

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ НАУКИ І ТЕХНОЛОГІЙ

Т. Ф. Михайлова, Ю. А. Максименкова, І. В. Нечай

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ

ЧАСТИНА I

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Дніпро, 2025

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ НАУКИ І ТЕХНОЛОГІЙ

Т. Ф. Михайлова, Ю. А. Максименкова, І. В. Нечай

Математичний аналіз.
Диференціальне та інтегральне числення
функції.
Частина I

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ДНІПРО
2025

УДК 517.2/3(075.8)

М 69

Авторський колектив:

Михайлова Т. Ф., Максименкова Ю. А., Нечай І. В.

Рекомендовано Радою якості освітньої діяльності УДУНТ

Протокол № 8 від 18.04.2025 р.

М 69 Михайлова, Т. Ф. Математичний аналіз. Диференціальне та інтегральне числення функції. Частина 1 : навч. посіб. / Т. Ф. Михайлова, Ю. А. Максименкова, І. В. Нечай ; Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Електрон. вид. – Дніпро : УДУНТ, 2025. – 149 с.

ISBN 978-617-8314-54-5 (PDF)

У навчальному посібнику викладено розділи математичного аналізу з прикладами розв’язання типових задач. Використано також один з нових підходів до розв’язання типових задач у середовищі MapleSoft.

Посібник створений відповідно до вимог робочої програми з дисципліни Математичний аналіз для спеціальностей А4 Середня освіта (А4.08 Середня освіта (Фізика та астрономія)), освітня програма STEM-навчання.

Може бути використаний студентами та викладачами інших технічних спеціальностей.

Іл. 66, табл.1, бібліогр. 6 назв

УДК 517.2/3(075.8)



Цей твір ліцензовано на умовах Ліцензії Creative Commons
[«Attribution-NonCommercial-ShareAlike» 4.0 International \(CC BY-NC-SA 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)
(«Із зазначенням авторства – Некомерційна – Поширення на тих самих умовах» 4.0 Міжнародна)

ISBN 978-617-8314-54-5 (PDF)
DOI 10.15802/978-617-8314-54-5

© Михайлова Т. Ф., Максименкова Ю. А., Нечай І. В., 2025
© Укр. держ. ун-т науки і технологій, 2025

Зміст

I Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної	7
1 Границя числової послідовності	8
1.1. Числові послідовності	8
1.2. Обмежені послідовності	9
1.3. Монотонні послідовності	10
1.4. Нескінченно великі і нескінченно малі послідовності	10
1.4.1. Властивості нескінченно малих	11
1.5. Збіжні послідовності	11
1.5.1. Властивості збіжних послідовностей	12
1.6. Ознаки існування границі послідовності	13
1.7. Теорема про вкладені проміжки	13
1.8. Деякі способи обчислення границь	14
1.9. Розв'язання задач у середовищі Maple	18
Завдання до розділу	21
2 Функції дійсної змінної	22
2.1. Означення функції	22
2.2. Способи задання функції	22
2.3. Складена функція	24
2.4. Парність, непарність, періодичність, обмеженість, монотонність	24
2.4.1. Парні і непарні функції.	24
2.4.2. Періодичні функції	24
2.4.3. Обмежені функції	25
2.4.4. Зростаючі та спадні функції	26
2.5. Обернена функція	27
2.6. Елементарні функції	27
2.7. Задання функції в Maple	28
Завдання до розділу	30
3 Границя функції	32
3.1. Границя функції в точці	32
3.2. Нескінченно малі та нескінченно великі величини	32
3.3. Односторонні границі	33
3.4. Границя функції на нескінченності	33
3.5. Неперервні функції	34
3.6. Точки розриву функції	35
3.7. Основні теореми про неперервні функції	36
3.8. Розв'язування задач	37
3.8.1. Розкриття невизначеностей	39

