, в оптимізаційних задачах, при обробці великих даних для скорочення розмірності та в методах побудови моделей машинного навчання.

10.1. Застосування лінійної алгебри в економічних задачах

Розглянемо такий приклад. Для виготовлення чотирьох видів виробів витрати матеріалів, робочої сили та електроенергії задаються в таблиці (в умовних одиницях).

Ресурси	Витрати на один виріб кожного виду			
	1	2	3	4
Матеріали	1	4	1	2

Робоча сила	0,5	1	0,5	1
Електроенергія	3	2	2	1

Потрібно обчислити загальну потребу в матеріалах y_1 , робочій силі y_2 і електроенергії y_3 для виготовлення заданої кількості x_i виробів кожного виду, якщо $x_1 = 8$, $x_2 = 2$, $x_3 = 6$, $x_4 = 4$.

Розв'язання.

Загальна потреба в матеріалах, робочій силі та електроенергії для виготовлення кількості x_i виробів кожного виду визначається матричним рівнянням

$$A \cdot X = Y,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \text{матриця норм витрат ресурсів};$$

$$X = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \text{матриця кількості виробів кожного виду};$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - \text{матриця загальної потреби в ресурсах}.$$

Перевіримо, чи можна перемножити матрицю A на матрицю X (тобто, чи будуть вони узгодженими): $A = [3 \times 4]$, $X = [4 \times 1]$. Кількість стовпців A дорівнює кількості рядків X . Перемножати можна. І одержана матриця повинна мати розмір $[3 \times 1]$. Дійсно, розмірність матриці $Y \in [3 \times 1]$.

Тоді

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 13 \\ 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Тобто, для виготовлення заданої кількості виробів кожного виду необхідно: $y_1=30$ одиниць матеріалів; $y_2=13$ одиниць робочої сили і $y_3=44$ одиниці електроенергії.

10.2. Застосування лінійної алгебри в аналізі даних

Один з найбільш популярних методів зниження розмірності даних – метод головних компонент. Цей метод широко використовується для аналізу, візуалізації даних, стиснення зображень та відео, зменшення шуму на фотографіях, у біоінформатиці, економетриці, соціології та інших науках, де потрібна обробка великої кількості інформації. Базується цей метод на обчисленні власних векторів і власних чисел коваріаційної матриці початкових даних.

Сутність методу полягає в заміні корельованих компонентів некорельованими факторами.

Розглянемо застосування цього методу в ході розв'язання задачі аналізу стану безпеки руху в локомотивному господарстві [4].

Задаємо k -вимірний вектор вихідних змінних (наприклад, показників, пов'язаних з безпекою руху):

$$X = (x_1, \dots, x_k).$$

Знаходимо лінійну комбінацію вихідних даних:

$$G = AX,$$

Матриця A має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k'1} & \dots & a_{k'k} \end{pmatrix},$$

де a_{ik} – k -й елемент i -го власного вектора матриці A .

Для того щоб кожна наступна лінійна комбінація виявляла нові фактори, не пов'язані з попередніми, вводимо додаткову умову попарної кореляції головних компонент:

$$\text{corr}(g_i, g_j) = 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad j = \overline{1, k}.$$

Для обчислення першої головної компоненти розв'язуємо оптимізаційну задачу:

$$\begin{cases} D(g_1) \rightarrow \max_{a_1} \\ \bar{a}_1 \bar{a}_1^T = 1 \end{cases},$$

де $\bar{a}_1$ – перший рядок матриці A , власний вектор, що відповідає найбільшому власному значенню матриці A .

Аналогічно знаходимо всі головні компоненти вектора G . У результаті отримуємо вектор нових змінних – головних компонент: $G = (g_1, \dots, g_k)$.

Для визначення значущої кількості головних компонент використовуємо умову

$$\sum_{i=1}^p D(g_i) \leq \alpha, \quad p \leq k,$$

де α – необхідний відсоток збереження вихідної інформації.

Як вихідні дані взято інформацію зі статистичних джерел Укрзалізниці (УЗ).

Таблиця 10.1

Аварійність на залізничному транспорті

Рубрика	Показник		Значення за роками							
			2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Транспортні події	Проїзд заборонного сигналу (серйозний інцидент)	x_1	3	1	0	7	3	4	3	5
	Сходження та зіткнення рухомого складу під час маневрів (інциденти)	x_2	4	7	19	21	16	0	0	0
	Саморозчіп та обрив автозчеплення (інциденти)	x_3	1	1	2	0	4	0	0	0
	Неправильні дії персоналу (інциденти)	x_4	0	0	0	6	48	47	56	40
	Поява несправності ТРС (інциденти)	x_5	234	207	186	195	200	186	150	173
Причини транспортних подій	Незадовільний деповський ремонт	x_6	168	175	170	157	146	131	116	113
	Неправильні дії локомотивних бригад (події)	x_7	87	77	78	63	72	72	68	67
	Незадовільний заводський ремонт	x_8	34	19	24	12	8	10	2	0
	Технічні	x_9	29	41	36	45	29	18	18	33
	Інші	x_{10}	6	9	0	5	2	2	9	0
Несправності основного обладнання тягового рухомого складу	Дизель	x_{11}	36	30	32	30	32	28	29	37
	Головний генератор	x_{12}	1	3	4	1	2	1	4	2
	Силові трансформатори	x_{13}	2	4	4	2	1	3	5	4
	Тягові електродвигуни	x_{14}	27	24	35	27	27	37	20	18
	Допоміжне механічне обладнання	x_{15}	9	12	2	20	11	6	8	8
	Допоміжне електричне обладнання	x_{16}	6	1	3	14	2	0	0	0
	Елементи тягової передачі	x_{17}	0	0	2	2	0	0	0	0
	Колісні пари	x_{18}	5	2	2	1	2	0	0	0
	Букси колісних пар	x_{19}	19	21	13	15	9	13	7	10
	Колісно-моторний блок	x_{20}	23	11	23	5	6	5	9	3
	Силові ланцюги	x_{21}	43	43	44	23	37	32	19	24
	Ланцюги управління	x_{22}	54	57	32	21	29	15	17	15
	Силова електрична апаратура	x_{23}	12	16	7	25	8	12	7	15
	Електрична апаратура кіл управління	x_{24}	1	3	2	10	1	1	0	3
	Акумуляторна батарея	x_{25}	6	9	6	3	3	4	4	3
	Гальмівне обладнання	x_{26}	21	21	20	18	12	9	6	12
	Прилади безпеки	x_{27}	0	1	2	0	0	0	0	0

Механічне обладнання	x_{28}	0	4	0	0	12	5	6	3
Дахове обладнання	x_{29}	18	20	16	10	13	15	9	12
Автозчеп	x_{30}	2	1	0	0	0	0	0	0
Візок, екіпаж	x_{31}	2	5	8	8	0	0	0	0
Інші	x_{32}	5	0	0	1	1	0	7	0
Неправильні дії бригад (відмови обладнання)	x_{33}	32	30	51	45	49	47	56	40

Якщо проаналізувати статистичні дані про аварійність на залізничному транспорті, то вони перевантажені абсолютними показниками, які мають тенденцію до зниження, але не дозволяють зробити об'єктивних висновків щодо стану безпеки руху.

Поставлена задача – об'єднати інформацію про існуючі показники стану безпеки руху $x_1 \div x_{33}$ та ранжувати (впорядкувати) величини за мірою їхнього впливу на надійність, працездатність та стан безпеки руху в локомотивному парку.

У результаті розрахунку визначено 8 головних компонент $g_1 \dots g_8$, які в загальній кількості містять 89 % вихідної інформації. Кожна з компонент g_i містить певну кількість інформації щодо стану безпеки руху. До складу кожної з компонент входять тією чи іншою мірою значення величин $x_1 \div x_{33}$.

Найбільша кількість інформації міститься в першій компоненті. Схема, що відбиває структуру першої головної компоненти, наведена на рис. 10.1. У кожній з головних компонент виділено дві складові: технічну та безпекову.

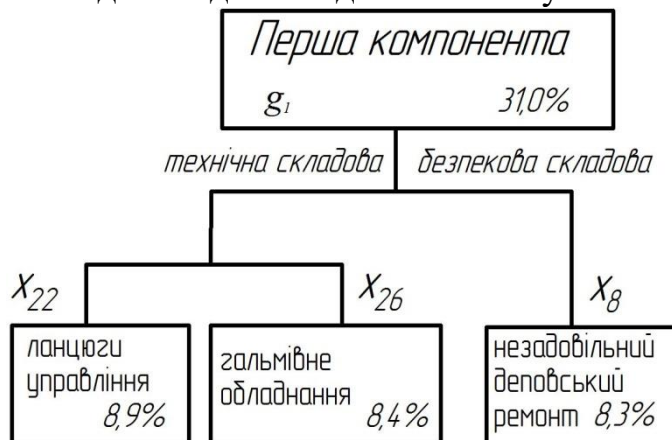


Рис. 10.1.

Найбільш інформативно стан безпеки руху в локомотивному господарстві з позиції безпекової складової описується значеннями такого показника, як незадовільний деповський ремонт. До складу технічної складової увійшли: гальмівне обладнання та електричні кола управління.

Структурна схема другої головної компоненти показана на рис. 10.2.

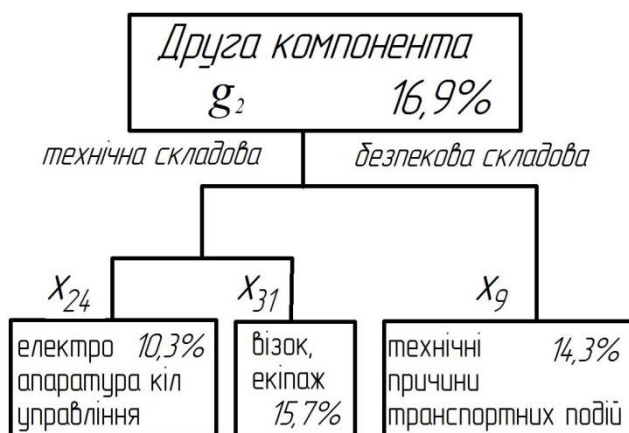


Рис. 10.2

З позиції безпекової складової найбільш інформативним у другій головній компоненті є величина – технічні причини транспортних подій. До складу технічної складової увійшли: електроапаратура кіл управління, візок та екіпаж.

Структурна схеми третьої головної компоненти наведена на рис. 10.3.



Рис. 10.3

Структурні схеми інших компонент є аналогічними за складом, але іншими за змістом. Враховуючи, що сьома і восьма головні компоненти мають інформативність менше ніж 5 %, пропонуємо їхній вплив не враховувати.

На основі аналізу результатів визначено вузли локомотивів, які найбільше впливають на стан безпеки руху та надійність. Аналіз безпекової складової показує внесок кожного з наведених показників на стан безпеки руху.

Таким чином, застосування матричних обчислень, зокрема методу головних компонент, дозволяє виконувати аналіз даних на залізниці та з'ясовувати вплив тих чи інших факторів на стан безпеки руху.

Індивідуальні завдання

Розділ 1

Варіант 1

- Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4$.

2. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$.
3. Обчислити $2A+5B^T$, якщо $A=\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.
4. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A , якщо $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.
5. Знайти ранг матриці $C=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.
6. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера та методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0; \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = -1; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Варіант 2

1. Розв'язати нерівність: $\left| \begin{vmatrix} x & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \right| > 1$. У відповіді вказати найменше ціле значення x , яке задовольняє нерівність.
2. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -6 \end{vmatrix}$.
3. Обчислити $\frac{1}{2}A-3B^T$, якщо $A=\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.
4. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A , якщо $A=\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.
5. Знайти ранг матриці $C=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
6. Розв'язати систему рівнянь матричним методом і методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2; \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 = 0; \\ 6x_1 - x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$$

Варіант 3

1. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ x & 4 \end{vmatrix} = 0$.
2. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ -7 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.
3. Обчислити $\frac{1}{3}A+2B^T$, якщо $A=\begin{pmatrix} -9 & 12 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.
4. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A , якщо $A=\begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.
5. Знайти ранг матриці $C=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.
6. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера та методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14. \end{cases}$$

Варіант 4

1. Розв'язати нерівність: $\left| \frac{2}{4} \frac{x}{-3} \right| > 2$. У відповіді вказати найбільше ціле значення x , яке задовольняє нерівність.

2. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

3. Обчислити $A - 2B^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} -6 & 11 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Знайти ранг матриці $C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь матричним методом і методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

Варіант 5

1. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} 4 & 2x \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2$.

2. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -1 \\ -7 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

3. Обчислити $\frac{1}{4}A + 2B^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} -12 & 16 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

5. Знайти ранг матриці $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера та методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

Варіант 6

1. Розв'язати нерівність: $\left| \frac{3}{x} \frac{-2}{8} \right| > 3$. У відповіді вказати найменше ціле значення x , яке задовольняє нерівність.

2. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 9 \\ 0 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

- Обчислити $4A - B^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$.
- Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
- Знайти ранг матриці $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
- Розв'язати систему рівнянь матричним методом і методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

Варіант 7

- Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 8$.
- Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.
- Обчислити $\frac{1}{5}A - B^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$.
- Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.
- Знайти ранг матриці $C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.
- Розв'язати систему рівнянь методом Крамера та методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = -1; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1; \\ 5x_1 - x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Варіант 8

- Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 3 & -x \\ 2 & 1 \end{vmatrix} < 0$. У відповіді вказати найбільше ціле значення x , яке задовольняє нерівність.
- Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.
- Обчислити $\frac{1}{2}A - 3B^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.
- Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.
- Знайти ранг матриці $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
- Розв'язати систему рівнянь матричним методом і методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1; \\ 4x_1 - 5x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Варіант 9

1. Розв'язати нерівність: $\left| \frac{x}{6} - \frac{-3}{2} \right| > 1$. У відповіді вказати найменше ціле значення x , яке задовольняє нерівність.

2. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} -5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

3. Обчислити $A^{-\frac{1}{3}}B^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 18 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$.

5. Знайти ранг матриці $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера та методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2; \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Варіант 10

1. Розв'язати нерівність: $\left| \frac{4}{-2} - \frac{3}{x} \right| > 10$. У відповіді вказати найбільше ціле значення x , яке задовольняє нерівність.

2. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

3. Обчислити $2A^{-\frac{1}{3}}B^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Знайти ранг матриці $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Розв'язати систему рівнянь матричним методом і методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 5; \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Індивідуальні завдання. Розділ 2

Варіант 11

1. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 8 \\ 7 & 9 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -4 & x^2 & x \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \leq 0$.

3. Знайти $A=3B+C^T$ якщо $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A .

5. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти розв'язок методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1; \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$

7. Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0; \\ 5x_1 - 3x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант 12

1. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ x & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

3. Знайти добуток матриць: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} 7 & 8 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A .

5. Знайти ранг матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти розв'язок методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1; \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$

7. Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

Варіант 13

1. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.
2. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} 3-x & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2x+3 \\ 2x+1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$.
3. Знайти $f(A)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 7x + 9$.
4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A .
5. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
6. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти розв'язок методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5; \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$
7. Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \\ x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Варіант 14

1. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.
2. Довести рівність: $\begin{vmatrix} ab & a^2 + b^2 & 1 \\ ac & a^2 + b^2 & 1 \\ ad & a^2 + b^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.
3. Знайти матрицю $AB-BA$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.
4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A .
5. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
6. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти розв'язок методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

7. Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 + 11x_2 - 12x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант 15

1. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 5 & 9 & -7 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.
2. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 6$.
3. Знайти $f(A)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = 2x^2 - 5$.
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A .
5. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
6. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти розв'язок методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1; \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 2; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -8. \end{cases}$
7. Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 0. \end{cases}$

Варіант 16

1. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 3 & 10 & -8 \\ 7 & 1 & -1 \\ 4 & 9 & 0 \end{vmatrix}$.
2. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 2$.
3. Обчислити $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A .
5. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
6. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти

розв'язок методом Гаусса :
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -12; \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

7. Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь:
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Варіант 17

1. Обчислити визначник:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 7 & 8 & -1 \\ 3 & 9 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Довести рівність:
$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0.$$

3. Знайти $f(A)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

4. $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A .

5. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти

розв'язок методом Гаусса :
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0; \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

7. Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Варіант 18

1. Обчислити визначник:
$$\begin{vmatrix} 3 & 10 & 9 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати нерівність:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ x & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} < 0.$$

3. Знайти $A \cdot B^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A .

5. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти розв’язок методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

7. Розв’язати однорідну систему лінійних рівнянь:
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0; \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Варіант 19

1. Обчислити визначник:
$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Обчислити визначник, користуючись його властивостями:
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 + 1 \\ 1 & 2a & a^2 + 2 \\ 1 & 3a & a^2 + 3 \end{vmatrix}.$$

3. Обчислити:
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A .

5. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти розв’язок методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = -1; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

7. Розв’язати однорідну систему лінійних рівнянь:
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$$

Варіант 20

1. Обчислити визначник:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 4 & 9 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Розв’язати нерівність:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & x & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} > 0.$$

3. Обчислити $A^2 - 3B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A .

5. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 8 \end{pmatrix}$.

6. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти розв’язок методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 8; \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -1; \\ 4x_1 - 6x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

7. Розв’язати однорідну систему лінійних рівнянь:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Індивідуальні завдання.

Розділ 3

Варіант 21

1. Обчислити визначник:
$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix}.$$

2. Обчислити визначник, користуючись його властивостями:
$$\begin{vmatrix} x + 3y & 1 & 3 \\ 5x + 6y & 5 & 6 \\ 6x + 7y & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

3. Обчислити $3A^2 - 2A + 5$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A .

5. Знайти ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 & 14 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

6. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти розв’язок методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1; \\ 5x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 7; \\ 3x_1 - 2x_2 = 8. \end{cases}$$

7. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти розв’язок методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -8; \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = 5; \\ x_1 + 5x_2 - 17x_3 + 2x_4 = 10; \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -2. \end{cases}$$

8. Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь: $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$

Варіант 22

1. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} y+2 & 1 & 0 \\ 0 & y+1 & 0 \\ 0 & 0 & y-2 \end{vmatrix} = 0$.

3. Обчислити $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A .

5. Знайти ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти

розв'язок методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 8; \\ -2x_1 + x_3 = 3; \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

7. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти

розв'язок методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 3; \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 4; \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 7. \end{cases}$

8. Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь: $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 0; \\ 3x_1 + 2x_3 - x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

Варіант 23

1. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 8-x & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} < 0$.

3. Обчислити $2A \cdot B - 1$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A .

5. Знайти ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти розв'язок методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

7. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти розв'язок методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1; \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

8. Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0; \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$$

Варіант 24

1. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 & 3 \\ 4 & 6 & x & 6 \\ 2 & -3 & -3 & 5 \\ 2 & 9 & -11 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

3. Обчислити: $\begin{pmatrix} 2 & -0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A .

5. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти розв'язок методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -5; \\ 2x_1 + x_2 - 9x_3 = 0; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

7. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти

розв'язок методом Гаусса:
$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1; \\ -3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

8. Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - 9x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 0; \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Варіант 25

1. Обчислити визначник:
$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати нерівність:
$$\begin{vmatrix} x+10 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & x & -4 \end{vmatrix} < 0.$$

3. Знайти $f(A)$, якщо $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 5 & 0 & -5 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A .

5. Знайти ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -14 & 22 \\ -2 & 1 & 3 & 3 & -9 \\ -4 & -3 & 11 & -19 & 17 \end{pmatrix}.$

6. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти розв'язок методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -9; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 3; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -6. \end{cases}$$

7. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти розв'язок методом Гаусса:
$$\begin{cases} 3x_1 - 11x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 4; \\ 4x_1 - 9x_2 - x_3 + x_4 = 8; \\ 7x_1 - 20x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 12. \end{cases}$$

8. Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь:
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Варіант 26

1. Обчислити визначник:
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 7 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Довести рівність, користуючись властивостями визначників:

$$\begin{vmatrix} c & c^2 + 1 & 1 \\ 2c & c^2 + 2 & 1 \\ 3c & c^2 + 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Розв'язати матричне рівняння:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A .

5. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 & 4 & -21 \\ 3 & -1 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & -3 & 2 & 7 & -8 \\ -2 & 0 & 8 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

6. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти

розв'язок методом Гаусса:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 = 5; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

7. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти

розв'язок методом Гаусса:
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1; \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

8. Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь:
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Варіант 27

1. Обчислити визначник:
$$\begin{vmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати нерівність:
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & x + 5 & 2 - x \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \leq 4.$$

3. Обчислити:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A .

5. Знайти ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$

6. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти

розв'язок методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3; \\ 2x_1 + 4x_2 = -1; \\ -2x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

7. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти

розв'язок методом Гаусса:
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 9x_4 = -7; \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 12x_4 = -1; \\ -x_1 + 3x_3 - x_4 = 8; \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 17x_4 = -6. \end{cases}$$

8. Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь:
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Варіант 28

1. Обчислити визначник:
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

2. Не розкриваючи визначників, довести справедливості рівності:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

3. Обчислити $A \cdot B - 3$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 9 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A .

5. Знайти ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти

розв'язок методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 8. \end{cases}$$

7. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти

розв'язок методом Гаусса:
$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 7; \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 23x_4 = 1; \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 31x_4 = -35; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 11. \end{cases}$$

8. Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Варіант 29

1. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Обчислити визначник, користуючись його властивостями:

$$\begin{vmatrix} 1 & x+4y & 4 \\ 2 & 2x+5y & 5 \\ 3 & 3x+8y & 8 \end{vmatrix}.$$

3. Знайти добуток матриць $A \cdot A^{-1}$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A .

5. Знайти ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 & 4 & 21 \\ 3 & -1 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & -3 & 2 & 7 & -8 \\ -2 & 0 & 8 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

6. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти

розв'язок методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2; \\ x_2 + 3x_3 = 5; \\ 2x_1 - 7x_2 - x_3 = -11; \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 = -13. \end{cases}$

7. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти

розв'язок методом Гаусса: $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -4; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

8. Розв'язати однорідну систему лінійних рівнянь: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

Варіант 30

1. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 10 & 9 & -4 \\ 7 & 1 & 8 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$.