3.8.2.	Дослідження функції на неперервність	43
3.9.	Відшукування границь у середовищі Maple	44
3.9.1.	Дослідження функцій на неперервність засобами Maple	47
	Завдання до розділу	49
4	Похідна	53
4.1.	Поняття похідної	53
4.1.1.	Фізичний, геометричний та економічний зміст похідної	53
4.2.	Похідні основних елементарних функцій	55
4.3.	Основні правила диференціювання	55
4.4.	Похідна оберненої функції	56
4.5.	Похідна складеної функції	56
4.6.	Похідна функції, заданої параметрично	57
4.7.	Похідна неявно заданої функції	57
4.8.	Логарифмічна похідна	58
4.9.	Диференційовні функції	59
4.9.1.	Зв'язок між диференційовністю і неперервністю функції	59
4.10.	Диференціал функції	60
4.11.	Похідні та диференціали вищих порядків	61
	Завдання до розділу	62
5	Властивості диференційовних функцій	64
5.1.	Основні теореми диференціального числення	64
5.2.	Правило Лопіталя	65
5.3.	Формула Тейлора	67
5.3.1.	Формула Тейлора для основних елементарних функцій	68
	Завдання до розділу	68
6	Дослідження функції	70
6.1.	Ознака монотонності функції	70
6.2.	Локальні екстремуми функції	70
6.3.	Найбільше та найменше значення неперервної функції на відрізку	73
6.4.	Опуклість та увігнутість графіка функції	73
6.5.	Асимптоти графіка функції	74
6.6.	Схема побудови графіка функції	76
6.7.	Диференціювання в Maple	78
6.7.1.	Відшукування похідних	78
6.7.2.	Похідна параметрично заданої функції	79
6.7.3.	Похідна функції, заданої неявно	80
6.7.4.	Похідна степенево-показникового виразу	80
6.8.	Дослідження функції в Maple	80
6.8.1.	Інтервали монотонності	80
6.8.2.	Локальні екстремуми	82
6.8.3.	Найбільше та найменше значення неперервної функції на відрізку	84
6.8.4.	Опуклість та увігнутість графіка функції	84
6.8.5.	Асимптоти графіка функції	85
6.8.6.	Аналіз графіка функції	85
6.8.7.	Побудова графіка функції	87
	Завдання до розділу	93

7	Невизначений інтеграл	94
7.1.	Первісна	94
7.2.	Невизначений інтеграл	94
7.3.	Властивості невизначеного інтеграла	95
7.4.	Таблиця інтегралів	95
7.5.	Основні методи інтегрування	96
7.5.1.	Безпосереднє інтегрування	96
7.5.2.	Метод підстановки	97
7.5.3.	Інтегрування частинами	98
7.6.	Основні класи функцій, що інтегруються в квадратурах	100
7.6.1.	Інтегрування дробово-раціональних функцій	100
7.6.2.	Інтегрування раціональних дробів	105
7.6.3.	Інтегрування деяких тригонометричних функцій	106
7.6.4.	Інтегрування деяких ірраціональних функцій	109
7.7.	Інтеграли, що «не беруться»	112
7.8.	Невизначений інтеграл в Maple	112
	Завдання до розділу	115
8	Визначений інтеграл	118
8.1.	Побудова визначеного інтеграла	118
8.2.	Умови існування визначеного інтеграла	119
8.2.1.	Необхідна умова існування	119
8.2.2.	Суми Дарбу та їх властивості	120
8.2.3.	Основні класи інтегровних функцій	121
8.3.	Властивості визначеного інтеграла	121
8.4.	Теорема про середнє значення	122
8.5.	Інтеграл зі змінною верхньою межею	123
8.6.	Формула Ньютона - Лейбніца	124
8.7.	Заміна змінної у визначеному інтегралі	125
8.8.	Формула інтегрування частинами	127
8.9.	Поняття невластного інтеграла	127
8.9.1.	Невластні інтеграли з нескінченними межами інтегрування	128
8.9.2.	Невластні інтеграли від необмежених функцій	129
8.9.3.	Ознаки збіжності невластних інтегралів	131
8.10.	Застосування визначеного інтеграла	133
8.10.1.	Обчислення площі	133
8.10.2.	Обчислення довжини дуги	135
8.10.3.	Площа поверхні обертання	137
8.10.4.	Обчислення об'ємів	138
8.11.	Визначений інтеграл в Maple	140
8.11.1.	Обчислення визначеного інтеграла	140
8.11.2.	Заміна змінних та інтегрування частинами визначеного інтеграла	140
8.11.3.	Невластні інтеграли	141
8.11.4.	Застосування визначеного інтеграла	142
	Завдання до розділу	146
	Бібліографічний список	148

Передмова

Посібник створений відповідно до вимог робочої програми з дисципліни Математичний аналіз для спеціальностей А4 Середня освіта (А4.08 Середня освіта (Фізика та астрономія)), освітня програма STEM-навчання. Мета посібника – дати студентам найдоступніший спосіб здобуття нових знань з розділів математичного аналізу з прикладами розв’язання типових задач. Використано також один з нових підходів до розв’язання типових задач у середовищі MapleSoft.

В посібнику викладено основні поняття математичного аналізу. Його можна безпосередньо використовувати і за прямим призначенням, як навчальний посібник, і для самостійного ознайомлення з курсом приведених розділів математичного аналізу.

Кожний розділ присвячений певній темі курсу математичного аналізу і має таку структуру. Протягом розділу розглянуто теоретичний матеріал, підкріплений прикладами. Останній параграф розділу присвячений розв’язанню типових завдань у програмному середовищі MapleSoft. В кінці розділу, для закріплення основних теоретичних положень і навичок розв’язування задач для самоконтролю, читачеві пропонуються завдання для самостійного розв’язування.

Перша частина посібника присвячена диференціальному та інтегральному численню функцій однієї змінної.

Перший розділ присвячено вивченню числових послідовностей та способам визначення їхніх границь.

Другий розділ присвячено вивченню видів функцій дійсної змінної та їх представленню в середовищі MapleSoft.

В третьому розділі розглянуто поняття границі функції, методи обчислення границь функцій та дослідження неперервності функцій.

Четвертий розділ присвячено розгляду понять похідної та диференціала функції однієї змінної, застосування похідної для реальних технічних задач, основним правилам диференціювання.

В п’ятому розділі розглянуто основні властивості диференційованих функцій та формули Тейлора, їх практичні застосування.

В шостому розділі розглянуто дослідження функцій та побудова графіків.

Сьомий та восьмий розділи присвячені визначенню понять первісних та визначених інтегралів, прийомам інтегрування, застосуванню інтегралів до розв’язування задач фізики та механіки.

Посібник відображає багаторічний досвід роботи його авторів у закладах вищої освіти і практиковані методичні прийоми подання навчального матеріалу в найбільш компактній і доступній формі. Він підводить підсумок багаторічного досвіду викладання математичного аналізу на кафедрі фізики та прикладної математики в навчально-науковому інституті "Дніпровський інститут інфраструктури і транспорту".

Нехай він буде корисним новим студентам!

Частина I

Диференціальне та інтегральне
числення функції однієї змінної

Тема 1

Границя числової послідовності

1.1. Числові послідовності

Означення 1. Якщо кожному числу n натурального ряду ставиться у відповідність дійсне число x_n , то множину чисел:

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

називають числовою послідовністю або просто послідовністю.

Послідовність з елементами x_n позначають або x_n , $n = 1, 2, \dots$, або $\{x_n\}$.

Послідовність вважається заданою, якщо вказане правило, за яким отримують її елементи, тобто закон відображення $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Найчастіше цей закон описують у вигляді аналітичного виразу або формули. Такий спосіб називають *аналітичним*.

Приклад 1. $a_n = n^2$. Послідовність має вигляд 1; 4; 9; 16; ...

Приклад 2. $a_n = \begin{cases} 1, & n = 2k - 1; \\ 0, & n = 2k, \end{cases}$ де $k = 1, 2, \dots$.

Запишемо кілька перших членів цієї послідовності: 1; 0; 1; 0; ...

Приклад 3. $a_n = \frac{1}{2} (1 + (-1)^{n+1})$. Неважко бачити, що ця послідовність і послідовність із попереднього прикладу — однакові.

Закон, за яким задається n -й член послідовності, можна описати і в такий спосіб: задати кілька перших членів послідовності і виразити її n -й член через попередні. Такий спосіб задання називають *рекурентним* (від латинського *recursio* — повернення).

Приклад 4. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n = 3, 4, \dots$. Маємо послідовність: 1; 1; 2; 3; 5; 8; ... Її називають послідовністю Фібоначчі.

Приклад 5. Нехай a_1 та d — задані числа. Визначимо n -й член за формулою $a_{n+1} = a_n + d$. Отримуємо послідовність вигляду a_1 ; $a_1 + d$; $a_1 + 2d$; ... Її називають арифметичною прогресією.

Приклад 6. Нехай a_1 та q — задані числа. Визначимо n -й член за формулою $a_{n+1} = a_n q$. Отримуємо послідовність вигляду a_1 ; $a_1 q$; $a_1 q^2$; ... Вона називається геометричною прогресією.

Не завжди числова послідовність задається формулою її загального члена. Так, наприклад, послідовність $1; 1, 4; 1, 41, \dots$ десяткових наближених значень $\sqrt{2}$ з недостатньо задається не формулою, а *описом процесу*, який дозволяє для кожного натурального n знайти наближене значення $\sqrt{2}$ з точністю до $\frac{1}{10^n}$. Ще одним таким прикладом є послідовність простих чисел

$$2, 3, 5, 7, \dots$$

Ніякі формули (які б містили лише елементарні операції) для загального члена послідовності простих чисел невідомі. Проте процес побудови цієї послідовності (відоме з арифметики «решето Ератосфена») дуже простий: у ряді натуральних чисел викреслюються парні числа, потім — кратні трьом і т.д.