3. Знайти $f(A)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^3 + 5x - 7$.

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A .

5. Знайти ранг матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.
6. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти розв’язок методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$
7. Дослідити систему лінійних рівнянь на сумісність і в разі сумісності – знайти розв’язок методом Гаусса: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5; \\ 5x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 = -1; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2; \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$
8. Розв’язати однорідну систему лінійних рівнянь: $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 = 0; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0; \\ 5x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$

Приклади тестів

Теоретичні питання

- Матриця A – це:
 - число;
 - прямокутна таблиця чисел;
 - визначник n -го порядку;
 - додатне число.
- Матриця називається нульовою, якщо:
 - усі її елементи нулі;
 - сума всіх елементів дорівнює нулю;
 - усі елементи якого-небудь рядка дорівнюють нулю;
 - усі елементи якого-небудь стовпця дорівнюють нулю.
- Квадратна матриця називається одиничною, якщо:
 - усі її елементи одиниці;
 - усі елементи якого-небудь рядка одиниці;
 - елементи, які утворюють головну діагональ, – одиниці;
 - елементи, які утворюють головну й побічну діагоналі, – одиниці.
- Матриці не можна:
 - додавати;
 - віднімати;
 - множити;
 - ділити.
- Дві матриці називаються узгодженими, якщо:

- a) кількість рядків матриці A дорівнює кількості рядків матриці B ;
 - b) кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B ;
 - c) кількість стовпців матриці A дорівнює кількості стовпців матриці B ;
 - d) кількість рядків матриці A дорівнює кількості стовпців матриці B .
6. Визначник – це:
- a) квадратна таблиця;
 - b) прямокутна таблиця;
 - c) число, яке знаходиться за деякою формулою;
 - d) число, яке не дорівнює нулю.
7. Якщо переставити місцями два рядки (стовпці) визначника, то:
- a) значення визначника не зміниться;
 - b) визначник змінить знак на протилежний;
 - c) визначник буде дорівнювати нулю;
 - d) визначник буде транспонованим.
8. Якщо відповідні елементи деякого рядка (стовпця) визначника пропорційні, то:
- a) визначник буде дорівнювати одиниці;
 - b) визначник буде дорівнювати додатному числу;
 - c) визначник не зміниться;
 - d) визначник буде дорівнювати нулю.
9. Матриця A називається невиродженою, якщо вона:
- a) квадратна;
 - b) прямокутна;
 - c) визначник матриці A є додатне число;
 - d) визначник матриці A не дорівнює нулю.
10. Матриця A має обернену, якщо вона:
- a) квадратна;
 - b) невироджена;
 - c) квадратна й невироджена;
 - d) квадратна й вироджена.
11. Матриці, які одержують одна з одної за допомогою елементарних перетворень, називають:
- a) еквівалентними;
 - b) рівними;
 - c) оберненими;
 - d) транспонованими.
12. Ранг ступінчатої матриці дорівнює:
- a) кількості стовпців матриці;
 - b) кількості ненульових рядків (стовпців) матриці;
 - c) кількості рядків матриці ;
 - d) кількості елементів матриці.

13. Неоднорідна система лінійних рівнянь сумісна тоді й тільки тоді, коли:
- ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи;
 - ранг матриці системи дорівнює одиниці;
 - ранг розширеної матриці системи дорівнює додатному числу;
 - ранг матриці системи менший ніж ранг розширеної матриці системи.

14. Якщо $r(A) = r(B/A) = r = n$, то:

- система несумісна;
- система сумісна й має нескінчену кількість розв'язків;
- система несумісна й має один розв'язок;
- система сумісна й має один розв'язок.

15. Якщо $r(A) \neq r(B/A)$, то:

- система несумісна;
- система сумісна й має один розв'язок;
- система несумісна й має два розв'язки;
- система сумісна й має нескінчену кількість розв'язків.

Відповіді: 1. b); 2. a); 3. c); 4. d); 5. b); 6. c); 7. b); 8. d); 9. d); 10. c); 11. a); 12. b); 13. a); 14. d); 15. a).

Приклади тестів

Практичні питання

1. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 2x & -6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} > 1$. У відповіді вказати найменше ціле значення x , яке її задовольняє.

a) 4; b) 0; c) 2; d) -3.

2. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

a) -18; b) 35; c) 24; d) -46.

3. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

a) -21; b) 17; c) -42; d) 31.

4. Обчислити визначник (за допомогою властивостей визначника):

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & -4 & 6 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

a) 0; b) -2; c) -4; d) 1.

5. Обчислити $\frac{1}{3}A - B^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & -12 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Знайти добуток матриць $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -13 \\ 8 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Знайти матрицю A^{-1} , обернену до матриці A , якщо $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

a) $\frac{1}{39} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{39} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\frac{1}{39} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$; d) $\frac{1}{39} \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$.

8. Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

a) $r(A)=1$; b) $r(A)=-2$; c) $r(A)=3$; d) $r(A)=2$.

9. Дослідити систему на сумісність, в разі сумісності знайти розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \\ 2x_1 + x_2 = 5; \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 14. \end{cases}$$

a) $x_1=3; x_2=0; x_3=4$; b) $x_1=0; x_2=6; x_3=-2$;

c) $x_1=4; x_2=-3; x_3=1$; d) $x_1=-1; x_2=5; x_3=7$;

10. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

a) $x_1=3; x_2=0; x_3=4$; b) $x_1 = \frac{11}{7} x_3; x_2 = \frac{2}{7} x_3$;

c) $x_1 = \frac{9}{7} x_3; x_2 = \frac{1}{7} x_3$; d) $x_1=0; x_2=0; x_3=5$;

Відповіді: 1. c); 2. d); 3. b); 4. a); 5. b); 6. b); 7. a); 8. d); 9. c); 10. b).

11. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

11.1. Основні поняття

Величина, яка характеризується деяким числовим значенням, називається **скалярною** величиною.

Приклади скалярних величин: густина, робота, маса, температура.

Означення. Величина, яка характеризується не тільки деяким числовим значенням, а й певним напрямком у просторі, називається **векторною** величиною. Геометричною інтерпретацією векторної величини є **вектор** – напрямний відрізок.

Приклади векторних величин: сила, швидкість, прискорення.

Вектори бувають зв'язані та вільні.

Зв'язаний вектор – це векторна величина, яка задається точкою прикладання, напрямом і числом.

Вільний вектор – це векторна величина, яка задається напрямом і числом, а точка прикладання може бути довільною. Надалі будемо розглядати лише **вільні вектори** й називатимемо їх просто **векторами**.

Вектори записують або двома літерами латинського алфавіту: $\overline{AB}$ (A – початок вектора, або точка прикладання вектора, B – кінець вектора), $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, або однією літерою: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Модулем (абсолютною величиною) вектора $\overline{AB}$ називають довжину відрізка AB . Позначається модуль так: $|\overline{AB}|$ або $|\vec{a}|$.

Вектор, довжина якого дорівнює нулю, називається **нульовим вектором**. Цей вектор позначають $\vec{0}$.

Вектори, які лежать на одній або на паралельних прямих, називають **колінеарними** векторами. Колінеарність позначається символом $\|: \vec{a} \parallel \vec{b}$.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається **одиничним вектором**.

Одиничний вектор, який колінеарний вектору $\vec{a}$ і має з ним однаковий напрям, називається **ортом** вектора $\vec{a}$ і позначається $\vec{a}^0$ ($|\vec{a}^0| = 1$).

Вектори називають **рівними**, якщо вони колінеарні, однаково спрямовані й мають однакові модулі.

Колінеарні вектори називають **протилежними**, якщо вони протилежно спрямовані й мають однакові модулі.

Вектори, які містяться в одній або паралельних площинах, називаються **компланарними**.

11.2. Лінійні операції над векторами

До лінійних операцій над векторами належать: додавання векторів, віднімання векторів і множення вектора на число.

Додавання двох векторів здійснюється за правилом трикутника або паралелограма (рис.11.1 та 11.2).

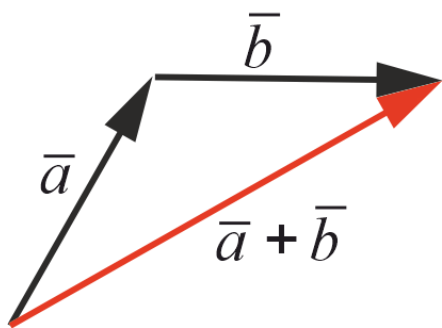


Рис.11.1

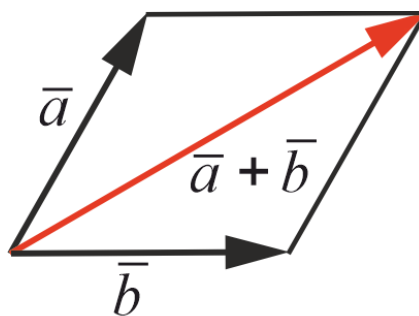


Рис.11.2

Додавання n векторів ($n > 2$) виконують за правилом багатокутника (рис. 11.3 та 11.4).

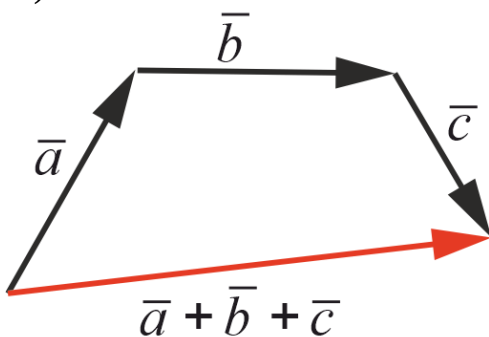


рис 11.3

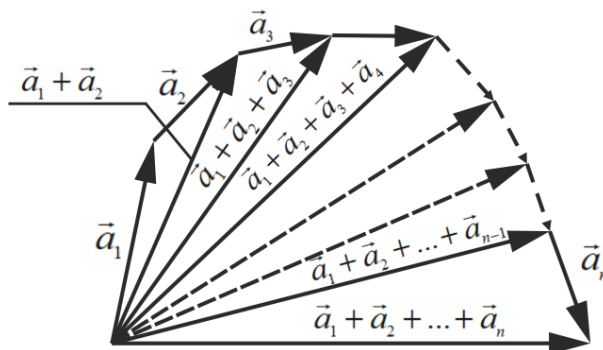


рис.11.4

Властивості суми векторів:

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- 2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- 3) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є такий вектор $\vec{c}$, що $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. Тобто $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, якщо $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. Або інакше: щоб від $\vec{a}$ відняти $\vec{b}$, потрібно до вектора $\vec{a}$ додати вектор, протилежний вектору $\vec{b}$ (рис.11.5).

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

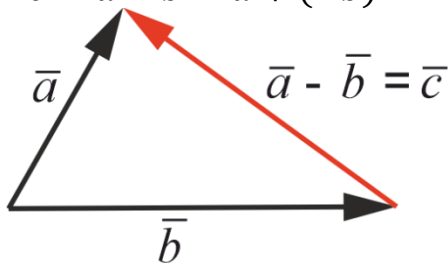


Рис 11.5

Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ ($\lambda \neq 0$) називають вектор $\lambda\vec{a}$ такий, що (рис.11.6):

1. $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$.
2. Якщо $\lambda > 0$, то напрям $\lambda\vec{a}$ збігається з напрямом вектора $\vec{a}$.
3. Якщо $\lambda < 0$, то напрям $\lambda\vec{a}$ протилежний напрямом вектора $\vec{a}$.

4. Якщо $|\lambda| > 1$, то вектор $\bar{a}$ «розтягується» в λ раз.
5. Якщо $|\lambda| < 1$, то вектор $\bar{a}$ «стискається» в λ раз.

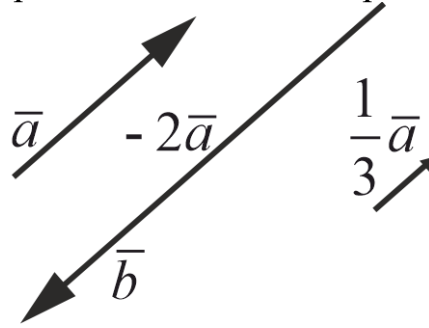


Рис 11.6.

Властивості множення вектора на число:

1. $\lambda \bar{a} = \bar{a} \lambda$.
2. $(\lambda_1 + \lambda_2) \bar{a} = \lambda_1 \cdot \bar{a} + \lambda_2 \cdot \bar{a}$.
3. $\lambda(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) = \lambda \bar{a}_1 + \lambda \bar{a}_2$.
4. $\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \bar{a}^0$ (нагадуємо, що $\bar{a}^0$ – орт вектора $\bar{a}$).

11.3. Лінійно залежні й лінійно незалежні вектори

Означення. Лінійною комбінацією векторів $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ називається вектор:

$$\bar{a} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{a}_i \quad (11.1)$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – числа, які називають **коефіцієнтами** лінійної комбінації.

Означення. Система векторів $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ називається **лінійно незалежною**, якщо їхня лінійна комбінація (11.1) дорівнює нулю й тільки тоді, коли *всі* коефіцієнти $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ дорівнюють нулю.

Означення. Система векторів $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ називається **лінійно залежною**, якщо їхня лінійна комбінація (11.1) дорівнює нулю й тоді, коли *не всі* коефіцієнти $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ дорівнюють нулю.

Мають місце такі твердження:

Два неколінеарних вектори – лінійно незалежні.

Три некомпланарних вектори – лінійно незалежні.

Необхідною й достатньою ознакою лінійної залежності двох векторів є їхня колінеарність.

Необхідною й достатньою ознакою лінійної залежності трьох векторів є їхня компланарність.

11.4. Поняття векторного базису. Розкладання довільного вектора за базисом

Розглянемо n лінійно незалежних векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$. Будемо вважати, що $\bar{e}_1$ – перший вектор, $\bar{e}_2$ – другий вектор, ..., $\bar{e}_n$ – n -й вектор. Таку сукупність векторів будемо називати **упорядкованою**.

Означення. Базисом лінійного простору називається така упорядкована сукупність лінійно незалежних векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$, що кожен вектор лінійного простору єдиним способом може бути зображений у вигляді лінійної комбінації векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$.

$$\bar{a} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \dots + \lambda_n \bar{e}_n.$$

Базис на площині (у двовимірному просторі) складається з двох упорядкованих **неколінеарних** векторів: $\bar{e}_1, \bar{e}_2$.

Базис у просторі (у тривимірному просторі) складається з трьох упорядкованих **некомпланарних** векторів: $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Тобто кожний вектор $\bar{a}$ в тривимірному просторі можна представити у вигляді $\bar{a} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \lambda_3 \bar{e}_3$ (у двовимірному просторі $\bar{a} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2$). Така рівність називається **розкладанням вектора $\bar{a}$** за базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ (розкладанням вектора $\bar{a}$ за базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2$). Вектори $\lambda_1 \bar{e}_1, \lambda_2 \bar{e}_2, \lambda_3 \bar{e}_3$ називаються **складовими** вектора $\bar{a}$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ називаються **координатами (проекціями)** вектора $\bar{a}$ у базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

11.5. Проекція вектора на вісь

Означення. Проекцією вектора $\overline{AB}$ на вісь l ($\text{пр}_l \overline{AB}$) називається довжина відрізка A_1B_1 , який сполучає проєкції на цю вісь початку (A) і кінця (B) цього вектора, взята зі знаком «плюс», якщо кут α між вектором і додатним напрямом осі l гострий (рис.11.7), і знаком «мінус», якщо цей кут тупий (рис.11.8). Якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $\text{пр}_l \overline{AB} = 0$ (рис.11.9).

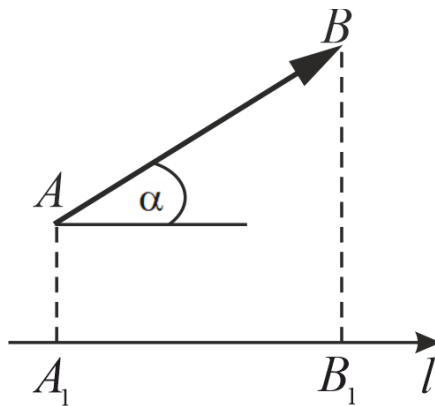


Рис. 11.7

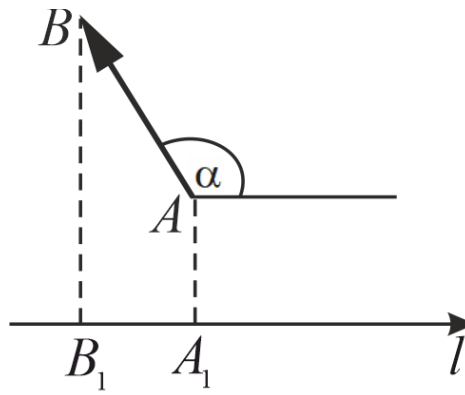


рис. 11.8

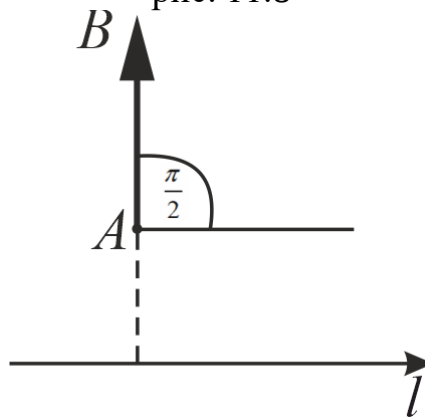


рис. 11.9

Маємо теорему: проєкція вектора $\overline{AB}$ на вісь l дорівнює добутку довжини вектора $\overline{AB}$ на косинус кута між цим вектором і віссю l :

$$\text{пр}_l \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos \alpha.$$

Основні властивості проєкцій:

1. $\text{пр}_l \lambda \overline{a} = \lambda \cdot \text{пр}_l \overline{a}$.
2. $\text{пр}_l (\overline{a} + \overline{b}) = \text{пр}_l \overline{a} + \text{пр}_l \overline{b}$.

Питання для самоперевірки

1. Які величини називаються скалярними? Наведіть приклади.
2. Які величини називаються векторними? Наведіть приклади.
3. Як геометрично зображується вектор?
4. Що таке модуль вектора, нульовий вектор, одиничний вектор, орт вектора?
5. Які вектори називають рівними, протилежними?
6. Що таке колінеарність і компланарність векторів?
7. У чому полягає правило трикутника (многокутника) за додавання векторів?
8. Що таке різниця векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$?
9. Як виконується множення вектора на число?
10. Сформулюйте властивості суми векторів, властивості множення вектора на число.

11. Яка система векторів називається лінійно залежною? Лінійно незалежною?
12. Що таке базис лінійного простору? Що таке базис у тривимірному просторі?
13. Яка рівність називається розкладанням вектора за базисом у тривимірному просторі?
14. Що таке складові вектора? Координати вектора?
15. Що називається проєкцією вектора $\overline{AB}$ на вісь l ?
16. Які основні властивості проєкцій векторів на вісь?

11.6. Прямокутна система координат. Розкладання вектора за базисом. Модуль вектора, проєкції вектора

Базисні вектори $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ у прямокутній (декартовій) системі координат позначають через $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$. Ці вектори задовольняють такі умови:

1. Вектор $\overline{i}$ лежить на осі OX (перший вектор), вектор $\overline{j}$ – на осі OY (другий вектор), вектор $\overline{k}$ – на осі OZ (третій вектор).
2. Кожний з векторів $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ спрямований по своїй осі в додатну сторону.
3. Вектори $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – одиничні, тобто $|\overline{i}| = |\overline{j}| = |\overline{k}| = 1$.

Початки цих векторів збігаються з початком системи координат (рис.11.10), тобто з точкою $O(0,0,0)$.

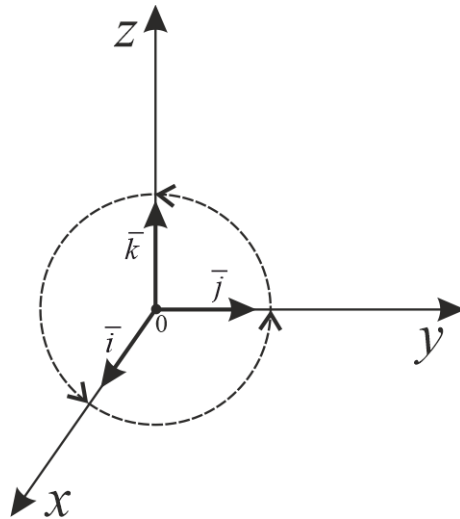


Рис.11.10

Прямокутні системи координат поділяються на праву та ліву. У правій системі за додатній напрям береться обертання «проти годинникової стрілки»: з кінця третього вектора $\overline{k}$ найкоротший поворот від першого вектора $\overline{i}$ до другого вектора $\overline{j}$ видно проти годинникової стрілки (тобто вектори $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ утворюють так звану праву трійку векторів). У лівій системі – за годинниковою стрілкою. Далі розглядатимемо тільки праві системи.

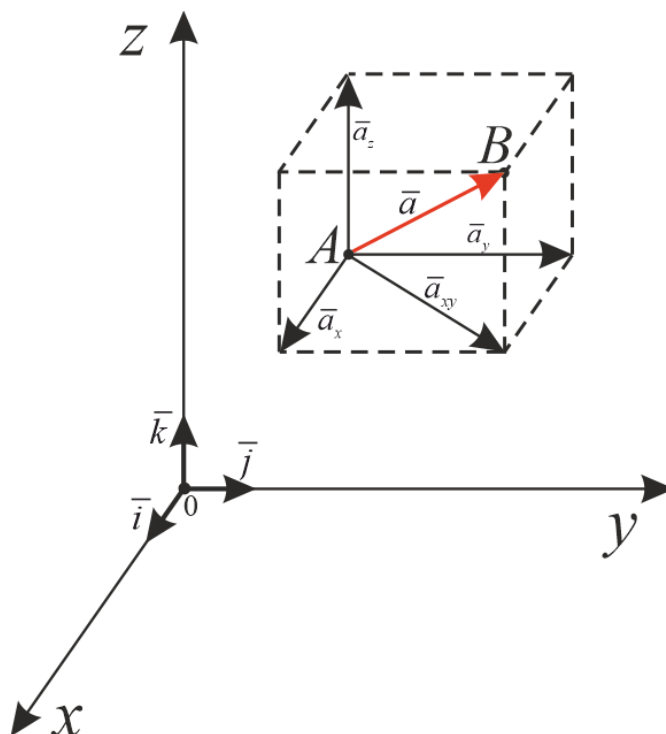


Рис.11.11

Розглянемо в тривимірному просторі вектор $\overline{AB} = \vec{a}$ (рис.11.11). Розкладемо його на складові: $\vec{a}_{xy}$ – паралельну площині XOY і $\vec{a}_z$ – паралельну осі OZ . Тоді вектор $\vec{a}$ можна записати у вигляді суми цих складових: $\vec{a} = \vec{a}_{xy} + \vec{a}_z$. Тепер вектор $\vec{a}_{xy}$ розкладемо на складові: $\vec{a}_x$ – паралельну осі OX , $\vec{a}_y$ – паралельну осі OY . $\vec{a}_{xy} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$. Тоді

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z.$$

Вектори $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ називають **складовими (компонентами) вектора $\vec{a}$** . Зауважимо, що компонента $\vec{a}_x$ колінеарна вектору $\vec{i}$, тому існує скалярний множник a_x такий, що $\vec{a}_x = a_x \cdot \vec{i}$. Аналогічно $\vec{a}_y = a_y \cdot \vec{j}$, $\vec{a}_z = a_z \cdot \vec{k}$. Тоді вектор $\vec{a}$ можна записати у вигляді:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}. \quad (11.2)$$

Цей вираз називається **розкладанням вектора за базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$** .

Числа a_x, a_y, a_z називають **проекціями вектора $\vec{a}$ на відповідні координатні осі**. Ще їх називають **координатами вектора**. Той самий вектор $\vec{a}$ можна записати таким чином: $\vec{a}\{a_x; a_y; a_z\}$ (рис.11.11).

Зауважимо, що вектор, заданий на площині XOY , має вигляд

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$$

або

$$\vec{a}\{a_x; a_y\}.$$

Вектор $r = \overline{OM}$ (рис.11.12), який з'єднує початок координат з довільною точкою $M(x, y, z)$ простору, називається **радіус-вектором точки M** . Цей вектор

можна записати так:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

або

$$\vec{r}\{x; y; z\}.$$

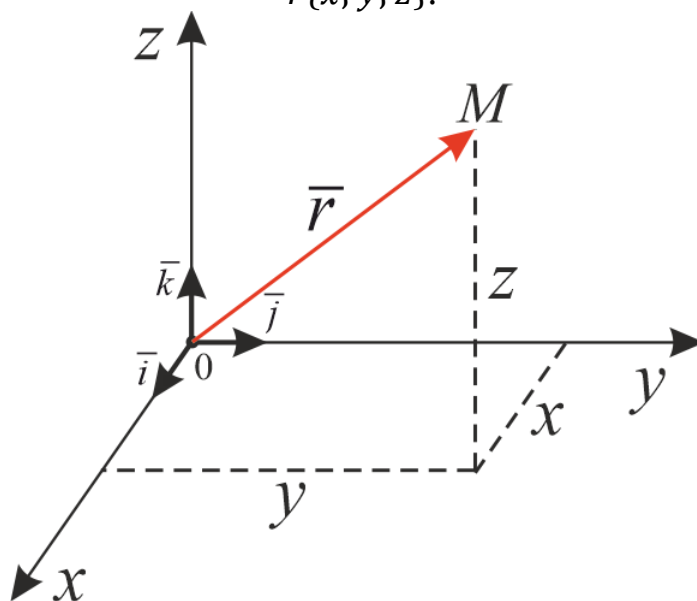


Рис.11.12

Приклад . Задано вектор $\vec{a}\{-3; 5; 1\}$. Записати його у вигляді (11.2).

Розв'язання.

$$\vec{a} = -3\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}.$$

Приклад . Задано вектор $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Знайти:

- 1) проєкцію вектора на вісь OY ;
- 2) проєкцію вектора на вісь OZ .

Розв'язання.

- 1) $\text{пр}_y \vec{a} = -1$;
- 2) $\text{пр}_z \vec{a} = 2$.

Зауважимо, якщо деяка проєкція вектора дорівнює нулю, то вектор буде перпендикулярним до цієї осі. Наприклад, вектор $\vec{a}\{-3; 0; 1\}$ перпендикулярний до осі OY . Його ще можна записати у вигляді $\vec{a} = -3\vec{i} + \vec{k}$.

Нехай у тривимірному просторі задано дві точки: $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$. Утворимо вектор $\overline{AB} = \vec{a}$ (рис.11.13). Через початок і кінець цього вектора проведемо площини, паралельні координатним площинам. Тоді координати точок перетину цих площин з координатними осями будуть: $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$. І координати (проєкції) вектора $\overline{AB}$ на відповідній осі можна записати так:

$$\text{пр}_x \overline{AB} = x_2 - x_1.$$

$$\text{пр}_y \overline{AB} = y_2 - y_1.$$

$$\text{пр}_z \overline{AB} = z_2 - z_1.$$

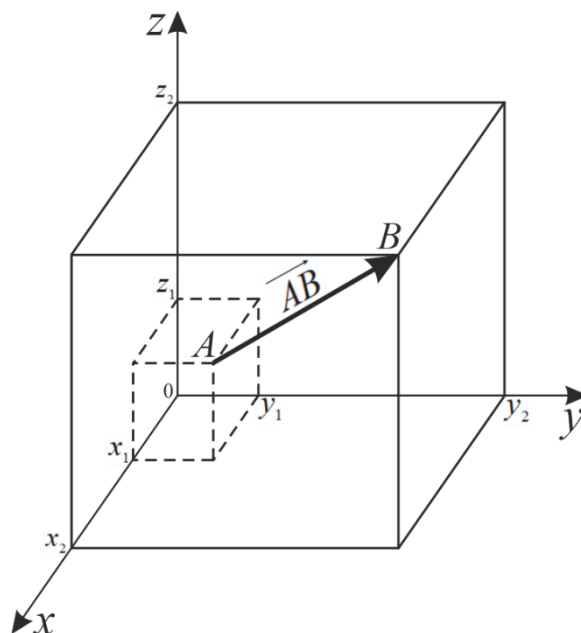


Рис.11.13

Тобто вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ однозначно визначається трійкою чисел:

$$\begin{aligned} a_x &= x_2 - x_1, \\ a_y &= y_2 - y_1, \\ a_z &= z_2 - z_1. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Тепер нехай вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ заданий у двовимірному просторі (рис.11.14).

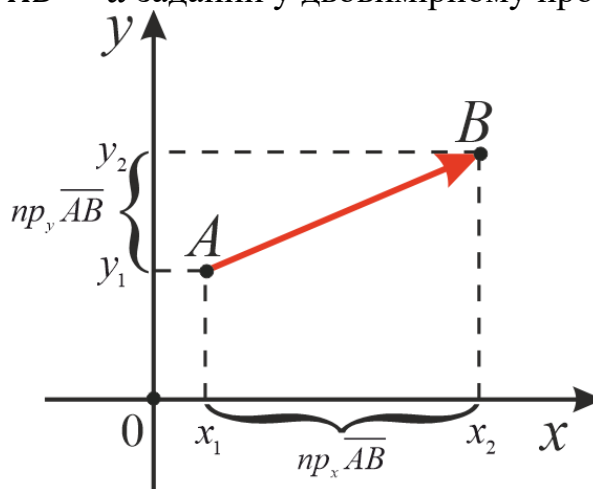


Рис.11.14

Усі формули аналогічні попереднім:

$$\begin{aligned} \text{пр}_x \overrightarrow{AB} &= x_2 - x_1, \\ \text{пр}_y \overrightarrow{AB} &= y_2 - y_1. \end{aligned}$$

Знову повертаємося до тривимірного простору. Потрібно запам'ятати, що вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ можна записувати в різному вигляді (а от який саме вигляд вибрати для розв'язання прикладів – вирішуйте ви):

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k},$$

$$\bar{a}\{a_x; a_y; a_z\},$$

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k},$$

$$\overline{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}.$$

Приклад . Задано точки $A(4,0,-2)$, $B(1,3,7)$. Знайти вектор $\overline{AB} = \bar{a}$.

Розв'язання.

За формулою (11.3):

$$a_x = x_2 - x_1 = 1 - 4 = -3,$$

$$a_y = y_2 - y_1 = 3 - 0 = 3,$$

$$a_z = z_2 - z_1 = 7 - (-2) = 9.$$

Тоді:

$$\overline{AB} = \bar{a} = -3\bar{i} + 3\bar{j} + 9\bar{k}.$$

І нарешті, знайдемо формулу для обчислення довжини (модуля) вектора. Для спрощення почнемо з вектора, заданого на площині (двовимірний простір).

Довжина (модуль) вектора $\bar{a}$ – це довжина гіпотенузи трикутника ABC :

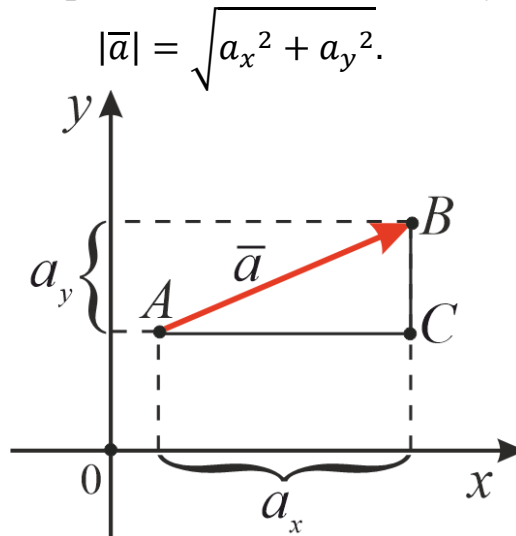


Рис.11.15

Якщо вектор $\bar{a}$ задано в просторі, то модуль вектора буде обчислюватися за формулою

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (11.4)$$

Приклад . Обчислити модуль вектора $\bar{a}\{7; 2; -1\}$.

Розв'язання.

За формулою (11.4)

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{49 + 4 + 1} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}.$$

Зауваження. Проекції вектора можуть бути додатними, від'ємними й навіть дорівнювати нулю. Як завжди, для спрощення розглянемо двовимірний простір.

Задано точки:

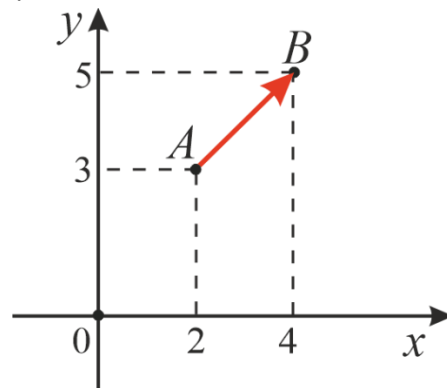
1. $A(2,3)$, $B(4,5)$.

2. $A(5,1), B(2,3)$.

3. $A(-5,4), B(4,1)$.

4. $A(-6,-2), B(-1,-2)$.

Побудувати вектори $\overline{AB}$:



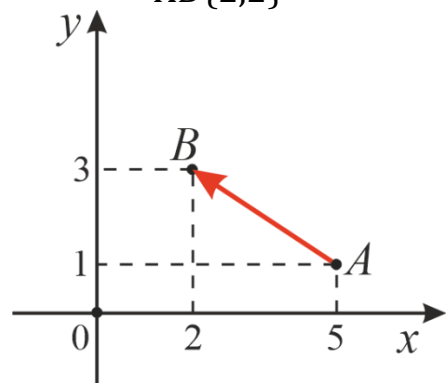
1.

Рис.11.16

$$\text{пр}_x \overline{AB} = 4 - 2 = 2$$

$$\text{пр}_y \overline{AB} = 5 - 3 = 2$$

$$\overline{AB}\{2,2\}$$



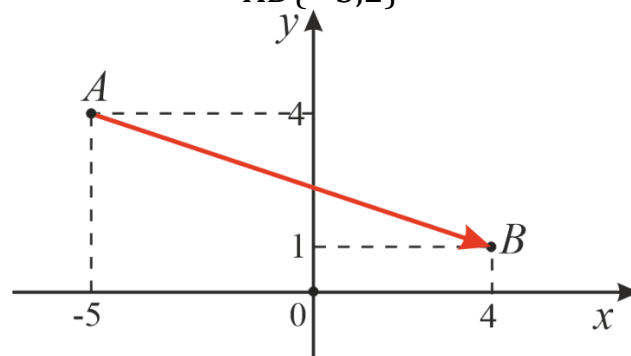
2.

Рис.11.17

$$\text{пр}_x \overline{AB} = 2 - 5 = -3$$

$$\text{пр}_y \overline{AB} = 3 - 1 = 2$$

$$\overline{AB}\{-3,2\}$$



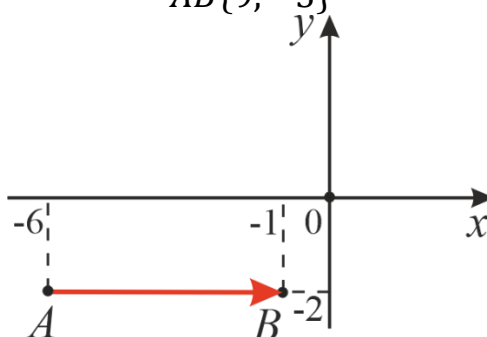
3.

Рис.11.18

$$\text{пр}_x \overline{AB} = 4 - (-5) = 9$$

$$\text{пр}_y \overline{AB} = 1 - 4 = -3$$

$$\overline{AB}\{9, -3\}$$



4.

Рис.11.19

$$\text{пр}_x \overline{AB} = -1 - (-6) = 5$$

$$\text{пр}_y \overline{AB} = -2 - (-2) = 0$$

$$\overline{AB}\{5, 0\}$$

Зауваження. У прикладі ми побудували вектори, які розташовані в двовимірному просторі. Але якщо спробувати будувати вектори в тривимірному просторі, то цей процес буде ускладнюватись. До того ж вектори в n-вимірному просторі побудувати неможливо. Тобто лінійні операції з такими векторами неможливі. У наступному розділі ми розглянемо інший спосіб дій з векторами, який не потребує їх побудови.

11.7. Дії з векторами, які задані своїми проєкціями

Розглянемо дві дуже прості дії:

1. Додавання (віднімання) векторів.
2. Множення вектора на число.

Нехай задано два вектори: $\overline{a}\{a_x; a_y; a_z\}$, $\overline{b}\{b_x; b_y; b_z\}$ і число λ ($\lambda \neq 0$).

1. Для того щоб додати два вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, потрібно додати їхні відповідні проєкції. Тобто

$$\overline{a} + \overline{b}\{a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z\}.$$

Цю дію можна записати інакше:

$$\overline{a} + \overline{b} = (a_x + b_x)\overline{i} + (a_y + b_y)\overline{j} + (a_z + b_z)\overline{k}.$$

Аналогічно формулюється дія віднімання векторів:

$$\overline{a} - \overline{b}\{a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z\}$$

або

$$\overline{a} - \overline{b} = (a_x - b_x)\overline{i} + (a_y - b_y)\overline{j} + (a_z - b_z)\overline{k}.$$

2. Для того щоб помножити вектор $\overline{a}$ на число λ , потрібно помножити кожен проєкцію на це число:

$$\lambda \overline{a}\{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\}$$

або

$$\lambda \bar{a} = \lambda a_x \bar{i} + \lambda a_y \bar{j} + \lambda a_z \bar{k}.$$

Зауваження. Ми розглянули дії з векторами, які задані в тривимірному просторі, але й для векторів, які задані у n -вимірному просторі, правила додавання (віднімання) і множення на число залишаються такими самими.

Приклад. Задано вектори $\bar{a}\{-4; 1; 3\}$, $\bar{b}\{5; -2; -3\}$. Знайти: **1)** $\bar{a} + \bar{b}$; **2)** $-2\bar{b}$; **3)** $3\bar{a} + \bar{b}$.

Розв'язання.

1) $\bar{a} + \bar{b}\{-4 + 5; 1 + (-2); 3 + (-3)\}$, тобто $\bar{a} + \bar{b}\{1; -1; 0\}$,
або $\bar{a} + \bar{b} = \bar{i} - \bar{j}$;

2) $-2\bar{b}\{-10; 4; 6\}$, або $-2\bar{b} = -10\bar{i} + 4\bar{j} + 6\bar{k}$;

3) $3\bar{a} + \bar{b}\{-7; 1; 6\}$, або $3\bar{a} + \bar{b} = -7\bar{i} + \bar{j} + 6\bar{k}$.

Умова колінеарності векторів

Нехай задано два вектори: $\bar{a}\{a_x; a_y; a_z\}$, $\bar{b}\{b_x; b_y; b_z\}$. Якщо вектори колінеарні, то умову $\bar{a} \parallel \bar{b}$ можна записати у вигляді: $\bar{a} = \lambda \bar{b}$ (λ – число, $\lambda \neq 0$), або $\{a_x; a_y; a_z\} = \{\lambda b_x; \lambda b_y; \lambda b_z\}$.

Вектори рівні, коли рівні їх відповідні проекції:

$$a_x = \lambda b_x;$$

$$a_y = \lambda b_y;$$

$$a_z = \lambda b_z;$$

$$\text{Звідси: } \lambda = \frac{a_x}{b_x}, \lambda = \frac{a_y}{b_y}, \lambda = \frac{a_z}{b_z}.$$

Або

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}, \quad (11.5)$$

Рівності (11.5) визначають умову колінеарності векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Приклад. За яких значень α і β вектори $\bar{a}\{\alpha; 4; -1\}$ і $\bar{b}\{-6; \beta; 2\}$ будуть колінеарними.

Розв'язання.

За умовою колінеарності двох векторів (11.5)

$$\frac{\alpha}{-6} = \frac{4}{\beta} = \frac{-1}{2}.$$

$$\text{Звідси} \quad \frac{\alpha}{-6} = \frac{-1}{2},$$

$$\alpha = 3;$$

$$\frac{4}{\beta} = \frac{-1}{2},$$

$$\beta = -8.$$

11.8. Напрямні косинуси вектора

Розглянемо вектор $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$. Позначимо кути між вектором $\vec{a}$ і осями координат таким чином:

$$\begin{aligned}(\vec{a} \wedge OX) &= \alpha, \\(\vec{a} \wedge OY) &= \beta, \\(\vec{a} \wedge OZ) &= \gamma.\end{aligned}$$

$\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ називають **напрямними косинусами** вектора $\vec{a}$.

Запишемо проєкції вектора $\vec{a}$ на осі координат (див. п. 1.4): $a_x = |\vec{a}| \cos \alpha$, $a_y = |\vec{a}| \cos \beta$, $a_z = |\vec{a}| \cos \gamma$. Звідси:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \\ \cos \beta &= \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \\ \cos \gamma &= \frac{a_z}{|\vec{a}|}.\end{aligned}\tag{11.6}$$

Напрямні косинуси пов'язані між собою співвідношенням

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.\tag{11.7}$$

Дійсно,

$$\frac{a_x^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_y^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_z^2}{|\vec{a}|^2} = \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{|\vec{a}|^2} = 1.$$

Якщо вектор $\vec{a}$ заданий на площині XOY , то $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $a_z = 0$ і напрямні косинуси пов'язані співвідношенням $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$.

Приклад. Обчислити напрямні косинуси вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

Розв'язання.

Знайдемо модуль вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{38}.$$

Тоді за формулою (11.6) $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{3}{\sqrt{38}}$, $\cos \beta = -\frac{2}{\sqrt{38}}$, $\cos \gamma = \frac{5}{\sqrt{38}}$.

Основні формули розділу

Опис	Формула
Базис у прямокутній системі координат	$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$
Розкладання вектора $\vec{a}$ по базису	$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$
Запис вектора $\vec{a}$ в координатній формі	$\vec{a}\{a_x; a_y; a_z\}$
Задання вектора $\vec{a}$ через точки: $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$	$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$ $\vec{AB}\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$
Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь OX	$\text{пр}_x \vec{AB} = x_2 - x_1 = a_x$

Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь OY	$\text{пр}_y \vec{AB} = y_2 - y_1 = a_y$
Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь OZ	$\text{пр}_z \vec{AB} = z_2 - z_1 = a_z$
Модуль вектора $\vec{a}$	$ \vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
Додавання векторів	$\vec{a} + \vec{b} \{a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z\}$
Віднімання векторів	$\vec{a} - \vec{b} \{a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z\}$
Множення вектора на число	$\lambda \vec{a} \{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\}$
Ознака колінеарності векторів $\vec{a} \{a_x; a_y; a_z\}, \vec{b} \{b_x; b_y; b_z\}$	$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$
Проекції вектора $\vec{a}$ на осі координат (за допомогою напрямних косинусів)	$a_x = \vec{a} \cos \alpha,$ $a_y = \vec{a} \cos \beta,$ $a_z = \vec{a} \cos \gamma$
Напрямні косинуси вектора $\vec{a}$	$\cos \alpha = \frac{a_x}{ \vec{a} }$ $\cos \beta = \frac{a_y}{ \vec{a} }$ $\cos \gamma = \frac{a_z}{ \vec{a} }$
Співвідношення, яким пов'язані напрямні косинуси, якщо вектор заданий у тривимірному просторі	$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$
Співвідношення, яким пов'язані напрямні косинуси, якщо вектор $\vec{a}$ заданий на площині XOY	$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$

Питання для самоперевірки

1. Як прийнято позначати базисні вектори в прямокутній системі координат? Які умови задовольняють ці вектори?
2. Що таке компоненти вектора?
3. Який вигляд має формула розкладання вектора $\vec{a}$ за базисом $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$? Що таке a_x, a_y, a_z ?
4. Як записати вектор у координатній формі, якщо відомі координати його початку $A(x_1, y_1, z_1)$ і кінця $B(x_2, y_2, z_2)$? Чому дорівнюють проекції вектора $\vec{AB}$ на координатні осі?
5. За якою формулою знаходять довжину (модуль) вектора $\vec{a}$?
6. Як здійснюються лінійні операції над векторами в координатній формі (додавання векторів, віднімання векторів, множення вектора на число)?
7. Як записується ознака колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$?
8. Що таке кути α, β і γ ?

9. За якою формулою обчислюють напрямні косинуси вектора? Яке співвідношення вони задовольняють?