Заданням скінченної множини перших членів послідовності *не визначається* однозначно. Дійсно, якщо задані числові значення лише перших k членів $a_1, a_2, \dots, a_k$, то решту членів $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots$ можна визначити як завгодно і отримати скільки завгодно різних послідовностей.

Нехай, наприклад, задані перші чотири члени послідовності:

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

Поклавши при $k > 4$, $a_k = 0$, отримаємо послідовність

$$1, 2, 3, 4, 0, 0, \dots;$$

поклавши $a_k = 1$, отримаємо

$$1, 2, 3, 4, 1, 1, \dots$$

За даними k першими членами можна побудувати різні формули $a_n = f(n)$, які б давали при $n = 1, 2, \dots, k$ відповідно значення чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$.

Так, у розглянутому щойно прикладі можна покласти $a_n = n$ або $a_n = n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$. При цьому отримаємо дві різні послідовності з однаковими першими чотирма членами $1, 2, 3, 4$. Решта їхніх членів будуть різні.

1.2. Обмежені послідовності

Означення 2. Послідовність $\{x_n\}$ називають обмеженою зверху (знизу), якщо існує число M (m) таке, що для усіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $x_n \leq M$ ($x_n \geq m$).

Числа M і m називають *верхньою* та *нижньою гранями* послідовності. Очевидно, що послідовність, обмежена зверху (знизу), має безліч верхніх (нижніх) граней. *Найменшу* з верхніх граней називають *точною верхньою гранню*, її позначають символом $\sup\{x_n\}$. *Найбільшу* з нижніх граней називають *точною нижньою гранню*, її позначають символом $\inf\{x_n\}$.

Приклад 1. Послідовність $1, 2, \dots, n, \dots$ обмежена знизу. За нижню грань можна взяти будь-яке число, що не перевищує одиниці. Очевидно, що $\inf\{x_n\}=1$.

Приклад 2. Послідовність $-1, -4, -6, \dots, -2n, \dots$ обмежена зверху. За верхню грань можна взяти будь-яке число $M \geq -1$, $M = -1$ є точною верхньою гранню заданої множини чисел.

Приклад 3. Послідовність $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}, \dots$ є обмеженою і зверху, і знизу. Числа 0 і 1 є відповідно її точною нижньою і точною верхньою гранями.

Означення 3. Послідовність, обмежену і зверху і знизу, називають *обмеженою послідовністю*. Тобто послідовність $\{x_n\}$ називають обмеженою, якщо існують числа m і M такі, що для усіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $m \leq x_n \leq M$.

Твердження 1.2.1. Послідовність $\{x_n\}$ є обмеженою тоді і тільки тоді, коли існує число $A > 0$ таке, що $|x_n| \leq A$ для усіх $n \in \mathbb{N}$.

Означення 4. Послідовність $\{x_n\}$ називають необмеженою, якщо для будь-якого числа $A > 0$ знайдеться член послідовності x_N такий, що $|x_N| > A$.

Приклад 4. Послідовність $1, 2, 1, 3, 1, 4, \dots, 1, n, \dots$ необмежена.

Приклад 5. Послідовність $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ необмежена.

Приклад 6. Послідовність $1, -2, 3, -4, \dots, (-1)^{n+1}n, \dots$ необмежена.

1.3. Монотонні послідовності

Означення 5. Послідовність $\{a_n\}$ називають зростаючою (спадною), якщо для будь-якого номера n має місце нерівність

$$a_{n+1} > a_n \quad (a_{n+1} < a_n).$$

Приклад 1. Послідовність $a_n = \frac{n+1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ є спадною.

Дійсно, розглянемо різницю $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{(n+2)n - (n+1)^2}{(n+1)n} = \frac{-1}{(n+1)n} < 0.$$

Отже, для будь-якого n виконується нерівність $a_{n+1} < a_n$, тобто послідовність $\{a_n\}$ є спадною.

Приклад 2. Послідовність $b_n = \frac{3n+4}{n+2}$, $n = 1, 2, \dots$ є зростаючою.

Переконатися у цьому пропонуємо самостійно.

Означення 6. Послідовність $\{a_n\}$ називається незростаючою (неспадною), якщо для будь-якого натурального n має місце нерівність

$$a_{n+1} \leq a_n \quad (a_{n+1} \geq a_n).$$

Приклад 3. Послідовність $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \dots$ є незростаючою.

Приклад 4. Послідовність $1; 2; 3; 3; 4; 5; 5; \dots$ є неспадною.