Розв'язання прикладів

Розділ I (найпростіші приклади)

Приклад 1. Знайти координати векторів $\overline{AB}$ і $\overline{BA}$ та їхню довжину, якщо $A(0,3,-2)$, $B(4,1,5)$.

Розв'язання.

$$\overline{AB}\{4-0; 1-3; 5-(-2)\}, \text{ або } \overline{AB}\{4; -2; 7\};$$

$$\overline{BA}\{0-4; 3-1; -2-5\} \text{ або } \overline{BA}\{-4; 2; -7\};$$

$$|\overline{AB}| = |\overline{BA}| = \sqrt{16+4+49} = \sqrt{69}.$$

Зауваження. Вектори $\overline{AB}$ і $\overline{BA}$ протилежні. Вони мають однакові модулі, а проєкції відрізняються знаком. Тому надалі за відомим вектором $\overline{AB}$ можна відразу записати й вектор $\overline{BA}$.

Приклад 2. Дано $M(4,0,-3)$, $N(2,-3,5)$. Знайти проєкції $\overline{MN}$ на осі координат.

Розв'язання.

Знайдемо вектор $\overline{MN}$: $\overline{MN}\{-2; -3; 8\}$. Тоді $\text{пр}_x \overline{MN} = -2$, $\text{пр}_y \overline{MN} = -3$, $\text{пр}_z \overline{MN} = 8$.

Приклад 3. Дано $\overline{AB} = 4\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$, $A(3; 1; -2)$. Знайти координати точки B .

Розв'язання.

Відомо, що $\text{пр}_x \overline{AB} = x_2 - x_1$, $\text{пр}_y \overline{AB} = y_2 - y_1$, $\text{пр}_z \overline{AB} = z_2 - z_1$. Координати точки A відомі: $x_1 = 3$, $y_1 = 1$, $z_1 = -2$.

Проєкції вектора $\overline{AB}$ відомі: $\text{пр}_x \overline{AB} = 4$, $\text{пр}_y \overline{AB} = -1$, $\text{пр}_z \overline{AB} = 2$. Тоді:

$$x_2 = \text{пр}_x \overline{AB} + x_1 = 4 + 3 = 7;$$

$$y_2 = \text{пр}_y \overline{AB} + y_1 = -1 + 1 = 0;$$

$$z_2 = \text{пр}_z \overline{AB} + z_1 = 2 + (-2) = 0.$$

Таким чином, $B(7,0,0)$.

Приклад 4. Дано $\overline{MN}\{-3; 1; 0\}$, $N(5,3,-1)$. Знайти координати точки M .

Розв'язання.

Використаємо формули попереднього прикладу. Але тепер нам потрібно знайти координати точки $M(x_1, y_1, z_1)$.

$$x_1 = x_2 - \text{пр}_x \overline{MN} = 5 - (-3) = 8;$$

$$y_1 = y_2 - \text{пр}_y \overline{MN} = 3 - 1 = 2;$$

$$z_1 = z_2 - \text{пр}_z \overline{MN} = -1 - 0 = -1.$$

Координати точки $M(8; 2; -1)$.

Приклад 5. Дано $\bar{a}\{4; -2; 1\}$, $\bar{b}\{0; 8; 6\}$. Знайти: 1) $\bar{a} + \bar{b}$; 2) $\bar{a} - \bar{b}$; 3) $3\bar{a}$; 4) $\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}$.

Розв'язання.

1) $\bar{a} + \bar{b}\{4 + 0; -2 + 8; 1 + 6\} = \{4; 6; 7\};$

2) $\bar{a} - \bar{b}\{4; -10; -5\};$

3) $3\bar{a}\{12; -6; 3\};$

4) $\frac{1}{2}\bar{b}\{0; 4; 3\}$, тоді $\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}\{4; -6; -2\}.$

Приклад 6. Дано $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{k}$, $\bar{b} = 3\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$. Знайти: 1) $|\bar{a} + \bar{b}|$; 2) $|2\bar{a} - \bar{b}|$

Розв'язання.

1) Спочатку знайдемо вектор $\bar{a} + \bar{b}$: $\bar{a} + \bar{b}\{5; 1; -1\}$. Тепер знайдемо модуль цього вектора: $|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{25 + 1 + 1} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$

2) Аналогічно: $2\bar{a} - \bar{b}\{1; -1; -8\}.$

$$|2\bar{a} - \bar{b}| = \sqrt{1 + 1 + 64} = \sqrt{66}.$$

Приклад 7. Дано вектор $\overline{PQ}\{3; 4; -2\}$. Знайти напрямні косинуси вектора.

Розв'язання.

Знайдемо модуль вектора $\overline{PQ}$: $|\overline{PQ}| = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}$. Тоді за формулою (11.6): $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{29}}$, $\cos \beta = \frac{4}{\sqrt{29}}$, $\cos \gamma = -\frac{2}{\sqrt{29}}.$

Приклад 8. Визначити, за яких значень α_1 і α_2 вектори $\bar{a} = 3\bar{i} - 5\bar{j} + \alpha_1\bar{k}$ і $\bar{b} = 2\bar{i} + \alpha_2\bar{j} + 4\bar{k}$ колінеарні.

Розв'язання.

$\bar{a}\{3; -5; \alpha_1\}$, $\bar{b}\{2; \alpha_2; 4\}$. За умовою колінеарності (11.5): $\frac{3}{2} = \frac{-5}{\alpha_2} = \frac{\alpha_1}{4}.$

Звідси $\frac{3}{2} = \frac{-5}{\alpha_2}$, $\alpha_2 = -\frac{10}{3}.$

$\frac{3}{2} = \frac{\alpha_1}{4}$, $\alpha_1 = 6.$

Приклад 9. Знайти координати вектора $\bar{c}$, якщо відомі кути, які вектор утворює з відповідними осями координат: $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$, і його довжина $|\bar{c}| = 2$.

Розв'язання.

$$\cos \alpha = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos \beta = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \cos \gamma = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Тоді } c_x = |\bar{c}| \cos \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}; c_y = |\bar{c}| \cos \beta = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1;$$

$$c_z = |\bar{c}| \cos \gamma = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Таким чином, $\bar{c}\{\sqrt{2}; 1; -1\}.$

Приклад 10. Вектор $\bar{a}$ утворює з осями координат OX і OY кути $\alpha = 60^\circ$ і $\beta = 45^\circ$. Який кут γ він утворює з віссю OZ (якщо $\gamma > 0$)?

Розв'язання.

За співвідношенням (11.7) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$

Оскільки $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\cos^2 \gamma = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. $\cos \gamma = \pm \frac{1}{2}$. За умовою $\gamma > 0$, тому $\gamma = 60^\circ$.

Розділ II

Приклад 1. Довести, що точки $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(-1, 1, -3)$ і $D(3, -5, 3)$ є вершинами трапеції (якщо AB і CD прийняти за основи трапеції).

Розв'язання.

Знайдемо вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$. А потім перевіримо, чи будуть вони колінеарні.

$\overline{AB}\{-2; 3; -3\}$, $\overline{CD}\{4; -6; 6\}$. Застосуємо умову колінеарності (5):

$\frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$. Дійсно, вектори колінеарні й задані точки є вершинами трапеції.

Приклад 2. Дано точки $M(-1, 5, -10)$, $N(5, -7, 8)$, $P(2, 2, -7)$ і $Q(5, -4, 2)$. Довести що вектори $\overline{MN}$ і $\overline{PQ}$ колінеарні. Встановити, який з них довший і в скільки разів? Як вони спрямовані: в один бік чи в протилежні сторони?

Розв'язання.

Знайдемо вектори

$$\overline{MN}\{6; -12; 18\},$$

$$\overline{PQ}\{3; -6; 9\}.$$

За ознакою колінеарності: $\frac{6}{3} = \frac{-12}{-6} = \frac{18}{9} = 2$.

Дійсно, вектори $\overline{MN}$ і $\overline{PQ}$ колінеарні. Знайдемо їхні модулі:

$$|\overline{MN}| = \sqrt{6^2 + (-12)^2 + 18^2} = \sqrt{36 + 144 + 324} = \sqrt{504} = 6\sqrt{14},$$

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 9^2} = \sqrt{9 + 36 + 81} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}.$$

Таким чином, вектор $\overline{MN}$ (довжина якого $6\sqrt{14}$) у два рази довший вектора $\overline{PQ}$ (довжина якого $3\sqrt{14}$). Оскільки відповідні проєкції векторів мають однакові знаки, то вектори спрямовані в один бік.

Приклад 3. Перевірити, чи будуть утворювати два вектори $\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j}$ і $\vec{b} = -10\vec{i} + 2\vec{j}$ (у двовимірному просторі) базис?

Розв'язання.

Базис на площині складається з двох неколінеарних векторів. Перевіримо вектори на колінеарність (11.5): $\vec{a}\{5; -1\}$, $\vec{b}\{-10; 2\} \Rightarrow \frac{5}{-10} = \frac{-1}{2} \Rightarrow$ вектори колінеарні, а тому вони базис не утворюють.

Приклад 4. Дано $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Обчислити $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Розв'язання.

Побудуємо паралелограм зі сторонами $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$ (рис.11.20).

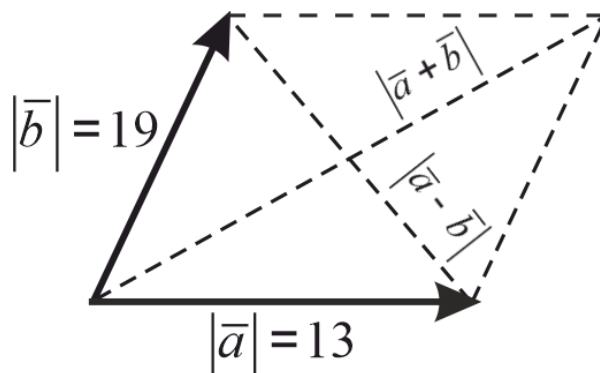


Рис.11.20

Тоді $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$ – це діагоналі паралелограма. Застосуємо теорему: сума квадратів сторін паралелограма дорівнює сумі квадратів його діагоналей.

$$2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2,$$

$$2 \cdot 169 + 2 \cdot 361 = 576 + |\vec{a} - \vec{b}|^2,$$

$$1060 = 576 + |\vec{a} - \vec{b}|^2.$$

Звідси $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 484$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 22$.

Приклад 5. Дано вектор $\vec{c} = 4\vec{i} + 7\vec{j} - 4\vec{k}$. Знайти вектор $\vec{d}$ колінеарний вектору $\vec{c}$ і протилежно спрямований, якщо $|\vec{d}| = 27$.

Розв'язання.

Якщо вектори колінеарні, то їхні проєкції пропорційні. $\vec{c}\{4; 7; -4\}$, тоді $\vec{d}\{4\alpha; 7\alpha; -4\alpha\}$, де α – коефіцієнт пропорційності. Застосуємо формулу обчислення довжини вектора $|\vec{d}| = 27 = \sqrt{16\alpha^2 + 49\alpha^2 + 16\alpha^2} = \sqrt{81\alpha^2}$, $\alpha = \pm 3$. За умовою прикладу вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ протилежно спрямовані, тому $\alpha = -3$. Тоді $\vec{d}\{-12; -21; 12\}$ або $\vec{d} = -12\vec{i} - 21\vec{j} + 12\vec{k}$.

Приклад 6. Задано вектори $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$. Знайти: 1) орт вектора $\vec{a}$, тобто $\vec{a}^\circ$; 2) координати вектора $\vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$;

3) $\text{pr}_z(\vec{a} + \vec{b})$; 4) $\cos \gamma$ вектора $\vec{c} + 2\vec{b}$.

Розв'язання.

1) За означенням $\vec{a}^\circ = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Тому $|\vec{a}| = \sqrt{16 + 9 + 0} = 5$. Тоді $\vec{a}^\circ \left\{ \frac{4}{5}; \frac{3}{5}; 0 \right\}$.

2) Знайдемо $2\vec{b}\{0; -6; -4\}$ і $\frac{1}{3}\vec{c}\{1; 2; -1\}$. Тоді $\vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\{5; 11; 3\}$.

3) Знайдемо вектор $\vec{a} + \vec{b}\{4; 0; -2\}$. Тоді проєкція цього вектора на вісь OZ дорівнює -2.

4) Знайдемо вектор $\vec{c} + 2\vec{b}\{3; 0; -7\}$, а тепер модуль цього вектора:

$$|\vec{c} + 2\vec{b}| = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}, \text{ тоді } \cos \gamma = \frac{\text{pr}_z(\vec{c} + 2\vec{b})}{|\vec{c} + 2\vec{b}|} = -\frac{7}{\sqrt{58}}.$$

Приклад 7. Радіус-вектор точки M ($\vec{r}(M)$) утворює кут з віссю OY $\beta =$

60° , з віссю OZ $\gamma = 45^\circ$. $|\vec{r}(M)| = 8$. Знайти координати точки M , якщо абсциса точки від'ємна.

Розв'язання. Скористаємося формулами (11.6), враховуючи, що

$\vec{r}(M) \{r_x, r_y, r_z\}$: $\cos \beta = \frac{r_y}{|\vec{r}|} = \frac{1}{2}$; якщо $|\vec{r}| = 8$, то звідси $r_y = 4$.

Аналогічно $\cos \gamma = \frac{r_z}{|\vec{r}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; звідси $r_z = 4\sqrt{2}$. Тепер обчислимо модуль вектора $\vec{r}(M)$:

$$\sqrt{r_x^2 + 16 + 32} = 8 \Rightarrow r_x^2 + 48 = 64 \Rightarrow r_x^2 = 16 \Rightarrow r_x = \pm 4.$$

За умови прикладу абсциса точки M повинна бути від'ємною.

Отже, $M(-4, 4, 4\sqrt{2})$.

Приклади для аудиторної роботи

Приклад 1. Задано точки $M(2, 3, -1)$ і $N(-4, 2, 1)$. Знайти: 1) $\overline{MN}$; 2) $|\overline{MN}|$.

Приклад 2. Задано точки $P(1, -7, 0)$ і $Q(1, -3, 8)$. Знайти: 1) $\text{пр}_x \overline{PQ}$; 2) $\text{пр}_y \overline{PQ}$.

Приклад 3. Задано вектор $\overline{AB}\{8; 0; -3\}$ і точка $B(1, 7, 0)$. Знайти координати точки A .

Приклад 4. Задано вектор $\overline{MN} = 2\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$ і точка $M(0, -3, 4)$. Знайти координати точки N .

Приклад 5. Задано вектори $\vec{p} = 7\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$ і $\vec{q} = 12\vec{k}$. Знайти:

1) $2\vec{p}$; 2) $\vec{p} + \vec{q}$; 3) $3\vec{p} - \frac{1}{4}\vec{q}$; 4) $|\vec{p} - \vec{q}|$; 5) $|2\vec{p} + \vec{q}|$.

Приклад 6. Задано вектор $\overline{AB}\{6; 0; -3\}$. Знайти: $\cos \alpha$; $\cos \beta$; $\cos \gamma$.

Приклад 7. Вектор $\vec{a}$ утворює з осями координат кути: α, β і γ . Чи можуть вони дорівнювати $120^\circ, 45^\circ$ і 60° відповідно?

Приклад 8. Задано вектори $\vec{p} = -3\vec{i} - \alpha_1\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{q}\{\alpha_2; 7; 4\}$. За яких значень α_1 і α_2 вектори будуть колінеарними?

Приклади для самостійного розв'язання

Приклад 1. Задано точки $M(3, 0, -1)$ і $N(1, 2, 5)$. Знайти: 1) $\overline{MN}$; 2) $|\overline{MN}|$; 3) $\text{пр}_y \overline{MN}$; 4) $\cos \alpha$.

Приклад 2. Задано вектор $\overline{PQ}\{0; -4; 2\}$ і точка $Q(1, 7, 0)$. Знайти координати точки P .

Приклад 3. Задано вектори $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ і $\vec{b} = -2\vec{i} + 8\vec{k}$. Знайти: 1) $3\vec{a}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; 3) $2\vec{a} + \vec{b}$; 4) $|\vec{a} - \vec{b}|$; 5) $|\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}|$.

Приклад 4. Визначити, за яких значень λ_1 і λ_2 вектори $\vec{a}\{\lambda_1; 3; 5\}$ і $\vec{b}\{4; \lambda_2; 15\}$ будуть колінеарними.

Приклад 5. Задано вектор $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Знайти вектор $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, $a_y = b_y$, $b_x = 0$.

Відповіді:

Приклад 1. 1) $\overline{MN}\{-2; 2; 6\}$; 2) $|\overline{MN}|=2\sqrt{11}$; 3) $\text{пр}_y \overline{MN}=2$;

4) $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{11}}$.

Приклад 2. $P(1, 11, -2)$.

Приклад 3. 1) $3\overline{a} = 9\overline{i} + 12\overline{j} - 3\overline{k}$, або $3\overline{a}\{9; 12; -3\}$; 2) $-\frac{1}{2}\overline{b}\{1; 0; -4\}$;

3) $2\overline{a} + \overline{b}\{4; 8; 6\}$; 4) $|\overline{a} - \overline{b}|=\sqrt{122}$; 5) $|\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}|=\sqrt{29}$.

Приклад 4. $\lambda_1 = \frac{4}{3}$; $\lambda_2=9$.

Приклад 5. Два вектори, які задовольняють умови прикладу:

$\overline{b}\{0; -2; 5\}$ і $\overline{b}\{0; -2; -5\}$.

Ми вже знаємо, як додавати (віднімати) вектори, як множити вектор на число. Перейдемо до операції множення векторів.

Два вектори можна перемножати двома способами:

скалярно – одержимо число (скаляр);

векторно – одержимо вектор.

11.9. Скалярний добуток векторів

Означення. Скалярним добутком векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають добуток довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos(\widehat{\overline{a}\overline{b}}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos \varphi. \quad (11.8)$$

Скалярний добуток позначають так: $(\overline{a}\overline{b})$, або $\overline{a} \cdot \overline{b}$, або просто $\overline{a}\overline{b}$.

Приклад. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Знайти скалярний добуток векторів, якщо $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 2$.

Розв'язання.

За формулою (11.8) $\overline{a}\overline{b} = 3 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Зауважимо, що $|\overline{b}| \cos \varphi = \text{пр}_{\overline{a}} \overline{b}$, $|\overline{a}| \cos \varphi = \text{пр}_{\overline{b}} \overline{a}$. Підставивши ці співвідношення у формулу (11.8), дістанемо ще одну формулу скалярного добутку:

$$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}| \text{пр}_{\overline{a}} \overline{b} = |\overline{b}| \text{пр}_{\overline{b}} \overline{a}. \quad (11.9)$$

Зазвичай ця формула використовується для визначення проєкції одного вектора на другий вектор:

$$\text{пр}_{\overline{a}} \overline{b} = \frac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{a}|}; \quad (11.10)$$

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Зауваження. Якщо у формулі (11.8) прийняти $\vec{b} = \vec{a}$, то одержимо:

$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$, тобто $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$. Отже, **скалярний квадрат вектора дорівнює квадратові його довжини.**

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, \text{ звідси } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}. \quad (11.11)$$

Зауважимо, що $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{i}^2 = |\vec{i}|^2 = 1$; $\vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{j}^2 = |\vec{j}|^2 = 1$; $\vec{k} \cdot \vec{k} = \vec{k}^2 = |\vec{k}|^2 = 1$.

Ці рівності ми застосуємо надалі.

Приклад. Дано: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{\pi}{3}$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Розв'язання.

За формулою (11.11): $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2}$. Обчислимо суму під коренем: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 4$; $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 9$; $\vec{a}\vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$. Тоді:
 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{4 + 2 \cdot 3 + 9} = \sqrt{19}$.

Властивості скалярного добутку

Алгебраїчні властивості:

1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$.
2. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$.
3. $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$.

Геометричні властивості:

1. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ **ненульові** і $\vec{a}\vec{b} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.
Правильним є і зворотне твердження: якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi = 0$ і $\vec{a}\vec{b} = 0$. Звідси $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$, тому що $\vec{i} \perp \vec{j}$; $\vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$, тому що $\vec{i} \perp \vec{k}$; $\vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$, тому що $\vec{j} \perp \vec{k}$.
Отже, якщо скалярний добуток дорівнює нулю, то вектори взаємно перпендикулярні, і навпаки, якщо вектори взаємно перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю.
2. $\vec{a}\vec{b} > 0$, якщо $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.
3. $\vec{a}\vec{b} < 0$, якщо $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.
4. Якщо $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ (у цьому випадку $\cos\varphi = 1$, $\varphi = 0$), то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні й збігаються за напрямом.

11.9.1. Скалярний добуток векторів у координатній формі

Крім формул (11.8) і (11.9), існує ще одна формула визначення скалярного добутку.

Нехай $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$. Знайдемо $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{i}}_{=1} + a_x b_y \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{j}}_{=0} + a_x b_z \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{k}}_{=0} + a_y b_x \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{i}}_{=0} + a_y b_y \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{j}}_{=1} + a_y b_z \underbrace{\vec{j} \cdot \vec{k}}_{=0} \\ &\quad + a_z b_x \underbrace{\vec{k} \cdot \vec{i}}_{=0} + a_z b_y \underbrace{\vec{k} \cdot \vec{j}}_{=0} + a_z b_z \underbrace{\vec{k} \cdot \vec{k}}_{=1} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.\end{aligned}$$

Таким чином дістаємо:

$$\vec{a} \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (11.12)$$

Приклад. Дано два вектори: $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$. Знайти $\vec{a} \vec{b}$.

Розв'язання.

$\vec{a}\{1, -3, 5\}$, $\vec{b}\{2, 1, 3\}$. Тоді за формулою (11.12) маємо:

$$\vec{a} \vec{b} = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 14.$$

11.9.2. Кут між векторами. Умова перпендикулярності двох векторів

Задамо два вектори: $\vec{a}\{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b}\{b_x; b_y; b_z\}$. Згадаємо формулу скалярного добутку векторів: $\vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$ і знайдемо з неї $\cos \varphi$.

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (11.13)$$

З одержаної формули випливає важливе співвідношення: якщо вектори ненульові й перпендикулярні, тобто кут між ними дорівнює $\frac{\pi}{2}$, то $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. А тому чисельник у формулі (11.13) буде дорівнювати 0. Звідси й одержуємо **умову перпендикулярності векторів**:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \quad (11.14)$$

Тобто, якщо вектори перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю й навпаки: якщо скалярний добуток дорівнює нулю, то вектори перпендикулярні. Ще раз наголошуємо, що мова йде про ненульові вектори.

Приклад. Обчислити кут між векторами $\vec{a}\{4; 2; -1\}$ і $\vec{b}\{0; 8; 6\}$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (11.13):

$$\cos \varphi = \frac{4 \cdot 0 + 2 \cdot 8 + (-1) \cdot 6}{\sqrt{16 + 4 + 1} \cdot \sqrt{0 + 64 + 36}} = \frac{10}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{100}} = \frac{1}{\sqrt{21}}. \quad \text{Звідси } \varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{21}}.$$

Приклад. Перевірити, чи будуть вектори $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ і $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ перпендикулярними.

Розв'язання. Застосуємо умову перпендикулярності векторів (11.14). Для зручності можна записати задані вектори в координатній формі: $\vec{a}\{4; -3; 5\}$,

$\vec{b}\{2; 1; -1\}$. Тоді $4 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 5 \cdot (-1) = 8 - 3 - 5 = 0$ і робимо висновок, що вектори перпендикулярні.

11.9.3. Фізичний зміст скалярного добутку векторів

Зауважимо відразу, що фізичний зміст називають іноді механічним змістом скалярного добутку. Почнемо з рис. 11.21.

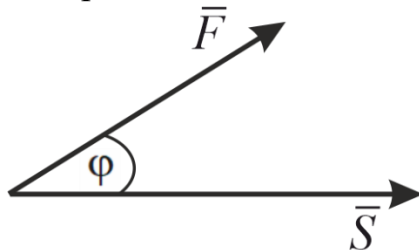


Рис.11.21

Розглянемо два вектори: вектор сили $\vec{F}$ і вектор $\vec{S} = \overline{MN}$. Нехай матеріальна точка під дією сили $\vec{F}$ рухається вздовж вектора $\vec{S}$ від точки M до точки N . Робота A , яку виконає сила $\vec{F}$, буде дорівнювати скалярному добутку векторів $\vec{F}$ і $\vec{S}$. Тобто

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S}, \quad \text{тут } \vec{S} = \overline{MN}. \quad (11.15)$$

Тобто **робота** вектора сили – це **скалярний добуток** вектора сили на вектор переміщення.

Приклад. Обчислити, яку роботу виконає сила $\vec{F}\{2; 1; -2\}$, коли її точка прикладання (іноді кажуть матеріальна точка), рухаючись прямолінійно, переміщується з точки $M(1; -3; 2)$ у точку $N(3; 0; 4)$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо вектор $\overline{MN}$:

$$\overline{MN}\{3-1; 0-(-3); 4-2\} = \overline{MN}\{2; 3; 2\}.$$

Роботу A обчислимо за формулою (11.15):

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = \vec{F} \cdot \overline{MN} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 = 3.$$

Основні формули розділу

Опис	Формула
Формули скалярного добутку векторів	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \cos \varphi;$ $\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \vec{b} \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a};$ $\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
Проекція вектора $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$	$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{ \vec{b} }$
Скалярний квадрат вектора $\vec{a}$	$\vec{a}^2 = \vec{a} ^2, \text{ звідси } \vec{a} = \sqrt{\vec{a}^2}$
Косинус кута між векторами	$\cos \varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} } = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

Умова перпендикулярності векторів	$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$
Фізичний зміст скалярного добутку векторів (A – робота, $\vec{F}$ – вектор сили, $\vec{S} = \overline{MN}$ – вектор переміщення)	$A = \vec{F} \cdot \vec{S}$

Питання для самоперевірки

- За якою формулою обчислюють скалярний добуток векторів, якщо задано:
 - модулі цих векторів і кут між векторами?
 - модуль одного з векторів і проєкцію другого вектора на напрям першого?
 - проєкції векторів?
- Чому дорівнює скалярний квадрат вектора? Звідси, чому дорівнює модуль вектора?
- Чому дорівнюють: $\vec{i}^2$; $\vec{j}^2$; $\vec{k}^2$; $\vec{i} \cdot \vec{j}$; $\vec{j} \cdot \vec{k}$; $\vec{j} \cdot \vec{i}$?
- У якому випадку $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$?
- Чому дорівнює косинус кута між векторами?
- Як записується умова перпендикулярності векторів?
- Як знайти проєкцію вектора на напрям другого вектора?
- У чому полягає фізичний зміст скалярного добутку?

Розв'язання прикладів

Розділ I (найпростіші приклади)

Приклад 1. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

- якщо $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = 60^\circ$;
- якщо $\vec{a} \{6; -2; 3\}$, $\vec{b} \{0; 3; 7\}$;
- якщо $\vec{a} = -\vec{i} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Розв'язання. 1) В умові задано модулі векторів і кут між ними. Тому будемо користуватися формулою (11.8): $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 8 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 24 \cdot 0,5 = 12$.

2) Тут вектори задані в координатній формі, тому застосуємо формулу (11.12):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 6 \cdot 0 + (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 7 = 15.$$

3) Знову застосуємо формулу (11.12). Але спочатку запишемо задані вектори в координатній формі (зауважимо, що у вектора $\vec{a}$ проєкція a_y дорівнює нулю, а у вектора $\vec{b}$ проєкція b_x дорівнює нулю).

$$\vec{a} \{-1; 0; 4\}, \vec{b} \{0; 2; 3\}; \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 12.$$

Приклад 2. Знайти косинус кута й сам кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$:

- якщо $\vec{p} \cdot \vec{q} = 22$, $|\vec{p}| = 6$, $|\vec{q}| = 5$;
- якщо $\vec{p} \cdot \vec{q} = -6$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 3$;
- якщо $\vec{p} \{1; 2; 3\}$, $\vec{q} \{-1; 2; 0\}$.

Розв'язання. В усіх трьох прикладах будемо застосовувати формулу (11.13):

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Для прикладів 1 і 2 ми застосуємо такий вид формули: $\cos \varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$. А в 3 будемо користуватися такою формулою: $\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$.

1) Зрозуміло, що для векторів $\bar{p}$ і $\bar{q}$ формула буде мати вигляд: $\cos \varphi = \frac{\bar{p}\bar{q}}{|\bar{p}| \cdot |\bar{q}|}$.

$$\cos \varphi = \frac{22}{6 \cdot 5} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}. \text{ Тоді кут } \varphi \text{ буде дорівнювати: } \varphi = \arccos \frac{11}{15}.$$

2) Аналогічно $\cos \varphi = \frac{-6}{4 \cdot 3} = -\frac{1}{2}$. Тоді $\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, або $\varphi = 120^\circ$.

3) Знайдемо спочатку складові формули (11.13): скалярний добуток векторів: $\bar{p}\bar{q} = -1 + 4 + 0 = 3$; модулі векторів: $|\bar{p}| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$, $|\bar{q}| = \sqrt{1 + 4 + 0} = \sqrt{5}$. Тоді $\cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{70}}$. Звідси $\varphi = \arccos \frac{3}{\sqrt{70}}$.

Приклад 3. Задано вектори $\bar{a}\{-2; 4; 3\}$ і $\bar{b}\{1; 3; 7\}$. Знайти $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (11.10):

$$\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}|}.$$

Знайдемо чисельник і знаменник формули: $\bar{a}\bar{b} = -2 + 12 + 21 = 31$; $|\bar{a}| = \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29}$. Тоді $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{31}{\sqrt{29}}$.

Приклад 4. Задано вектори: $\bar{a} = \alpha\bar{i} - 3\bar{j} + 5\bar{k}$ і $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$. За якого значення α вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ будуть перпендикулярними?

Розв'язання. За умовою перпендикулярності (11.14) скалярний добуток векторів повинен дорівнювати нулю. Тобто $\bar{a}\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$. Отже, $\alpha \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 0$, $2\alpha + 12 = 0$, $2\alpha = -12$, $\alpha = -6$. Вектори будуть перпендикулярними тільки в тому випадку, коли проєкція вектора $\bar{a}$ на вісь OX буде дорівнювати -6 .

Розділ II

Приклад 1. Задано вектори $\bar{c} = 4\bar{i} + 7\bar{j} - 4\bar{k}$ і $\bar{d} = -10\bar{i} + 12\bar{k}$. Знайти $\text{пр}_{\bar{a}}(2\bar{c} - \bar{d})$.

Розв'язання. Для спрощення розв'язання запишемо задані вектори в координатній формі: $\bar{c}\{4; 7; -4\}$, $\bar{d}\{-10; 0; 12\}$. Далі знайдемо вектори $2\bar{c}\{8; 14; -8\}$ і $2\bar{c} - \bar{d}\{18; 14; -20\}$. Знову для спрощення позначимо новий вектор $2\bar{c} - \bar{d} = \bar{a}$. І застосуємо до векторів $\bar{a}$ і $\bar{d}$ формулу (11.10): $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{-180 - 240}{\sqrt{244}} = \frac{420}{\sqrt{244}} = \frac{210}{\sqrt{61}}$.

Приклад 2. Перевірити, чи будуть діагоналі AC і BD чотирикутника $A(2; -3; 1)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4, 1, 1)$, $D(-5; -5; 3)$ взаємно перпендикулярними?

Розв'язання. Спочатку утворимо вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$:

$$\overline{AC}\{-4-2; 1-(-3); 1-1\}=\{-6; 4; 0\}; \quad \overline{BD}\{-5-1; -5-4; 3-0\}=\{-6; -9; 3\}.$$

А тепер застосуємо умову перпендикулярності векторів: $\overline{AC} \cdot \overline{BD}=0$.

$-6 \cdot (-6) + 4 \cdot (-9) + 0 \cdot 3 = 0$. Тобто вектори перпендикулярні, а тому й діагоналі перпендикулярні.

Приклад 3. Задано точки: $A(-1; 1; 0)$, $B(3; 0; -2)$, $C(2; -1; 1)$. Знайти $(\overline{AB} - 2\overline{BC}) \cdot (\overline{BA} + \overline{CB})$.

Розв'язання. Уважно розглянемо умову прикладу й побачимо, що потрібно знайти два вектори: $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$. А інші два вектори будуть протилежними. Отже, знаходимо вектори $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$.

$\overline{AB}\{4;-1;-2\}$; $\overline{BC}\{-1;-1;3\}$. Протилежні вектори будуть відрізнятися тільки знаками: $\overline{BA}\{-4;1;2\}$; $\overline{CB}\{1;1;-3\}$. Тоді

$2\overline{BC}\{-2;-2;6\}$, $(\overline{AB} - 2\overline{BC})\{6;1;-8\}$; $(\overline{BA} + \overline{CB})\{-3;2;-1\}$. Нарешті, знайдемо скалярний добуток векторів за формулою (11.12):

$$(\overline{AB} - 2\overline{BC}) \cdot (\overline{BA} + \overline{CB}) = -18 + 2 + 8 = -8.$$

Приклад 4. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{4}$. $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$. Знайти:

$$1) \vec{a}^2; 2) (\vec{a} + \vec{b})^2; 3) (\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + \vec{b}).$$

Розв'язання. Усі три пункти прикладу розв'язуються за формулою (11.11):

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

$$1) \quad \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 25.$$

$$2) \quad (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 25 + 10\sqrt{2} + 4 = 29 + 10\sqrt{2}.$$

$$3) \quad (\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - \vec{a}\vec{b} - 2|\vec{b}|^2 = 25 - 5\sqrt{2} - 8 = 17 - 5\sqrt{2}.$$

Приклад 5. Знайти $|3\vec{a} - 4\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = 120^\circ$.

Розв'язання. Знову скористаємося формулою (11.11), але тут ми будемо користуватися таким її видом: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$ і нагадаємо, що $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$.

$$|3\vec{a} - 4\vec{b}| = \sqrt{(3\vec{a} - 4\vec{b})^2} = \sqrt{9\vec{a}^2 - 24\vec{a}\vec{b} + 16\vec{b}^2} = \sqrt{9|\vec{a}|^2 - 24\vec{a}\vec{b} + 16|\vec{b}|^2} = \sqrt{9 + 24 + 64} = \sqrt{97}.$$

Приклад 6. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо $\vec{p} = \vec{m} + \vec{q}$, $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{q}| = 4$, а кут між векторами дорівнює 60° .

Розв'язання. $\vec{p}\vec{q} = (\vec{m} + \vec{q}) \vec{q} = \vec{m}\vec{q} + \vec{q}^2 = |\vec{m}||\vec{q}|\cos 60^\circ + |\vec{q}|^2 = 6 + 16 = 22$.

Приклад 7. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{b} - 2\vec{d}$, $|\vec{b}| = 3$,

$|\vec{d}|=1$, вектори $\vec{b}$ і $\vec{d}$ взаємно перпендикулярні ($\cos\frac{\pi}{2}=0$).

Розв'язання. $\vec{a}\vec{b}=(3\vec{b}-2\vec{d})\vec{b}=3\vec{b}^2-2\vec{d}\vec{b}=3|b|^2-2|\vec{d}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{2}=3\cdot 9=27$.

Приклад 8. Задано вершини трикутника $A(1, 0, -1)$, $B(3, 2, -7)$, $C(0, -4, 5)$. Знайти кут при вершині B (тобто $\angle ABC$).

Розв'язання. Утворимо два вектори: $\vec{BA}$ і $\vec{BC}$.

$\vec{BA}\{-2; -2; 6\}$, $\vec{BC}\{-3; -6; 12\}$. Далі скористаємося формулою (11.13):

$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. У нашому випадку $\cos\varphi=\frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{|\vec{BA}||\vec{BC}|}$.

Знайдемо скалярний добуток цих векторів та їхні модулі:

$\vec{BA}\cdot\vec{BC}=6+12+72=90$. $|\vec{BA}|=\sqrt{4+4+36}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$.

$|\vec{BC}|=\sqrt{9+36+144}=\sqrt{189}=3\sqrt{21}$.

Тоді $\cos\varphi=\frac{90}{2\sqrt{11}\cdot 3\sqrt{21}}=\frac{15}{\sqrt{11}\sqrt{21}}$, а $\varphi=\arccos\frac{15}{\sqrt{11}\sqrt{21}}$.

Приклад 9. Задано два вектори: $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$ і $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Знайти вектор $\vec{c}$, якщо відомо, що він перпендикулярний до осі OZ і задовольняє умови: $\vec{a}\vec{c}=9$, $\vec{b}\vec{c}=-4$.

Розв'язання. Нагадаємо, що коли вектор перпендикулярний до деякої осі, то проєкція вектора на цю вісь дорівнює нулю. У нашому випадку $\text{пр}_z\vec{c}=0$. Таким чином, потрібно знайти вектор $\vec{c}\{c_x, c_y, 0\}$. І умови прикладу $\vec{a}\vec{c}=9$, $\vec{b}\vec{c}=-4$ перетворюються в систему двох рівнянь з двома невідомими c_x, c_y . Тут скалярні добутки $\vec{a}\vec{c}$ і $\vec{b}\vec{c}$ визначаємо за формулою (11.12).

$$\begin{cases} 3c_x - c_y = 9, \\ c_x + 2c_y = -4. \end{cases}$$

Звідси $c_x=2$, $c_y=-3$. І шуканий вектор $\vec{c}=2\vec{i}-3\vec{j}$.

Приклад 10. Обчислити роботу сили $\vec{F}\{3; 2; -1\}$ з переміщення матеріальної точки із положення $M(0, 2, -1)$ у положення $N(4, 3, 1)$.

Розв'язання. Нагадаємо, що робота – це скалярний добуток вектора сили на вектор переміщення $\vec{MN}$. Знайдемо вектор $\vec{MN}\{4; 1; 2\}$.

Тоді за формулою (11.15) робота $A=\vec{F}\cdot\vec{MN}=12+2-2=12$.

Приклад 11. Обчислити роботу рівнодійної сил $\vec{F}_1\{5; 1; -1\}$, $\vec{F}_2\{0; 1; 4\}$, $\vec{F}_3\{-3; 0; 2\}$ з переміщення матеріальної точки із положення $P(-2, 1, 0)$ у положення $Q(6, -1, 1)$.

Розв'язання. Рівнодійна сил дорівнює сумі всіх сил, тобто

$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=\{5+0-3; 1+1+0; -1+4+2\}=\{2; 2; 5\}$. Далі знаходимо вектор переміщення $\vec{PQ}\{8; -2; 1\}$. Тоді робота $A=\vec{F}\cdot\vec{PQ}=16-4+5=17$.

Приклади для аудиторної роботи

Приклад 1. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$:

якщо $|\vec{p}| = 3$, $|\vec{q}| = 10$; , $\vec{p} \wedge \vec{q} = 30^\circ$;

якщо $\vec{p} \{7 - 8; ; 3\}$, $\vec{q} \{0; 2; -3\}$.

Приклад 2. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 13$, $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 15$;
 $\vec{a} \{6; -2; 3\}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$.

Приклад 3. Задано вектори $\vec{p} \{3; 0; 0\}$ і $\vec{q} \{-1, 3, -2\}$. Знайти:

1) $\text{pr}_{\vec{p}} \vec{q}$;

2) $\text{pr}_{2\vec{q}} (\vec{q} - \vec{p})$.

Приклад 4. За якого значення α вектори $\vec{c} \{5; \alpha; -3\}$, $\vec{d} \{-2; 3; 4\}$ будуть перпендикулярними?

Приклад 5. Задано точки: $A(-1; 1; 0)$, $B(3; 0; -2)$, $C(2; -1; 1)$. Знайти:

$(2\vec{AB} - \vec{BC}) \cdot (\vec{BA} + 3\vec{CB})$.

Приклад 6. Вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$ утворюють кут 30° , $|\vec{p}| = 7$, $|\vec{q}| = 3$. Знайти: $\vec{q}^2$; $(\vec{q} - \vec{p})^2$;
 $(\vec{q} - \vec{p})(2\vec{q} + \vec{p})$.

Приклад 7. Знайти $|\vec{a} - 3\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = 60^\circ$.

Приклад 8. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = 2\vec{b} + 3\vec{d}$,
 $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{d}| = 2$, $\vec{b} \wedge \vec{d} = 30^\circ$.

Приклад 9. Обчислити роботу рівнодійної сил $\vec{F}_1 \{1; 3; 5\}$, $\vec{F}_2 \{0; 6; 9\}$ з переміщення матеріальної точки із положення $M(-3, 1, 0)$ у положення $N(4, 7, 1)$.

Приклади для самостійного розв'язання

Приклад 1. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

1) якщо $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 7$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = 45^\circ$;

2) якщо $\vec{a} \{6; -2; 3\}$, $\vec{b} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

Приклад 2. Знайти косинус кута й сам кут між векторами $\vec{c}$ і $\vec{d}$:

якщо $\vec{c} \cdot \vec{d} = 12$, $|\vec{c}| = 4$, $|\vec{d}| = 7$;

якщо $\vec{c} \{2; 7; -4\}$, $\vec{d} \{-2; 0; -3\}$.

Приклад 3. Задано вектори $\vec{p} \{1; -2; 3\}$ і $\vec{q} \{-1, 5, 0\}$. Знайти $\text{pr}_{\vec{p}} \vec{q}$.

Приклад 4. За якого значення α вектори $\vec{a} = \alpha\vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k}$ і $\vec{b} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ будуть перпендикулярними?

Приклад 5. Задано вектори $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ і $\vec{c} \{4; 7; -4\}$.

Знайти: 1) $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{c}$; 2) $\text{pr}_{\vec{c}} (\vec{a} + \vec{b})$.

Приклад 6. Обчислити роботу А сили $\vec{F} \{3; -6; 1\}$ з переміщення матеріальної точки із положення $C(1, -3, -1)$ у положення $D(4, -5, 1)$.

Відповіді:

Приклад 1. 1) $14\sqrt{2}$; 2) -13.

Приклад 2. 1) $\cos \varphi = \frac{3}{7}$; $\varphi = \arccos \frac{3}{7}$; 2) $\cos \varphi = \frac{8}{\sqrt{69}\sqrt{13}}$; $\varphi = \arccos \frac{8}{\sqrt{69}\sqrt{13}}$.

Приклад 3. $-\frac{11}{\sqrt{14}}$.

Приклад 4. $\alpha = 4$.

Приклад 5. 1) -65 ; 2) $\frac{7}{9}$.

Приклад 6. $A=23$.

11.10. Векторний добуток векторів

Розглянемо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, які зведені до спільного початку.

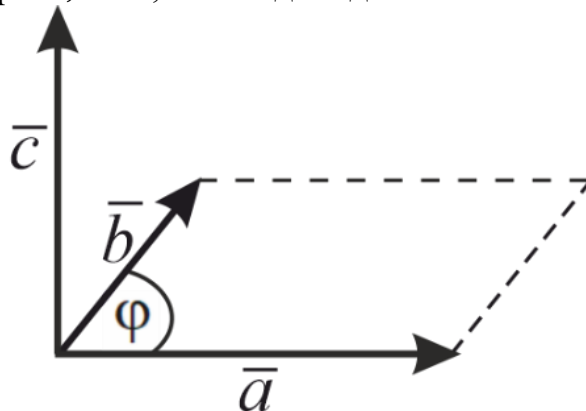


Рис. 11.22

Означення. Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається **вектор $\vec{c}$** , який задовольняє такі умови (рис. 11.22):

- 1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до площини, у якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
- 2) вектор $\vec{c}$ спрямований у той бік, що коли дивитися з його кінця на площину, у якій розташовані вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то найкоротший оберт від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ буде виконуватися проти годинникової стрілки (вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів);
- 3) **довжина** вектора $\vec{c}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах.

Позначення векторного добутку: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, або $\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]$.

11.10.1. Властивості векторного добутку

Алгебраїчні властивості:

1. $[\vec{a}\vec{b}] = -[\vec{b}\vec{a}]$ – у разі зміни порядку множників векторний добуток змінює знак.
2. $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$, або $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Геометричні властивості:

1. Довжина (модуль) вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах (до речі, нагадаємо, що площа паралелограма обчислюється за формулою $S_{\text{пар.}} = a b \sin \varphi$). Тому:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi, \text{ тут } \varphi - \text{кут між векторами.} \quad (11.16)$$

Зауважимо, що $S_{\Delta} = \frac{1}{2} S_{\text{пар}} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$.