Зауваження. Якщо послідовність $\{a_n\}$ одночасно є неспадною і незростаючою, то вона є сталою: $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \dots$

Означення 7. Спадні, зростаючі, неспадні та незростаючі послідовності називають монотонними послідовностями, а спадні та зростаючі — строго монотонними.

1.4. Нескінченно великі і нескінченно малі послідовності

Означення 8. Послідовність $\{x_n\}$ називають нескінченно великою, якщо для будь-якого числа $A > 0$ (яке може бути наскільки завгодно великим) існує такий номер N , що $|x_n| > A$ для $n > N$.

Із означення випливає, що нескінченно велика послідовність є необмеженою. Але не кожна необмежена є нескінченно великою. Так, із наведених у попередньому пункті прикладів нескінченно великими є послідовності з прикладів 5 та 6. Послідовність із прикладу 4 не є нескінченно великою, оскільки нерівність $|x_n| > A$ виконується не для всіх n .

Означення 9. Послідовність $\{\alpha_n\}$ називають нескінченно малою, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ (яке може бути наскільки завгодно малим) існує такий номер N , що $|\alpha_n| < \varepsilon$ для $n > N$.

Між нескінченно великими і нескінченно малими послідовностями має місце такий зв'язок:

Твердження 1.4. 1. Якщо послідовність $\{x_n\}$ — нескінченно велика і всі її члени відмінні від нуля, то послідовність $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ є нескінченно малою, і навпаки, якщо $\{\alpha_n\}$ — нескінченно мала послідовність і $\alpha_n \neq 0$, то послідовність $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ — нескінченно велика.

1.4.1. Властивості нескінченно малих

Твердження 1.4. 2. Сума і різниця двох нескінченно малих послідовностей — нескінченно мала.

Наслідок. Сума скінченної кількості нескінченно малих є нескінченно малою.

Твердження 1.4. 3. Нескінченно мала послідовність — обмежена.

Твердження 1.4. 4. Добуток нескінченно малої на обмежену є нескінченно малою.

Наслідок. Добуток нескінченно малих є нескінченно малою.

1.5. Збіжні послідовності

Означення 10. Число a називають границею послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує номер N такий, що при $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$, тобто якщо різниця $x_n - a$ є нескінченно малою.

Послідовність, для якої існує границя, називають збіжною. Якщо число a є границею послідовності $\{x_n\}$, то кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ збігається до a . Позначають цей факт символами: $x_n \rightarrow a$ або $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Послідовності, що не мають границі, називають розбіжними.

П р и к л а д 1. Послідовність $x_n = C$, $n = 1, 2, \dots$, де C — стала величина, збігається до C .

Справді, яким би не було число $\varepsilon > 0$, нерівність $|x_n - C| < \varepsilon$ для даної послідовності виконується для усіх $n \in \mathbb{N}$. Отже, границя сталої дорівнює самій сталій:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C = C.$$

П р и к л а д 2. Послідовність $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ збігається до 0.

Задамо яке-небудь додатне число ε і покажемо, що існує номер N такий, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Розв'яжемо цю нерівність відносно n :

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Як бачимо, за N можна взяти, наприклад, число $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, де квадратні дужки позначають цілу частину числа.

П р и к л а д 3. Покажемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Розв'яжемо відносно n нерівність $\left| \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$, де ε — будь-яке наперед задане додатне число. Оскільки

$$\left| \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)2} \right| = \frac{1}{2(2n+1)},$$

то

$$\left| \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

Враховуючи, що $\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2} < \frac{1}{4\varepsilon} < \left\lceil \frac{1}{4\varepsilon} \right\rceil + 1$, знаходимо, що за N можна взяти число $N = \left\lceil \frac{1}{4\varepsilon} \right\rceil$.

П р и к л а д 4. Очевидно, що послідовність $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$ є розбіжною.

Означення 11. δ -околом точки x_0 називають множину

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad \delta > 0.$$

Означення 12. Проколотим δ -околом точки x_0 називають множину

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta), \quad \delta > 0.$$

Зауваження 1. Якщо послідовність $\{x_n\}$ збігається до a , то, починаючи з деякого номера, усі члени послідовності потрапляють у ε -окіл точки a :

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \text{ при } n > N.$$

Поза цим околом знаходиться скінченна кількість членів послідовності.

Зауваження 2. Якщо послідовність $\{x_n\}$ збігається до a , то її загальний член можна подати у вигляді $x_n = a + \alpha_n$, де α_n — нескінченно мала.

Зауваження 3. Нескінченно велика послідовність $\{x_n\}$ границі не має. Те, що послідовність $\{x_n\}$ є нескінченно великою, позначають так: $x_n \rightarrow \infty$ або $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Записи $x_n \rightarrow +\infty$ або $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ($x_n \rightarrow -\infty$ або $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$) означають, що послідовність $\{x_n\}$ є нескінченно великою і, починаючи з деякого номера, її члени набувають додатних (від'ємних) значень.