2. Якщо $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (вектори перпендикулярні), тобто $\sin \varphi = 1$, то $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ (модуль векторного добутку дорівнює добутку модулів).

3. Якщо $\varphi = 0$, або $\varphi = \pi$, причому $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ (тобто, якщо вектори колінеарні, то їх векторний добуток дорівнює нульовому вектору).

Приклад. Знайти модуль векторного добутку $\vec{a} \times \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = 30^\circ$.

Розв'язання.

Звертаємо увагу на те, що в цьому прикладі потрібно знайти **модуль** векторного добутку, а не векторний добуток векторів. За формулою (11.16) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi = 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 10$.

11.10.2. Обчислення векторного добутку

Спочатку, за означенням векторного добутку, знайдемо векторні добутки базисних векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

А на основі властивості $[\vec{a}\vec{b}] = -[\vec{b}\vec{a}]$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

Далі за геометричною властивістю 3 запишемо:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.$$

Тепер перейдемо до знаходження формули обчислення векторного добутку векторів. Розглянемо два вектори: $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ і $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$.

Знайдемо векторний добуток цих векторів:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x [\vec{i} \times \vec{i}] + a_x b_y [\vec{i} \times \vec{j}] + \\ &+ a_x b_z [\vec{i} \times \vec{k}] + a_y b_x [\vec{j} \times \vec{i}] + a_y b_y [\vec{j} \times \vec{j}] + a_y b_z [\vec{j} \times \vec{k}] + \\ &+ a_z b_x [\vec{k} \times \vec{i}] + a_z b_y [\vec{k} \times \vec{j}] + a_z b_z [\vec{k} \times \vec{k}] = (\text{підставимо одержані вище векторні добутки векторів } \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = \\ &= a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Найзручніша форма запису векторного добутку векторів – це визначник третього порядку (хоча можна користуватися й проміжними формулами, які ми одержували в процесі знаходження формули, наприклад трьома визначниками другого порядку).

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (11.17)$$

Приклад. Задано вектори: $\vec{a}\{3; -1; 2\}$, $\vec{b}\{2; 3; -1\}$. Знайти векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Розв'язання. За формулою (11.17):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = (1-6)\vec{i} - (-3-4)\vec{j} + (9+2)\vec{k} = -5\vec{i} + 7\vec{j} + 11\vec{k}.$$

11.10.3. Фізичний зміст векторного добутку

Нагадаємо, що фізичний (механічний) зміст скалярного добутку векторів – це робота вектора сили $\vec{F}$ з переміщення матеріальної точки вздовж вектора $\vec{MN}$. А тепер дізнаємося, що таке фізичний (механічний) зміст векторного добутку векторів (рис. 11.23).

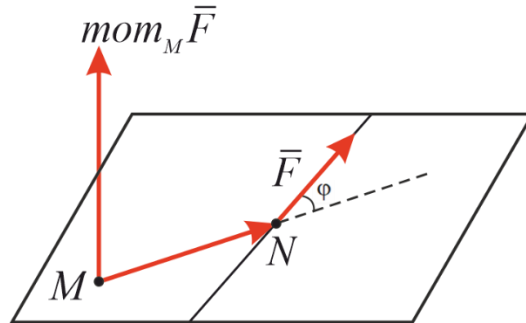


Рис. 11.23

Розглянемо дві точки – A і B . Нехай сила $\vec{F}$ прикладена до точки B . **Моментом сили $\vec{F}$** відносно точки A ($mom_A \vec{F}$) називається вектор, який дорівнює векторному добутку $\vec{AB}$ на $\vec{F}$. Тобто

$$mom_A \vec{F} = \vec{AB} \times \vec{F}. \quad (11.18)$$

Приклад. Сила $\vec{F} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$ прикладена до точки $B(2, 1, 4)$. Знайти момент сили $\vec{F}$ відносно точки $A(3, 0, -2)$.

Розв'язання.

Знайдемо вектор $\vec{AB}\{-1; 1; 6\}$. Тепер за формулою (11.18) знайдемо момент сили $\vec{F}$:

$$mom_A \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -16\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Основні формули розділу

Опис	Формула
Формула векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$
Модуль векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$	$ \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \sin \varphi, \text{ тут } \varphi - \text{кут між векторами}$
Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах	$S_{\text{пар}} = \vec{a} \times \vec{b} $
Площа трикутника, дві сторони якого збігаються з векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$	$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \vec{a} \times \vec{b} $
Фізичний зміст векторного добутку (вектор $\vec{F}$ прикладений до точки B)	$M_{O_A} \vec{F} = \vec{AB} \times \vec{F}$

Питання для самоперевірки

1. Як формулюється означення векторного добутку?
2. Площа якої геометричної фігури чисельно дорівнює модулю векторного добутку векторів?
3. У якому випадку векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює нульовому вектору (якщо $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$)?
4. За якою формулою обчислюється векторний добуток двох векторів?
5. Як використовується формула векторного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ для обчислення:
 - 1) площі паралелограма, побудованого на векторах як на сторонах?
 - 2) площі трикутника, дві сторони якого збігаються з векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$?
 - 3) моменту сили $\vec{F}$ відносно точки?

Розв'язання прикладів

Приклад 1. Дано: $|\vec{c}| = 7$, $|\vec{d}| = 2$, $\vec{c} \wedge \vec{d} = \frac{\pi}{4}$. Знайти $|\vec{c} \times \vec{d}|$.

Розв'язання.

За формулою (11.16): $|\vec{c} \times \vec{d}| = |\vec{c}| \cdot |\vec{d}| \cdot \sin \varphi = 7 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$.

Приклад 2. Дано: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$. Знайти $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Розв'язання.

Нагадаємо формулу скалярного добутку:

$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos(\widehat{\overline{a}\overline{b}})$. Звідси $\cos(\widehat{\overline{a}\overline{b}}) = \frac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \frac{6}{2 \cdot 5} = \frac{3}{5}$. Для знаходження модуля векторного добутку нам потрібно знайти $\sin \varphi$.

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}. \text{ Тоді } |\overline{a} \times \overline{b}| = 2 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 8.$$

Приклад 3. Задано вектори $\overline{a}\{1; -2; 1\}$ і $\overline{b}\{0; 1; 3\}$. Знайти $\overline{a} \times 2\overline{b}$.

Розв'язання.

Знайдемо вектор $2\overline{b}\{0; 2; 6\}$. Векторний добуток обчислимо за формулою (11.17):

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \overline{k} = -14\overline{i} - 6\overline{j} + 2\overline{k}.$$

Приклад 4. Задано вектори $\overline{p} = \overline{i} - 2\overline{j} + 3\overline{k}$ і $\overline{q} = 2\overline{i} + 3\overline{k}$. Знайти $|\overline{p} \times \overline{q}|$.

Розв'язання.

Зауважимо, що цей приклад можна було б розв'язати за допомогою формули (11.16), але розв'язання буде довшим.

Спочатку знайдемо векторний добуток заданих векторів.

$$\overline{p} \times \overline{q} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6\overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k}.$$

А тепер знайдемо модуль одержаного вектора:

$$|\overline{p} \times \overline{q}| = \sqrt{36 + 9 + 16} = \sqrt{61}.$$

Приклад 5. Задано вектори $\overline{a}\{-1; -2; 2\}$, $\overline{b} = 3\overline{i} + \overline{k}$. Знайти $(\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{b}$.

Розв'язання.

Знайдемо вектор $\overline{a} + \overline{b}\{2; -2; 3\}$. Тоді векторний добуток векторів $\overline{a} + \overline{b}$ і $\overline{b}$ буде дорівнювати:

$$(\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\overline{i} + 7\overline{j} + 6\overline{k}.$$

Зауваження. Цей приклад можна було б розв'язати інакше:

$$(\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{b} = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{b} \times \overline{b} = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{0} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\overline{i} + 7\overline{j} + 6\overline{k}.$$

Приклад 6. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a} + 2\overline{b}$ і $2\overline{a} + \overline{b}$ як на сторонах, якщо $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 4$, $\widehat{\overline{a}\overline{b}} = 30^\circ$.

Розв'язання.

Спочатку знайдемо векторний добуток векторів $\overline{a} + 2\overline{b}$ і $2\overline{a} + \overline{b}$, застосувавши геометричні властивості векторного добутку:

$$(\overline{a} + 2\overline{b}) \times (2\overline{a} + \overline{b}) = 2(\overline{a} \times \overline{a}) + \overline{a} \times \overline{b} + 4(\overline{b} \times \overline{a}) + 2(\overline{b} \times \overline{b}) = \{ \overline{a} \times \overline{a} = \overline{0}, \overline{b} \times \overline{b} = \overline{0}, [\overline{a}\overline{b}] =$$

$$-[\overline{b\overline{a}}] = \overline{a} \times \overline{b} - 4(\overline{a} \times \overline{b}) = -3(\overline{a} \times \overline{b}).$$

Нагадаємо, що площа паралелограма – це модуль векторного добутку.

$$S_{\text{пар}} = |(\overline{a} + 2\overline{b}) \times (2\overline{a} + \overline{b})| = 3|\overline{a} \times \overline{b}| = 3|\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin 30^\circ = 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 18.$$

Приклад 7. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{m}\{3;1;-1\}$ і $\overline{n}\{0;-2;4\}$ як на сторонах.

Розв'язання.

Ще раз нагадаємо, що площа паралелограма – це модуль векторного добутку.

Тому спочатку знайдемо векторний добуток векторів, а потім його модуль.

$$\overline{m} \times \overline{n} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2\overline{i} - 12\overline{j} - 6\overline{k}.$$

$$|\overline{m} \times \overline{n}| = \sqrt{4 + 144 + 36} = \sqrt{184} = 2\sqrt{46}.$$

$$\text{Таким чином } S_{\text{пар}} = 2\sqrt{46}.$$

Зауваження. Цей приклад можна було б розв'язати за допомогою формули

$$|\overline{m} \times \overline{n}| = |\overline{m}| \cdot |\overline{n}| \cdot \sin \varphi, \text{ але розв'язання буде довшим.}$$

Приклад 8. Знайти площу трикутника MNP , якщо задані його вершини:

$$M(3, 0, 5), N(3, 2, 2), P(0, 0, 1).$$

Розв'язання.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} S_{\text{пар}} = \frac{1}{2} |\overline{a} \times \overline{b}| = \frac{1}{2} |\overline{MN} \times \overline{MP}|. \text{ Почнемо із знаходження векторів } \overline{MN} \text{ і } \overline{MP}.$$

(Зауважимо, що в цьому прикладі можна було б розглянути й іншу пару векторів, наприклад $\overline{NP}$ і $\overline{NM}$).

$\overline{MN}\{0;2;-3\}$, $\overline{MP}\{-3;0;-4\}$. Тепер знайдемо векторний добуток цих векторів:

$$\overline{MN} \times \overline{MP} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -8\overline{i} + 9\overline{j} + 6\overline{k}.$$

$$\text{Нарешті, } S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overline{MN} \times \overline{MP}| = \frac{1}{2} \sqrt{64 + 81 + 36} = \frac{1}{2} \sqrt{181}.$$

Приклад 9. Сила $\overline{F} = 3\overline{i} + \overline{j} - 5\overline{k}$ прикладена до точки $M(0, -1, 2)$. Знайти:

- 1) момент цієї сили відносно точки $N(1, -1, 0)$;
- 2) величину (модуль) моменту цієї сили;
- 3) напрямні косинуси моменту цієї сили.

Розв'язання.

1) За формулою (11.18) $\text{mom}_N \overline{F} = \overline{NM} \times \overline{F}$. Знайдемо вектор $\overline{NM}\{-1;0;2\}$, тоді:

$$\text{mom}_N \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -2\overline{i} + \overline{j} - \overline{k}.$$

2) Знайдемо величину (модуль одержаного вектора) моменту сили:

$$|\text{mom}_N \overline{F}| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}.$$

Нагадаємо, що напрямні косинуси вектора $\vec{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ обчислюються за формулами: $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$, $\cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$, $\cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$.

У нашому випадку:

$$\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{6}}, \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{6}}, \cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Приклади для аудиторної роботи

Приклад 1. Дано: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 17$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = 120^\circ$. Знайти $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Приклад 2. Задано вектори $\vec{c}\{3; -6; 9\}$ і $\vec{d}\{0; -3; -2\}$. Знайти: 1) $\vec{c} \times \vec{d}$; 2) $\frac{1}{3} \vec{c} \times \vec{d}$; 3) $|\vec{c} \times \vec{d}|$.

Приклад 3. Задано вектори $\vec{p} = 6\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ і $\vec{q} = \vec{i} - 4\vec{k}$. Знайти $(\vec{p} + 2\vec{q}) \times \vec{p}$.

Приклад 4. Задано вектори $\vec{a}\{3; 1; -5\}$ і $\vec{b}\{0; 1; 3\}$. Знайти площу паралелограма, побудованого на цих векторах як на сторонах.

Приклад 5. Задано вершини трикутника ABC: A(1, 0, 4), B(5, -1, 0), C(1, 3, 8). Знайти площу трикутника.

Приклад 6. Сила $\vec{F} = \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ прикладена до точки M(-1, 0, 3). Знайти:

- 1) момент цієї сили відносно точки N(2, -4, 5);
- 2) величину (модуль) моменту цієї сили;
- 3) напрямні косинуси моменту цієї сили.

Приклади для самостійного розв'язання

Приклад 1. Дано: $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 11$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = 60^\circ$. Знайти $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Приклад 2. Задано вектори $\vec{p}\{2; 3; 1\}$ і $\vec{q}\{0; 4; 2\}$. Знайти: 1) $\vec{p} \times \vec{q}$; 2) $\vec{p} \times 3\vec{q}$; 3) $|\vec{p} \times \vec{q}|$.

Приклад 3. Задано вектори $\vec{c}\{1; 0; 5\}$ і $\vec{d}\{2; -1; 3\}$. Знайти: 1) $S_{\text{пар}}$, побудованого на векторах $\vec{c}$ і $\vec{d}$ як на сторонах; 2) S_{Δ} , дві сторони якого збігаються з векторами $\vec{c}$ і $\vec{d}$.

Приклад 4. Сила $\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$ прикладена до точки P(1, 2, -3). Знайти:

- 1) момент цієї сили відносно точки D(0, 4, -1);
- 2) величину (модуль) моменту цієї сили;
- 3) напрямний косинус, $\cos \gamma$ моменту цієї сили.

Відповіді:

Приклад 1. $22\sqrt{3}$.

Приклад 2. 1) $\vec{p} \times \vec{q} = -10\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$; 2) $\vec{p} \times 3\vec{q} = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 24\vec{k}$; 3) $6\sqrt{5}$.

Приклад 3. 1) $S_{\text{пар}} = 5\sqrt{3}$; 2) $S_{\Delta} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$.

Приклад 4. 1) $\text{mom}_D \vec{F} = -4\vec{i} - 8\vec{j} + 6\vec{k}$; 2) $|\text{mom}_D \vec{F}| = 2\sqrt{29}$. 3) $\cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{29}}$.

11.11. Мішаний добуток трьох векторів

У попередніх темах було розглянуто добутки **двох** векторів: скалярний добуток векторів — це число (скаляр); векторний добуток — це вектор.

А тепер розглянемо **три** вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ і різні випадки їх добутку:

1. Якщо помножити $\vec{a}$ на $\vec{b}$ **скалярно** (одержимо число), а потім результат, тобто це число, помножити скалярно на вектор $\vec{c}$, то одержимо вектор, колінеарний вектору $\vec{c}$.

2. Якщо помножити $\vec{a}$ на $\vec{b}$ **векторно** (одержимо вектор), а потім результат, тобто одержаний вектор, помножити скалярно на вектор $\vec{c}$, то одержимо **скаляр**, який будемо називати **векторно-скалярним (мішаним) добутком векторів**.

3. Якщо помножити $\vec{a}$ на $\vec{b}$ **векторно** (одержимо вектор), а потім результат, тобто одержаний вектор, помножити векторно на вектор $\vec{c}$, то одержимо **вектор**, який будемо називати **подвійним векторним добутком**.

Розглянемо більш докладно векторно-скалярний добуток трьох векторів. Щодо подвійного векторного добутку, то цю тему можна розібрати в додатковій літературі.

Отже, починаємо вивчення **векторно-скалярного (мішаного) добутку** трьох векторів.

По-перше, множимо $\vec{a}$ на $\vec{b}$ **векторно** — одержуємо вектор $\vec{a} \times \vec{b}$. Далі цей вектор множимо **скалярно** на вектор $\vec{c}$ — одержуємо **скаляр** $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, який і називається мішаним (векторно-скалярним) добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Надалі будемо користуватися спрощеним позначенням:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \vec{b} \vec{c} \text{ — мішаний добуток трьох векторів}$$

11.11.1. Властивості мішаного добутку

1. Мішаний добуток не зміниться, якщо переставляти вектори, що перемножуються, у круговому порядку, тобто:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}.$$

2. У разі перестановки будь-яких двох векторів мішаний добуток змінює знак, тобто, наприклад, $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c}$.

3. Мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ дорівнює нулю, якщо:

- 1) хоча б один з векторів нульовий;
- 2) два вектори колінеарні;
- 3) ці вектори компланарні.

11.11.2. Обчислення мішаного добутку векторів

Розглянемо три вектори: $\vec{a}\{a_x; a_y; a_z\}$, $\vec{b}\{b_x; b_y; b_z\}$ і $\vec{c}\{c_x; c_y; c_z\}$.

Векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ обчислимо за формулою:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Далі знайдемо скалярний добуток векторів $\bar{c}$ і $\bar{a} \times \bar{b}$:

$$\bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a} \bar{b} \bar{c} = c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Ми одержали формулу для обчислення мішаного добутку векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$.

Але її можна записати в зручнішому вигляді. Зауважимо, що права частина одержаної формули є розкладанням визначника третього порядку за елементами третього рядка:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Таким чином, мішаний добуток трьох векторів обчислюється за формулою:

$$\bar{a} \bar{b} \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (11.19)$$

До речі, якщо згадати властивості визначників і порівняти їх з властивостями мішаного добутку, то вони підтверджують одне одного. Переставлення двох рядків визначника змінює його знак (якщо в мішаному добутку ми поміняємо місцями два вектори, то знак мішаного добутку зміниться на протилежний). Далі, якщо переставити всі рядки визначника, то знак не зміниться (якщо у мішаному добутку переставити всі вектори, то знак добутку не зміниться).

Приклад. Обчислити мішаний добуток векторів $\bar{a}\{1; -1; 2\}$, $\bar{b}\{3; -4; 1\}$, $\bar{c}\{2; 3; -1\}$.

Розв'язання. За формулою (11.19):

$$\bar{a} \bar{b} \bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 2 + 18 + 16 - 3 - 3 = 30.$$

11.11.3. Геометричний зміст мішаного добутку

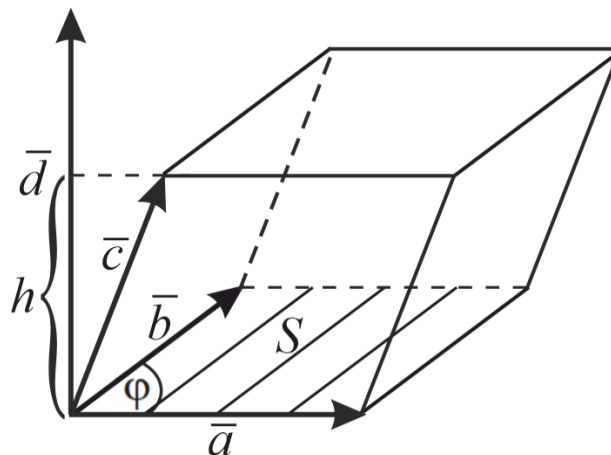


Рис.11.24

Розглянемо три некопланарних, ненульових вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$. Нехай зведені

до спільного початку вони утворюють праву трійку (рис.11.24).

Позначимо векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ через вектор $\vec{d}$. Тобто $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$. Нагадаємо, що модуль вектора $\vec{d}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах:

$$|\vec{d}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi = S_{\text{пар.}}$$

Знайдемо скалярний добуток векторів $\vec{d}$ і $\vec{c}$. Добуток можна записати таким чином: $\vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| \text{пр}_{\vec{d}} \vec{c}$. Проекція вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$ є висотою паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ як на сторонах (рис. 11.25). Позначимо $\text{пр}_{\vec{d}} \vec{c} = h$.

$$\text{Тобто } \vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| \text{пр}_{\vec{d}} \vec{c} = |\vec{d}| h = S_{\text{пар.}} \cdot h = V_{\text{паралелепіпеда}}.$$

Таким чином, геометричний зміст мішаного добутку векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, які утворюють праву трійку векторів, – це об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах як на сторонах.

Зауваження. Якщо три вектори утворюють ліву трійку векторів, то знак мішаного добутку буде від'ємним. На практиці зазвичай не визначають, буде трійка векторів правою чи лівою, а просто розглядають модуль мішаного добутку.

Модуль мішаного добутку векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ дорівнює **об'єму паралелепіпеда**, побудованому на цих векторах як на сторонах:

$$V_{\text{паралелепіпеда}} = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|. \quad (11.20)$$

Іноді замість модуля пишуть $\ll \pm \gg$. Тобто $\pm \vec{a} \vec{b} \vec{c}$. Знак $\ll + \gg$ вибирають, коли мішаний добуток додатний, і $\ll - \gg$ – коли мішаний добуток від'ємний.

Цим результатом можна скористатися для обчислення об'єму трикутної піраміди, три ребра якої збігаються з трьома векторами, які мають спільний початок.

Відомо, що $V_{\text{пір}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$. А площа основи (площа трикутника) дорівнює $\frac{1}{2}$ площі паралелограма, тобто: $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} S_{\text{пар.}}$. Тоді $V_{\text{пір}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{\text{пар.}} \cdot h = \frac{1}{6} S_{\text{пар.}} \cdot h = \frac{1}{6} V_{\text{паралелепіпеда}}$.

Отже, об'єм піраміди дорівнює $\frac{1}{6}$ об'єму паралелепіпеда.

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{6} V_{\text{паралелепіпеда}}. \quad (11.21)$$

11.11.4. Умова компланарності трьох векторів

Нагадаємо умову компланарності векторів: вектори, які лежать в одній площині або на паралельних площинах, називають компланарними.

Умову компланарності трьох ненульових векторів і об'єм паралелепіпеда дуже просто можна пов'язати геометрично. Якщо мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$

і $\vec{c}$ дорівнює нулю, то з геометричної позиції об'єм паралелепіпеда повинен дорівнювати нулю. Але це означає, що три вектори лежать в одній площині, тобто вони компланарні. Можна компланарність трьох векторів зв'язати з рівністю мішаного добутку нулю й без застосування геометричного змісту. Але цей варіант ми розглядати не будемо.

Таким чином, необхідною і достатньою умовою **компланарності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$** є рівність нулю їх мішаного добутку:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \quad (11.22)$$

Приклад. Перевірити, чи будуть компланарні вектори $\vec{a}\{2; 3; -1\}$, $\vec{b}\{1; -1; 3\}$, $\vec{c}\{1; 9; -11\}$.

Розв'язання.

Обчислимо мішаний добуток векторів за формулою (11.19):

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 22 + 9 - 9 - 1 + 33 - 54 = 0.$$

Отже, за умовою (11.22) задані вектори компланарні.

Основні формули розділу

Опис	Формула
Формула обчислення мішаного добутку векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$	$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$
Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ як на сторонах	$V_{\text{паралелепіпеда}} = \vec{a}\vec{b}\vec{c} $
Об'єм піраміди, три ребра якої збігаються з векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$	$V_{\text{пір}} = \frac{1}{6} V_{\text{паралелепіпеда}}$
Необхідна й достатня умова компланарності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$	$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$

Питання для самоперевірки

1. Як потрібно перемножити вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, щоб одержати мішаний добуток векторів? Як позначається мішаний добуток?
2. Як впливає переставлення векторів у мішаному добутку на його величину?
3. За якою формулою обчислюється мішаний добуток трьох векторів?
4. У чому полягає геометричний зміст мішаного добутку трьох векторів?
5. За якою формулою обчислюється об'єм трикутної піраміди?
6. За якою формулою можна перевірити компланарність трьох векторів?

Розв'язання прикладів

Приклад 1. Задано точки $A(0, 1, -1)$, $B(-2, 1, 0)$, $C(3, 5, 4)$, $D(0, 0, 3)$. Знайти $\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}$.

Розв'язання.

Знайдемо вказані вектори: $\overline{AB}\{-2; 0; 1\}$, $\overline{AC}\{3; 4; 5\}$, $\overline{AD}\{0; -1; 4\}$.

За формулою (11.19) обчислимо мішаний добуток векторів:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -32 - 3 - 10 = -45.$$

Приклад 2. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a} = 3\overline{i} - \overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} + \overline{j} + 5\overline{k}$, $\overline{c} = \overline{i} + \overline{j}$ як на сторонах.

Розв'язання.

За формулою (11.19) обчислимо мішаний добуток векторів:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 + 4 - 2 - 15 = -18.$$

За формулою (11.20) об'єм паралелепіпеда дорівнює модулю мішаного добутку векторів. Тобто $V_{\text{паралелепіпеда}} = |\overline{a}\overline{b}\overline{c}| = |-18| = 18$.

Приклад 3. За якого значення α вектори $\overline{p} = 3\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$, $\overline{q} = 2\overline{i} + 3\overline{k}$, $\overline{c} = \alpha\overline{i} + \overline{j}$ будуть компланарними?

Розв'язання.

Знайдемо мішаний добуток цих векторів:

$$\overline{p}\overline{q}\overline{c} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ \alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\alpha + 2 - 9 = -3\alpha - 7.$$

Вектори будуть компланарними, якщо їх мішаний добуток буде дорівнювати нулю. Отже, $-3\alpha - 7 = 0$. Звідси $\alpha = -\frac{7}{3}$.

Приклад 4. Перевірити, чи можуть три вектори $\overline{a}\{-1; 0; 3\}$, $\overline{b}\{4; -1; 3\}$ і $\overline{c}\{5; -7; 2\}$ створити базис у тривимірному просторі?

Розв'язання.

Базис у тривимірному просторі складається з трьох некопланарних векторів. Тобто, за умовою (11.22) мішаний добуток цих векторів не повинен дорівнювати нулю.

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 84 + 15 - 21 = -88 \neq 0.$$

Тобто ці вектори можуть утворювати базис у тривимірному просторі.

Приклад 5. Довести, що точки $M(2, 1, 3)$, $N(0, 1, 5)$, $P(-1, 2, 1)$, $Q(1, 2, -1)$ належать одній площині.

Розв'язання.

Із заданих чотирьох точок складемо три яких завгодно вектори. Наприклад: $\overline{MN}\{-2; 0; 2\}$, $\overline{MP}\{-3; 1; -2\}$, $\overline{MQ}\{-1; 1; -4\}$. Далі перевіримо, чи будуть вони компланарні.

$$\overline{MN} \cdot \overline{MP} \cdot \overline{MQ} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 6 + 2 - 4 = 0.$$

Дійсно, три вектори компланарні, тобто належать одній площині, а тому й задані точки будуть лежати в одній площині.

Приклад 6. Задано вершини піраміди: $A(0, 2, 1)$, $B(-1, 2, 3)$, $C(1, 0, -1)$, $D(-1, 3, 0)$. Знайти об'єм піраміди.

Розв'язання.

Виберемо одну з чотирьох заданих вершин піраміди. Нехай це буде вершина A . Утворимо три вектори: $\overline{AB}\{-1; 0; 2\}$, $\overline{AC}\{1; -2; -2\}$, $\overline{AD}\{-1; 1; -1\}$.

Об'єм піраміди обчислимо за формулою (11.21):

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{6} V_{\text{паралелепіпеда}} = \frac{1}{6} \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{6} (-2 + 2 - 4 - 2) = \pm \frac{1}{6} (-6) = 1.$$

Зауваження. У цьому прикладі ми замість знака модуля поставили $\pm$. Так розв'язання має не такий громіздкий вигляд.

Приклад 7. Об'єм трикутної піраміди дорівнює 5. Три її вершини розташовані в точках: $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$. Знайти координати четвертої вершини D , якщо відомо, що ця вершина лежить на осі OY .

Розв'язання.

Якщо вершина D лежить на осі OY , то координати цієї точки будуть $D(0, y, 0)$. Утворимо три вектори: $\overline{AB}\{1; -1; 2\}$, $\overline{AC}\{0; -2; 4\}$, $\overline{AD}\{-2; y - 1; 1\}$. Тепер скористаємося формулою (11.21):

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{6} V_{\text{паралелепіпеда}} = \frac{1}{6} \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & y - 1 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Далі окремо обчислимо визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & y - 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 8 - 4(y - 1) = 2 - 4y.$$

Тоді:

$$\pm \frac{1}{6} (2 - 4y) = 5, \text{ або } \pm \frac{1 - 2y}{3} = 5, \text{ або } \pm (1 - 2y) = 15.$$

Одержане рівняння запишемо у вигляді двох рівнянь:

$$+(1 - 2y) = 15; \text{ і } -(1 - 2y) = 15.$$

Розв'язуємо перше рівняння: $+(1 - 2y) = 15 \Rightarrow -2y = 14 \Rightarrow y = -7$.

Розв'язуємо друге рівняння $-(1 - 2y) = 15 \Rightarrow 2y = 16 \Rightarrow y = 8$.

Тобто точок, які задовольняють умови прикладу, буде дві: $D_1(0, -7, 0)$, $D_2(0, 8, 0)$.

Приклади для аудиторної роботи

Приклад 1. Задано вектори: $\vec{a}\{3; -3; 0\}$, $\vec{b}\{1; 2; -3\}$, $\vec{c} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.
Знайти $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Приклад 2. Задано точки $M(1, -3, 2)$, $N(1, 4, 0)$, $P(-5, 2, 1)$, $Q(-3, 0, 4)$. Знайти $\vec{MN} \cdot \vec{MP} \cdot \vec{MQ}$.

Приклад 3. Задано вектори $\vec{p}\{0; -6; 1\}$, $\vec{q}\{-2; 1; 3\}$ і $\vec{m}\{2; 0; -1\}$. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах як на сторонах.

Приклад 4. За якого значення α вектори $\vec{a} = \vec{i} - \alpha\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ будуть компланарними?

Приклад 5. Задано вершини піраміди: $A(3, 0, -1)$, $B(0, 1, -7)$, $C(2, -2, 4)$, $D(5, 3, -3)$. Знайти об'єм піраміди.

Приклади для самостійного розв'язання

Приклад 1. Задано точки $A(2, 0, 1)$, $B(-1, 3, 0)$, $C(4, 1, 0)$, $D(1, 0, 2)$. Знайти $\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD}$.

Приклад 2. Задано вектори $\vec{a}\{2; 0; -1\}$, $\vec{b}\{-3; 1; 4\}$ і $\vec{c}\{2; 5; -1\}$. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах як на сторонах.

Приклад 3. За якого значення α вектори $\vec{p}=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{q}=\vec{i}-3\vec{k}$, $\vec{m} = \alpha\vec{i} + \vec{j}$ будуть компланарними?

Приклад 4. Задано вершини піраміди: $M(0, 4, -1)$, $N(2, 1, -3)$, $P(1, 0, 5)$, $Q(1, 3, 2)$. Знайти об'єм піраміди.

Відповіді:

Приклад 1. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD} = -7$.

Приклад 2. $V_{\text{паралелепіпеда}} = 25$.

Приклад 3. $\alpha = \frac{5}{3}$.

Приклад 4. $V_{\text{пір}} = \frac{9}{2}$.

11.12. Застосування векторної алгебри

Не будемо повторювати ті застосування, які ми вже розглянули в посібнику:

- робота сили з переміщення матеріальної точки;
- площі паралелограма й трикутника;
- момент сили відносно точки;
- об'єми паралелепіпеда й піраміди.

Наведемо ще декілька прикладів застосування векторної алгебри.

Приклад 1.

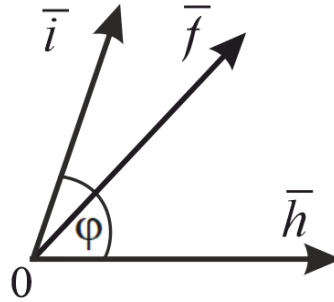


Рис.11.25

Сила $\vec{f}$, яка діє на провідник зі струмом у магнітному полі обчислюється за формулою

$$\vec{f} = \frac{\vec{i} \times \vec{h}}{c^2},$$

тут c – електродинамічна стала, $\vec{i}$ – вектор сили струму, що проходить у провіднику, $\vec{h}$ – вектор напруженості магнітного поля. Зауважимо, що взагалі вказана формула дещо складніша, але головне тут, що ми застосовуємо векторний добуток векторів.

Приклад 2. За допомогою векторного добутку можна знайти швидкість обертання довільної точки M тіла: $\vec{V}_M = \vec{\omega} \times \vec{r}$, тут $\vec{V}_M$ – лінійна швидкість точки M ; $\vec{\omega}$ – вектор кутової швидкості обертання; $\vec{r} = \vec{r}(M)$ – радіус-вектор точки M .

Приклад 3. Виявляється, що векторна алгебра застосовується при геометризації розривних порушень вугільних пластів.

Приклад 4. Векторна алгебра застосовується в розробці комп'ютерних ігор.

Переміщення віртуальних об'єктів в іграх потребує знань додавання (віднімання) векторів, скалярного та векторного добутків. Розробники комп'ютерних ігор сприймають вектор як набір деякої кількості чисел. Наведемо два приклади (у двовимірному просторі).

- 1) **Положення об'єкта:** розглянемо дві точки $O(0, 0)$ і $M(5, 4)$. Положення об'єкта $(5, 4)$ вказує на те, що він стоїть відносно початкового положення $O(0, 0)$ на 5 метрів на схід і 4 метри на північ (тобто маємо вектор $\vec{OM}$).
- 2) **Швидкість об'єкта:** розглянемо ті самі дві точки, але тепер вектор $\vec{OM}$ буде сприйматися як вектор швидкості (наприклад, за одну хвилину об'єкт переміститься на 5 км на схід і на 4 км на північ).

Індивідуальні завдання

Розділ I

Варіант 1

Задано вектори: $\vec{a}\{1; -3; 4\}$, $\vec{b}\{0; 2; 3\}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$.

Знайти:

- 1) $|\vec{a}|$; 2) $\text{pr}_y \vec{a}$; 3) $\text{pr}_z \vec{b}$; 4) $|\vec{c}|$; 5) $\cos \alpha$ вектора $\vec{a}$; 6) $\cos \gamma$ вектора $\vec{b}$;

7) $2\vec{a} - 3\vec{c}$; 8) $\vec{a}\vec{b}$; 9) $\vec{a}\times\vec{c}$; 10) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Варіант 2

Задано вектори: $\vec{a}\{-1; 4; -5\}$, $\vec{b}\{2; -2; 3\}$, $\vec{c} = \vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}$.

Знайти:

1) $|\vec{a}|$; 2) $\text{пр}_x \vec{a}$; 3) $\text{пр}_y \vec{b}$; 4) $|\vec{c}|$; 5) $\cos \beta$ вектора $\vec{a}$; 6) $\cos \alpha$ вектора $\vec{b}$;
7) $\vec{a} + 4\vec{c}$; 8) $\vec{a}\vec{b}$; 9) $\vec{a}\times\vec{c}$; 10) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Варіант 3

Задано вектори: $\vec{a}\{-2; -4; 0\}$, $\vec{b}\{1; 2; -3\}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

Знайти:

1) $|\vec{b}|$; 2) $\text{пр}_x \vec{a}$; 3) $\text{пр}_y \vec{b}$; 4) $|\vec{c}|$; 5) $\cos \gamma$ вектора $\vec{a}$; 6) $\cos \alpha$ вектора $\vec{c}$;
7) $2\vec{a} - 3\vec{c}$; 8) $2\vec{a}\vec{b}$; 9) $\vec{a}\times\vec{c}$; 10) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Варіант 4

Задано вектори: $\vec{p}\{0; 4; 5\}$, $\vec{q}\{2; -2; 4\}$, $\vec{m} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

Знайти:

1) $|\vec{q}|$; 2) $\text{пр}_x \vec{p}$; 3) $\text{пр}_y \vec{m}$; 4) $|\vec{m}|$; 5) $\cos \alpha$ вектора $\vec{q}$; 6) $\cos \gamma$ вектора $\vec{m}$;
7) $\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{q}$; 8) $\vec{q}\vec{m}$; 9) $\frac{1}{2}\vec{q}\times\vec{p}$; 10) $\vec{p}\vec{q}\vec{m}$.

Варіант 5

Задано вектори: $\vec{p}\{2; -3; 0\}$, $\vec{b}\{-1; 4; -2\}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 9\vec{k}$.

Знайти:

1) $|\vec{b}|$; 2) $\text{пр}_x \vec{p}$; 3) $\text{пр}_y \vec{c}$; 4) $|\vec{c}|$; 5) $\cos \beta$ вектора $\vec{p}$; 6) $\cos \gamma$ вектора $\vec{c}$;
7) $2\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}$; 8) $\vec{p}\vec{b}$; 9) $\vec{b}\times\vec{c}$; 10) $\vec{p}\vec{b}\vec{c}$.

Варіант 6

Задано точки: $A(0, 3, -1)$, $B(2, -5, 0)$, $C(3, 1, 4)$, $D(2, 0, 3)$.

Знайти:

1) $\vec{AB}$; 2) $\vec{BA}$; 3) $|\vec{AB}|$; 4) $\text{пр}_x \vec{AC}$; 5) $\cos \beta$ вектора $\vec{CB}$; 6) $\cos \gamma$ вектора $\vec{CD}$;
7) $4\vec{AB} + 3\vec{CB}$; 8) $\vec{AC} \cdot \vec{BA}$; 9) $\vec{CB}\times\vec{CD}$; 10) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD}$.

Варіант 7

Задано точки: $A(3, -3, 0)$, $B(5, -5, 1)$, $C(0, 1, 4)$, $D(-2, 0, -3)$.

Знайти:

1) $\vec{AB}$; 2) $\vec{BA}$; 3) $|\vec{AB}|$; 4) $\text{пр}_y \vec{AC}$;
5) $\cos \alpha$ вектора $\vec{CB}$; 6) $\cos \gamma$ вектора $\vec{CD}$; 7) $\vec{AC} - 2\vec{CB}$; 8) $\vec{AC} \cdot \vec{BA}$;
9) $\vec{AB}\times\vec{AD}$; 10) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} \cdot \vec{AD}$.

Варіант 8

Задано точки: $A(-8, 2, -1)$, $B(-2, 0, 0)$, $C(-3, 7, 4)$, $D(1, 0, 3)$.

Знайти:

1) $\vec{AC}$; 2) $\vec{CA}$; 3) $|\vec{AC}|$; 4) $\text{пр}_z \vec{BC}$; 5) $\text{пр}_y \vec{BD}$; 6) $\cos \alpha$ вектора $\vec{CD}$;

$$7) \frac{1}{5} \overline{AC} + 2\overline{CB}; 8) \overline{BC} \cdot \overline{BA}; 9) \overline{CB} \times \overline{CD}; 10) \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}.$$

Варіант 9

Задано точки: $A(-5, 3, 1)$, $B(-2, 5, 10)$, $C(-3, 0, 4)$, $D(1, 0, -3)$.

Знайти:

$$1) \overline{AD}; 2) \overline{DA}; 3) |\overline{AD}|; 4) \text{пр}_x \overline{BC}; 5) \cos \beta \text{ вектора } \overline{CB}; 6) \cos \gamma \text{ вектора } \overline{CD};$$

$$7) -2\overline{AB} + \overline{CB}; 8) \overline{CB} \cdot \overline{CD}; 9) \overline{CB} \times \overline{CD}; 10) \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}.$$

Варіант 10

Задано точки: $A(0, -2, 1)$, $B(2, 7, 0)$, $C(-5, 2, 4)$, $D(-1, 0, 3)$.

Знайти:

$$1) \overline{AC}; 2) \overline{CA}; 3) |\overline{AC}|; 4) \text{пр}_z \overline{BD}; 5) \cos \alpha \text{ вектора } \overline{CB}; 6) \cos \gamma \text{ вектора } \overline{CD};$$

$$7) 2\overline{AD} - 4\overline{CB}; 8) \overline{AB} \cdot \overline{CD}; 9) \overline{AB} \times \overline{CD}; 10) \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}.$$

Індивідуальні завдання

Розділ II

Варіант 11

Задано точки: $A(2, 2, -3)$, $B(0, 6, 0)$, $C(5, 2, -4)$, $D(1, 0, 3)$.

Знайти:

$$1) \overline{AC}; 2) |\overline{AC}|; 3) \text{пр}_z \overline{AC}; 4) \cos \alpha \text{ вектора } \overline{CD}; 5) \overline{CA}(\overline{AB} - 2\overline{CD}); 6) \overline{CA}(\overline{AB} - 2\overline{CD});$$

$$7) \text{площу паралелограма побудованого на векторах } \overline{AC} \text{ і } \overline{AB}; 8) \text{кут між векторами } \overline{AB} \text{ і } \overline{AD};$$

$$9) \text{об'єм піраміди, побудованої на векторах } \overline{BA}, \overline{BC} \text{ і } \overline{BD} \text{ як на сторонах}; 10) \text{перевірити, чи будуть вектори } \overline{AC}, \overline{BC} \text{ і } \overline{BD} \text{ компланарними?}$$

Варіант 12

Задано точки: $M(0, 2, 3)$, $N(1, 6, -4)$, $P(5, 0, -4)$, $Q(-1, 10, 3)$.

Знайти:

$$1) \overline{NP}; 2) |\overline{NP}|; 3) \text{пр}_x \overline{NP}; 4) \cos \beta \text{ вектора } \overline{NP}; 5) (\frac{1}{2} \overline{NP} + \overline{PQ}) \overline{NQ}; 6) \text{роботу сили } \vec{F} \{2; 1; 2\} \text{ з переміщення матеріальної точки із положення } N \text{ в положення } Q;$$

$$7) \text{пр}_{MN} \overline{QP}; 8) \overline{MP} \times \overline{QP}; 9) \text{площу трикутника } MPQ; 10) \text{об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах } \overline{MP}, \overline{MN} \text{ і } \overline{MQ} \text{ як на сторонах}.$$

Варіант 13

Задано точки: $M(1, 3, 7)$, $N(-4, 0, 1)$, $K(3, 1, 1)$, $L(-3, 4, 10)$.

Знайти:

$$1) \overline{LM}; 2) |\overline{LM}|; 3) \text{пр}_y \overline{LM}; 4) \cos \gamma \text{ вектора } \overline{LM}; 5) (\overline{LM} - \overline{NM}) \frac{1}{3} \overline{LK}; 6) \text{кут між векторами } \overline{KL} \text{ і } \overline{NM};$$

$$7) \text{за яких значень } \alpha \text{ і } \beta \text{ вектори } \overline{KM} \text{ і } \overline{a} = \alpha \vec{i} + 5\vec{j} + \beta \vec{k} \text{ будуть колінеарними?}$$

$$8) \text{площу паралелограма, побудованого на векторах } \overline{LM} \text{ і } \overline{LK} \text{ як на сторонах}; 9) \text{момент сили } \vec{F} = \overline{LM}, \text{ прикладеної в точці } L \text{ відносно точки } N;$$

$$10) \text{об'єм піраміди з}$$

вершинами в точках K, L, M, N .

Варіант 14

Задано точки: $C(0, 1, 0), D(3, -1, 2), K(5, -4, -1), L(2, 0, 7)$.

Знайти:

- 1) $\overline{KD}$; 2) $|\overline{KD}|$; 3) $\text{pr}_z \overline{KD}$; 4) $\cos \alpha$ вектора $\overline{KD}$; 5) $(\overline{CD} - 2\overline{DC})\overline{KL}$;
- 6) роботу сили $\vec{F} = \overline{DK}$ з переміщення матеріальної точки з положення L в положення C ; 7) кут між векторами $\overline{CD}$ і $\overline{CL}$; 8) площу трикутника CDK ; 9) об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{DC}, \overline{DK}$ і $\overline{DL}$ як на сторонах.
- 10) за якого значення m вектори $\overline{CD}, \overline{KC}$ і $\vec{d} = \vec{i} + m\vec{j}$ будуть компланарними?