Зауваження 4. Очевидно, що нескінченно мала послідовність $\{\alpha_n\}$ є збіжною і $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

1.5.1. Властивості збіжних послідовностей

1°. Єдиність границі збіжної послідовності

Твердження 1.5.1. Збіжна послідовність має тільки одну границю.

2°. Обмеженість збіжної послідовності

Твердження 1.5.2. Збіжна послідовність — обмежена.

3°. Арифметичні операції над збіжними послідовностями

Твердження 1.5.3. Нехай $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ — збіжні послідовності і нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, тоді

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \cdot b;$$

$$3) \text{ якщо } y_n \neq 0 \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b}.$$

З а у в а ж е н н я. Твердження 1.5.3 справджується для скінченної кількості збіжних послідовностей і, взагалі кажучи, перестає бути справедливим для нескінченного їх числа.

4°. Граничний перехід у нерівностях

Твердження 1.5.4. Якщо члени збіжної послідовності $\{x_n\}$, починаючи з деякого номера, задовольняють нерівність $x_n \geq b$ ($x_n \leq b$), то і границя a цієї послідовності задовольняє нерівність $a \geq b$ ($a \leq b$).

З а у в а ж е н н я. Якщо нерівність є строгою $x_n > b$ ($x_n < b$), то в результаті граничного переходу вона не порушується, хіба що може перейти в нестрогу $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq b$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b$). Наприклад, усі члени послідовності $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ задовольняють нерівність $\frac{1}{n} > 0$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

1.6. Ознаки існування границі послідовності

Твердження 1.6.1. Монотонна обмежена послідовність збігається.

Твердження 1.6.2. Нехай послідовності $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ такі, що $x_n \leq y_n \leq z_n$, і нехай послідовності $\{x_n\}$ і $\{z_n\}$ збігаються до a , тоді послідовність $\{y_n\}$ теж збігається до a .

1.7. Теорема про вкладені проміжки

Нехай задана система проміжків

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots,$$

у якій кожний наступний проміжок міститься у попередньому. Таку систему проміжків називають *вкладеною системою проміжків*. Кінці проміжків вкладеної системи проміжків задовольняють вимоги

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1.$$

Кажуть, що довжини відрізків вкладеної системи проміжків прямують до нуля, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$.

Теорема 1 (Про вкладені проміжки). Для будь-якої системи вкладених проміжків, довжини відрізків якої прямують до нуля, існує єдина точка, що належить усім відріzkам одночасно.

1.8. Деякі способи обчислення границь

При обчисленні границі послідовності користуються властивостями збіжних послідовностей. Випадки, у яких не можна ними скористатися, називають *невизначеностями*. Такими невизначеностями є:

- 1) відношення двох нескінченно малих — невизначеність виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$;
- 2) відношення двох нескінченно великих — невизначеність виду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$;
- 3) добуток нескінченно малої на нескінченно велику — невизначеність виду $\{0 \cdot \infty\}$. Враховуючи, що обернена до нескінченно малої є нескінченно великою і, навпаки, обернена до нескінченно великої є нескінченно малою, невизначеність $\{0 \cdot \infty\}$ можна звести до виду $\{0 \cdot \infty\} = \left\{\frac{1}{\infty} \cdot \infty\right\} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ або до виду $\{0 \cdot \infty\} = \left\{0 \cdot \frac{1}{0}\right\} = \left\{\frac{0}{0}\right\}$.
- 4) різниця двох нескінченно великих — невизначеність виду $\{\infty - \infty\}$;
- 5) невизначеності виду $\{1^\infty\}$, $\{\infty^0\}$, $\{0^0\}$.

У цьому розділі ми обмежимося розглядом лише деяких невизначеностей. Повний аналіз усіх перелічених типів невизначеностей проводиться у розділі «3.8. Границя функції», див. стор. 37.

При розв'язуванні прикладів часто зустрічаються такі границі:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 \text{ при } k > 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n = \begin{cases} \infty, & \text{при } |p| > 1, \\ 0, & \text{при } |p| < 1; \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{p^n} = 0 \text{ при } |p| > 1.$$

Приклад 1. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 4}{2n^2 - n + 5}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник і знаменник дробу на n^2 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 4}{2n^2 - n + 5} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}}{2 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2})} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 2. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3 - 4n)^2}{(n - 3)^3 - (n + 1)^3}$.

Розв'язання. Звертаємо увагу, що в знаменнику дробу маємо невизначеність виду $\{\infty - \infty\}$. Після нескладних перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} (n - 3)^3 - (n + 1)^3 &= ((n - 3) - (n + 1)) ((n - 3)^2 + (n - 3)(n + 1) + (n + 1)^2) = \\ &= -4 ((n - 3)^2 + (n - 3)(n + 1) + (n + 1)^2). \end{aligned}$$

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3 - 4n)^2}{(n - 3)^3 - (n + 1)^3} = -\frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3 - 4n)^2}{(n - 3)^2 + (n - 3)(n + 1) + (n + 1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{3}{n} - 4)^2}{(1 - \frac{3}{n})^2 + (1 - \frac{3}{n})(1 + \frac{1}{n}) + (1 + \frac{1}{n})^2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{16}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Приклад 3. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} \sin n!}{n+2}$.

Розв'язання. Чисельник дробу являє собою добуток нескінченно великої на обмежену і є необмеженою величиною, знаменник — нескінченно велика величина. Поділимо чисельник і знаменник на n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} \sin n!}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \sin n!}{1 + \frac{2}{n}} = 0.$$

У результаті отримано дріб, знаменник якого прямує до 1, а чисельник являє собою добуток нескінченно малої на обмежену: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 0$, $|\sin n!| \leq 1$, тобто чисельник отриманого дробу прямує до нуля.

Приклад 4. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \{\infty - \infty\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = 0. \end{aligned}$$

Приклад 5. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник і знаменник дробу на 3^n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-\frac{2}{3})^n + 1}{(-2)(-\frac{2}{3})^n + 3} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 6. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n}$, ($|a| < 1$, $|b| < 1$).

Розв'язання. Чисельник і знаменник дробу являють собою суми $n+1$ перших членів нескінченно спадних геометричних прогресій і є збіжними послідовностями. Скориставшись формулою суми n перших членів геометричної прогресії, отримаємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}} = \frac{1-b}{1-a}.$$

Приклад 7. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$.

Розв'язання. Кожний із доданків є нескінченно малою величиною при $n \rightarrow \infty$, але застосувати теорему про суму нескінченно малих у даному прикладі не можна — кількість доданків із зростанням n необмежено збільшується. Запишемо суму дробів у вигляді одного дробу:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+(n-1)}{n^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1+(n-1)}{2}(n-1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Тут ми скористались формулою для суми n перших членів арифметичної прогресії, після чого поділили чисельник і знаменник дробу на n^2 .

Приклад 8. Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right)$.

Розв'язання. Позначимо суму n доданків, границю якої нам треба знайти, через

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

Знаходимо, що

$$S_1 = \frac{1}{2};$$

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{3+1}{2 \cdot 3} = \frac{4}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3};$$

$$S_3 = S_2 + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{8+1}{3 \cdot 4} = \frac{9}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4}.$$

Як бачимо, для $n = 1, 2, 3$ має місце формула $S_n = \frac{n}{n+1}$. Припускаємо, що вона має місце для члена з довільним номером n , і перевіримо її для члена з номером $n+1$:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}. \end{aligned}$$

Отже, припущення щодо формули загального члена $S_n = \frac{n}{n+1}$ справдилось, і

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Знаходимо границю послідовності S_n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Вираз для S_n можна знайти і з інших міркувань: неважко бачити, що

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Тоді сума S_n має вигляд

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Приклад 9. Знайти суму

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}.$$

Розв'язання. Знайдемо подання дробу $\frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$ у вигляді суми так званих найпростіших дробів:

$$\frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2},$$

де A, B та C деякі, поки що невідомі, коефіцієнти. Для їх визначення зведемо дроби в правій частині останньої рівності до спільного знаменника, отримаємо два рівні дроби з однаковими знаменниками, прирівняємо їх чисельники і отримаємо умови для невідомих A, B та C :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} &= \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} = \\ &= \frac{A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

Рівність чисельників дробів із лівої та правої частин останньої низки рівностей

$$1 = A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1)$$

можна розглядати як рівність многочленів дійсної змінної n . Оскільки рівні многочлени набувають однакових значень, то, надаючи дійсній змінній n значень, наприклад, $n = 0$, $n = -1$, $n = -2$, отримаємо три умови для визначення трьох невідомих A , B , C :

$$\begin{aligned} 1) \quad n = 0, \quad 1 &= 2A, \quad A = \frac{1}{2}; \\ 2) \quad n = -1, \quad 1 &= -B, \quad B = -1; \\ 3) \quad n = -2, \quad 1 &= 2C, \quad C = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Отже, ми показали, що має місце подання

$$\begin{aligned} \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} &= \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right). \end{aligned}$$

Обчислимо суму S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Таким чином, ми знайшли, що $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

Приклад 10. Знайти значення виразу $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$.