Варіант 15

Задано точки: $M(-1, 0, 2), P(-3, 5, 8), L(0, 7, -5), D(4, -3, 1)$.

Знайти:

- 1) $\overline{PL}$; 2) $|\overline{PL}|$; 3) $\text{pr}_x \overline{PL}$; 4) $\cos \beta$ вектора $\overline{PL}$; 5) $(\overline{LP} - \overline{MD})\overline{PD}$;
- 6) кут між векторами $\overline{MD}$ і $\overline{ML}$; 7) $\text{pr}_{\overline{PD}}(\overline{MP} + \overline{PL})$; 8) $|\overline{MP} \times \overline{PL}|$; 9) момент сили $\vec{F} = \overline{PD}$, прикладеної до точки L відносно точки M ; 10) об'єм піраміди з вершинами в точках P, L, M, D .

Варіант 16

Задано точки: $A(2, 1, 0), B(3, 0, 8), C(4, -3, 2), D(3, -5, 0)$.

Знайти:

- 1) $\overline{AC}$; 2) $|\overline{AC}|$; 3) $\text{pr}_y \overline{AC}$; 4) $\cos \gamma$ вектора $\overline{AC}$; 5) $\overline{BC} \cdot \overline{CD}$; 6) $(2\overline{AB} + \overline{AC})\overline{CD}$;
- 7) роботу сили $\vec{F} = \overline{AB}$ з переміщення матеріальної точки з положення C в положення B ; 8) площу трикутника ABC ; 9) об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{CD}, \overline{CB}$ і $\overline{CA}$ як на сторонах; 10) за якого значення α точки A, B, C і $P(0, \alpha, 1)$ будуть лежати в одній площині.

Варіант 17

Задано точки: $N(-1, 2, 1), M(7, 14, 1), B(3, 1, 0), D(5, -3, 2)$.

Знайти:

- 1) $\overline{NB}$; 2) $|\overline{NB}|$; 3) $\text{pr}_z \overline{NB}$; 4) $\cos \alpha$ вектора $\overline{NB}$; 5) за якого значення m і n вектори $\overline{NM}$ і $\vec{a} = 3\vec{i} + 3m\vec{j} + n\vec{k}$ будуть колінеарними? 6) $(\frac{1}{4}\overline{NM} + \overline{MD})\overline{DB}$;
- 7) кут між векторами $\overline{ND}$ і $\overline{NB}$; 8) $|\overline{MB} \times \overline{DM}|$; 9) напрямні косинуси моменту сили $\vec{F} = \overline{BD}$, прикладеної до точки B відносно точки N ; 10) об'єм піраміди, побудованої на векторах $\overline{DB}, \overline{DN}$ і $\overline{DM}$ як на сторонах.

Варіант 18

Задано точки: $L(0, -3, 0), K(2, -3, 12), P(7, -3, 2), Q(0, 1, -4)$.

Знайти:

- 1) $\overline{KP}$; 2) $|\overline{KP}|$; 3) $\text{pr}_x \overline{KP}$; 4) $\cos \beta$ вектора $\overline{KP}$; 5) $(\overline{QL} - 2\overline{LK})\overline{PQ}$; 6) роботу сили

$\vec{F} = \overline{LP}$ з переміщення матеріальної точки з положення Q в положення P ;
 7) $\frac{1}{5} \overline{KP} \times \overline{PQ}$; 8) площу трикутника LKP ; 9) $\overline{QL} \cdot \overline{LK} \cdot \overline{PQ}$; 10) за якого значення m точки $L, P, Q, A(m, -1, 0)$ будуть лежати в одній площині?

Варіант 19

Задано точки: $M(0, -3, 4), N(1, -1, 1), B(4, 0, -5), K(10, -6, 1)$.

Знайти:

1) $\overline{NB}$; 2) $|\overline{NB}|$; 3) $\text{пр}_y \overline{NB}$; 4) $\cos \gamma$ вектора $\overline{NB}$; 5) $\overline{MN} (\overline{NB} - \frac{1}{6} \overline{KB})$; 6) кут між векторами $\overline{MB}$ і $\overline{MK}$; 7) $|\overline{MN} \times \overline{BK}|$; 8) величину моменту сили $\vec{F} = \overline{MN}$, прикладеної до точки B відносно точки K ; 9) об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{BK}, \overline{BN}$ і $\overline{BM}$ як на сторонах; 10) перевірити, чи будуть вектори $\overline{MN}, \overline{NB}$ і $\vec{a} = -3\vec{k}$ компланарними?

Варіант 20

Задано точки: $A(2, -2, 5), P(1, -3, 2), C(7, -3, 8), D(1, 0, 1)$.

Знайти:

1) $\overline{AP}$; 2) $|\overline{AP}|$; 3) $\text{пр}_z \overline{AP}$; 4) $\cos \alpha$ вектора $\overline{AP}$; 5) $(\overline{AP} + \overline{PD}) \frac{1}{3} \overline{PC}$;
 6) роботу сили $\vec{F} = \overline{PA}$ з переміщення матеріальної точки з положення D в положення C ; 7) $\overline{AC} \times \overline{CD}$; 8) площу трикутника CDP ; 9) $\overline{AC} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{PD}$;
 10) об'єм піраміди, побудованої на векторах $\overline{AP}, \overline{AC}$ і $\overline{AD}$ як на сторонах.

Варіант 21

Задано точки: $A(3, -1, 5), B(-2, 0, 4), C(-7, 3, 0), D(-17, 5, -2)$.

Знайти:

1) $\overline{AC}$; 2) $|\overline{AC}|$; 3) $\text{пр}_z \overline{AC}$; 4) $\cos \alpha$ вектора $\overline{AC}$; 5) перевірити, чи будуть вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ колінеарними? 6) $\overline{CA}(\overline{AB} - 2\overline{CD})$; 7) кут між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$;
 8) площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{CD}$ і $\overline{CA}$ як на сторонах; 9) об'єм піраміди з вершинами в точках A, B, C, D ; 10) перевірити, чи будуть вектори $\overline{AC}, \overline{BD}$ і $\overline{BC}$ компланарними?

Варіант 22

Задано точки: $M(-3, 1, 2), N(0, 4, -1), P(-11, 1, 4), Q(2, -1, 3)$.

Знайти:

1) $\overline{NP}$; 2) $|\overline{NP}|$; 3) $\text{пр}_x \overline{NP}$; 4) $\cos \beta$ вектора $\overline{NP}$; 5) $(\frac{1}{2} \overline{MP} + \overline{PQ}) \overline{NQ}$; 6) роботу сили $\vec{F} \{1; 4; -5\}$ з переміщення матеріальної точки з положення N в положення Q ; 7) $\text{пр}_{\overline{MN}} \overline{PQ}$; 8) $\overline{MP} \times \overline{QP}$; 9) площу трикутника MQR ; 10) об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{PN}, \overline{PM}$ і $\overline{PQ}$ як на сторонах.

Варіант 23

Задано точки: $K(-2, 1, -3), L(-8, 7, -3), M(2, 0, 0), N(-2, 1, 3)$.

Знайти:

1) $\overline{LM}$; 2) $|\overline{LM}|$; 3) $\text{pr}_y \overline{LM}$; 4) $\cos \gamma$ вектора $\overline{LM}$; 5) $(\overline{LM} - \overline{MN}) \frac{1}{3} \overline{KL}$; 6) кут між векторами $\overline{KL}$ і $\overline{KN}$; 7) за яких значень α і β вектори $\overline{KM}$ і $\overline{a} = \alpha \overline{i} + \beta \overline{j} + 5\overline{k}$ будуть колінеарними? 8) площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{LM}$ і $\overline{LN}$; 9) момент сили $\overline{F} = \overline{LM}$, прикладеної в точці L відносно точки N ; 10) об'єм піраміди з вершинами в точках K, L, M, N .

Варіант 24

Задано точки: $C(3, -4, 0)$, $L(-3, 3, 1)$, $D(-1, 1, 3)$, $K(-3, 3, 1)$.

Знайти:

1) $\overline{KD}$; 2) $|\overline{KD}|$; 3) $\text{pr}_z \overline{KD}$; 4) $\cos \alpha$ вектора $\overline{KD}$; 5) $(\overline{CD} - 2\overline{DC}) \overline{KL}$; 6) $\text{pr}_{\overline{LD}}(\overline{CK} + \overline{DL})$; 7) роботу сили $\overline{F} = \overline{DK}$ з переміщення матеріальної точки з положення L в положення C ; 8) площу трикутника CDK ; 9) об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{DC}$, $\overline{DK}$ і $\overline{DL}$ як на сторонах; 10) за якого значення m вектори $\overline{CD}$, $\overline{KC}$ і $\overline{d} = m\overline{i} - 2\overline{j}$ будуть компланарними?

Варіант 25

Задано точки: $M(-5, 1, 1)$, $P(0, 3, 4)$, $L(-8, -2, 0)$, $D(0, -4, 6)$.

Знайти:

1) $\overline{PL}$; 2) $|\overline{PL}|$; 3) $\text{pr}_x \overline{PL}$; 4) $\cos \beta$ вектора $\overline{PL}$; 5) $(4\overline{LP} + \overline{MD}) \overline{PD}$; 6) кут між векторами $\overline{PD}$ і $\overline{PM}$; 7) $\text{pr}_{\overline{PD}} \frac{1}{2} \overline{DL}$; 8) $|\overline{MP} \times \overline{PL}|$; 9) напрямні косинуси моменту сили $\overline{F} = \overline{PD}$, прикладеної до точки M відносно точки L ; 10) об'єм піраміди з вершинами в точках M, L, P, D .

Варіант 26

Задано точки: $A(0, 3, -1)$, $B(-3, 4, 2)$, $C(0, 4, 1)$, $D(9, 3, 5)$.

Знайти:

1) $\overline{AC}$; 2) $|\overline{AC}|$; 3) $\text{pr}_y \overline{AC}$; 4) $\cos \gamma$ вектора $\overline{AC}$; 5) $(2\overline{AB} + \overline{AC}) \overline{DC}$; 6) роботу сили $\overline{F} = \overline{AB}$ з переміщення матеріальної точки з положення C в положення B ; 7) $\overline{AC} \times \overline{CD}$; 8) площу трикутника CDA ; 9) об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{CA}$, $\overline{CB}$ і $\overline{CD}$ як на сторонах; 10) за якого значення α точки A, B, C і $P(0, \alpha, 1)$ будуть лежати в одній площині?

Варіант 27

Задано точки: $N(1, 0, 7)$, $M(2, 13, 9)$, $B(-3, 4, -1)$, $D(0, 4, 3)$.

Знайти:

1) $\overline{NB}$; 2) $|\overline{NB}|$; 3) $\text{pr}_z \overline{NB}$; 4) $\cos \alpha$ вектора $\overline{NB}$; 5) за якого значення m і n вектори $\overline{DB}$ і $\overline{a} = 2\overline{i} - m\overline{j} + 3n\overline{k}$ будуть колінеарними? 6) $(\frac{1}{4}\overline{NB} + \overline{MD})\overline{DB}$; 7) кут між векторами $\overline{NB}$ і $\overline{ND}$; 8) $|\overline{MB} \times \overline{DM}|$; 9) величину моменту сили $\overline{F} \in \{-3; 2; 4\}$, прикладеної до точки M відносно точки D ; 10) об'єм піраміди, побудованої на векторах $\overline{DB}$, $\overline{DN}$ і $\overline{DM}$ як на сторонах.

Варіант 28

Задано точки: $L(3, -5, 0)$, $K(0, 3, -2)$, $P(0, 2, 1)$, $Q(-7, 3, 1)$.

Знайти:

- 1) $\overline{KP}$; 2) $|\overline{KP}|$; 3) $\text{пр}_x \overline{KP}$; 4) $\cos \beta$ вектора $\overline{KP}$; 5) $(\overline{QL} - 2\overline{LK}) \cdot \overline{QP}$; 6) роботу сили $\vec{F} = \overline{LP}$ з переміщення матеріальної точки з положення K в положення Q ;
- 7) $(\overline{QL} - 2\overline{LK}) \times \overline{QP}$; 8) площу трикутника LKP ; 9) $\overline{QL} \cdot \overline{LK} \cdot \overline{PQ}$; 10) за якого значення m точки L, P, Q і $A(0, -m, 2)$ будуть лежати в одній площині?

Варіант 29

Задано точки: $M(3, -1, 5)$, $N(1, -2, 4)$, $B(-2, 0, -1)$, $K(-4, -3, 2)$.

Знайти:

- 1) $\overline{NB}$; 2) $|\overline{NB}|$; 3) $\text{пр}_y \overline{NB}$; 4) $\cos \gamma$ вектора $\overline{NB}$; 5) $\text{пр}_{\overline{NB}}(\overline{MN} + \overline{BK})$; 6) кут між векторами $\overline{MB}$ і $\overline{MK}$; 7) площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{BN}$ і $\overline{BK}$ як на сторонах; 8) величину моменту сили $\vec{F} = \overline{BK}$, прикладеної до точки M відносно точки N ; 9) об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{BN}, \overline{BK}$ і $\overline{BM}$ як на сторонах; 10) перевірити, чи будуть вектори $\overline{MN}, \overline{NB}$ і $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$ компланарними?

Варіант 30

Задано точки: $A(0, -4, 1)$, $P(2, -1, 3)$, $C(8, -4, 15)$, $D(1, 0, -2)$.

Знайти:

- 1) $\overline{AP}$; 2) $|\overline{AP}|$; 3) $\text{пр}_z \overline{AP}$; 4) $\cos \alpha$ вектора $\overline{AP}$; 5) $(\overline{AP} + \overline{PD}) \cdot \frac{1}{3} \overline{PC}$; 6) $\text{пр}_{\overline{PA}} \overline{DC}$;
- 7) роботу сили $\vec{F}\{3; 2; 4\}$ з переміщення матеріальної точки з положення D в положення C ; 8) площу трикутника CDP ; 9) $\overline{AC} \cdot \overline{CP} \cdot \overline{PD}$; 10) об'єм піраміди, побудованої на векторах $\overline{PA}, \overline{PC}$ і $\overline{PD}$ як на сторонах.

Приклади тестів

Теоретичні питання

1. Вектори не можна:
 - a) множити;
 - b) додавати;
 - c) ділити;
 - d) віднімати.
2. Які вектори називають колінеарними?
 - a) вектори, у яких однакові модулі;
 - b) вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих;
 - c) вектори які однаково напрямлені;
 - d) вектори, у яких початкова точка збігається з початком координат.
3. Який вигляд має умова колінеарності векторів?
 - a) $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$;
 - b) $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$;
 - c) $\frac{a_x}{b_x} + \frac{a_y}{b_y} + \frac{a_z}{b_z} = 1$;

- d) $a_x b_x = a_y b_y = a_z b_z$.
4. За якою формулою обчислюється модуль вектора $\vec{a}\{a_x; a_y; a_z\}$?
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_x + a_y + a_z}$;
 - $|\vec{a}| = \sqrt{a_x a_y a_z}$;
 - $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$;
 - $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 - a_y^2 - a_z^2}$.
5. Яким співвідношенням пов'язані напрямні косинуси?
- $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma$;
 - $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 0$;
 - $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$;
 - $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.
6. Чому дорівнює $\text{pr}_{\vec{b}} \vec{a}$?
- $\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|}$;
 - $\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}$;
 - $\frac{\vec{a}}{|\vec{b}|}$;
 - $\frac{\vec{b}}{|\vec{a}|}$.
7. Як записується умова перпендикулярності векторів?
- $\vec{a}\{a_x; a_y; a_z\}$, і $\vec{b}\{b_x; b_y; b_z\}$?
- $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 1$;
 - $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$;
 - $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$;
 - $a_x b_x = a_y b_y = a_z b_z$.
8. Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна обчислити за формулою:
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = (|\vec{a}| + |\vec{b}|) \cos \varphi$;
 - $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$;
 - $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$;
 - $\vec{a} \cdot \vec{b} = (|\vec{a}| + |\vec{b}|) \sin \varphi$.
9. Геометричний зміст модуля векторного добутку – це:
- $V_{\text{піраміди}}$;
 - $S_{\text{паралел}}$;
 - $S_{\text{трикут}}$;
 - $V_{\text{паралел}}$.
10. Якщо мішаний добуток ненульових векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ дорівнює нулю, то:

- а) вектори колінеарні;
- б) вектори компланарні;
- с) довжини векторів однакові;
- д) вектори перпендикулярні.

Відповіді: 1. с); 2. б); 3. а); 4. с); 5.д); 6. б); 7.с); 8. с); 9.б); 10. б).

Приклади тестів

Практичні питання

1. Задано вектори: $\vec{a}\{2; 1; 0\}$, $\vec{b}\{0; 4; -8\}$. Знайти $2\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$.
 - а) $\{0; -1; 3\}$;
 - б) $\{4; -1; 5\}$;
 - с) $\{3; 2; 7\}$;
 - д) $\{4; 1; 2\}$.
2. Знайти косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 14$, $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 21$.
 - а) $\cos \varphi = \frac{2}{21}$;
 - б) $\cos \varphi = \frac{7}{23}$;
 - с) $\cos \varphi = \frac{1}{11}$;
 - д) $\cos \varphi = \frac{5}{24}$.
3. За якого значення λ вектори $\vec{p}\{3; 1; -4\}$, $\vec{q}\{2; -2\lambda; 4\}$ будуть перпендикулярними?
 - а) $\lambda = -3$;
 - б) $\lambda = 4$;
 - с) $\lambda = -5$;
 - д) $\lambda = 0$.
4. Знайти $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 10$, $\angle \vec{a} \vec{b} = 120^\circ$.
 - а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$;
 - б) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 18$;
 - с) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -15$;
 - д) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$.
5. Знайти $\vec{c} \cdot \vec{d}$, якщо, $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{d} = \vec{i} - 5\vec{k}$.
 - а) $\vec{c} \cdot \vec{d} = 25$;
 - б) $\vec{c} \cdot \vec{d} = 22$;
 - с) $\vec{c} \cdot \vec{d} = 20$;
 - д) $\vec{c} \cdot \vec{d} = 28$.
6. Задано вектори: $\vec{a}\{5; 4; -2\}$, $\vec{b} = 2\vec{k}$. Знайти $\text{pr}_{\vec{b}} \vec{a}$.
 - а) $\text{pr}_{\vec{b}} \vec{a} = 3$;

- b) $\text{пр}_{\overline{2b}} = -6$;
 c) $\text{пр}_{\overline{2b}} \overline{a} = 7$;
 d) $\text{пр}_{\overline{2b}} \overline{a} = -4$.
7. Задано вектори: $\overline{p}\{1; 0; -1\}$, $\overline{q}\{3; 4; 2\}$. Знайти $\overline{p} \times \overline{q}$.
- a) $\overline{p} \times \overline{q}\{2; 0; 9\}$;
 b) $\overline{p} \times \overline{q}\{4; -5; 4\}$;
 c) $\overline{p} \times \overline{q}\{7; 0; -3\}$;
 d) $\overline{p} \times \overline{q}\{6; -1; 0\}$.
8. Задано вектори: $\overline{p}\{1; 0; -1\}$, $\overline{q}\{2; 1; 3\}$. Знайти $|\overline{p} \times \overline{q}|$.
- a) $|\overline{p} \times \overline{q}| = \sqrt{27}$;
 b) $|\overline{p} \times \overline{q}| = \sqrt{31}$;
 c) $|\overline{p} \times \overline{q}| = \sqrt{29}$;
 d) $|\overline{p} \times \overline{q}| = \sqrt{41}$.
9. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{a}\{-1; 4; 0\}$, $\overline{b}\{1; -2; 2\}$, $\overline{c} = \overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k}$ як на сторонах.
- a) $V_{\text{паралел}} = 12$;
 b) $V_{\text{паралел}} = 28$;
 c) $V_{\text{паралел}} = 16$;
 d) $V_{\text{паралел}} = 10$.
10. За якого значення α вектори $\overline{p}\{0; 3; 1\}$, $\overline{q}\{3; -2; 2\}$, $\overline{m} = \alpha \overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k}$ будуть компланарними?
- a) $\alpha = \frac{18}{7}$.;
 b) $\alpha = \frac{14}{3}$.;
 c) $\alpha = \frac{15}{4}$.;
 d) $\alpha = \frac{13}{5}$.

Відповіді: 1. d); 2. a); 3. c); 4. c); 5. b); 6. d); 7. b); 8. a); 9. c); 10. c).

Список використаних джерел

1. Шкіль М. І., Колеснік Т. В., Котлова В. М. Вища математика. Київ : Либідь, 1994. Кн. 1. 279 с.
2. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посіб. / В. В. Булдигін та ін. ; за ред. проф. В. В. Булдигіна. Київ : ТВіМС, 2011. 224 с.
3. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посіб. / Ю. К. Рудавський, П. П. Костробій, Х. П. Луник, Д. В. Уханська. Львів : ДУ «Львівська політехніка», 1999. 262 с.
4. Гришечкіна Т. С. Удосконалення системи утримання технічних об'єктів залізничного транспорту з урахуванням залежних відмов їх елементів : дис. ... канд. техн. наук : 05.22.20. Дніпро, 2021. 164 с.

Навчальне видання

*Бусарова Тетяна Миколаївна, Гришечкіна Тетяна Сергіївна,
Звонарьова Ольга Віталіївна, Семенець Галина Іванівна*

**ВИЩА МАТЕМАТИКА. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА.
ВЕКТОРНА АЛГЕБРА**

Навчальний посібник

Електронне видання

Комп'ютерна верстка Т. С. Гришечкіна
Дизайн обкладинки Т. С. Гришечкіна

Експертний висновок склав д-р фіз-мат. наук, проф. В. Кузнецов

Зареєстровано НМВ УДУНТ (№ 735 від 21.06.2024)

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 7,85. Обл.-вид. арк. 7,94.
Зам. № 1

Видавець: Український державний університет науки і технологій.
вул. Лазаряна, 2, ауд. 2216, ауд. 263 (наукова бібліотека)
м. Дніпро, 49010.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 7709 від 14.12.2022