Розв'язання. Розглянемо послідовність

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2 + x_1}, \dots, x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}, \dots$$

Очевидно, що ця послідовність є обмеженою: усі її члени задовольняють умову $0 < x_n < 2$. Очевидним є також, що послідовність монотонно зростає. Звідси випливає, що послідовність $\{x_n\}$ має границю, позначимо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. У рівності $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$ перейдемо до границі при $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + x_{n-1}} \Leftrightarrow a = \sqrt{2 + a}.$$

Розв'язуючи отримане рівняння відносно a і враховуючи, що $a > 0$, знаходимо:

$$\begin{cases} a = \sqrt{2 + a}, \\ a > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 2 = 0, \\ a > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1 \pm 3}{2} \\ a > 0. \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1 + 3}{2} = 2.$$

1.9. Розв’язання задач у середовищі Maple

В Maple для деяких математичних операцій існують по дві команди: одна прямого, а інша — відкладеного виконання, причому імена цих команд складаються з однакових букв. Назва команди прямого виконання, як правило, починається з малої букви, команда виконується негайно після звернення до неї. Назви відкладених команд починаються з великої букви, зазвичай у тому випадку, коли існує команда-синонім прямого виконання. Після звернення до команди відкладеного виконання задана математична операція виводиться у стандартному математичному вигляді і зразу не обчислюється. Для виконання відкладеної операції потрібно використовувати команду **value**. Команди прямого виконання називають *активною* формою, а команди відкладеного виконання — *інертною* формою команди.

Покажемо застосування Maple на прикладах, детально досліджених у попередньому параграфі.

П р и к л а д 1. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 4}{2n^2 - n + 5}$.

Р о з в ’ я з а н н я. Для відшукування границі в Maple існують функції **limit** і **Limit**. Застосування їх до числових послідовностей¹ може бути записане так:

```
> Limit(expr, n=infinity)
```

```
> limit(expr, n=infinity)
```

Тут **expr** — вираз загального члена послідовності через його номер, **n** — номер загального члена.

```
> Limit((n^2+3*n+4)/(2*n^2-n+5), n=infinity); value(%)
```

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 4}{2n^2 - n + 5}$$
$$\frac{1}{2}$$

Символ **%** позначає результат останньої виконаної операції.

Дещо привабливішим виглядає такий запис:

```
> Limit((n^2+3*n+4)/(2*n^2-n+5), n=infinity)=limit((n^2+3*n+4)/(2*n^2-n+5),  
n=infinity);
```

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 4}{2n^2 - n + 5} = \frac{1}{2}.$$

П р и к л а д 2. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3 - 4n)^2}{(n - 3)^3 - (n + 1)^3}$.

Р о з в ’ я з а н н я. Запишемо вираз загального члена послідовності:

```
> f:=(3-4*n)^2/((n-3)^3-(n+1)^3);
```

$$f := \frac{(3 - 4n)^2}{(n - 3)^3 - (n + 1)^3}$$

Знайдемо границю:

```
> Limit(f, n=infinity)=limit(f, n=infinity);
```

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3 - 4n)^2}{(n - 3)^3 - (n + 1)^3} = -\frac{4}{3}$$

¹Відшукування границь функцій див. с. 44.

Приклад 3. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} \sin n!}{n+2}$.

Розв'язання.

```
> f:=(sqrt(n+1)*sin(n!))/(n+2);
```

$$f := \frac{\sqrt{n+1} \sin(n!)}{n+2}$$

```
> Limit(f,n=infinity)=limit(f,n=infinity);
```

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} \sin(n!)}{(n+2)} = 0$$

Приклад 4. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Розв'язання.

```
> Limit(sqrt(n+1)-sqrt(n),n=infinity)=limit(sqrt(n+1)-sqrt(n),n=infinity);
```

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$$

Приклад 5. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$.

Розв'язання.

```
> Limit((-2)^n+3^n)/((-2)^(n+1)+3^(n+1)),n=infinity)=
  limit((-2)^n+3^n)/((-2)^(n+1)+3^(n+1)),n=infinity);
```

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \frac{1}{3}$$

Приклад 6. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n}$, ($|a| < 1$, $|b| < 1$).

Розв'язання. Для обчислення сум в Maple є функції **Sum** і **sum**. Застосуємо їх до обчислення, наприклад, такої суми $1 + 2 + \dots + n$:

```
> Sum(k,k=1..n)=sum(k,k=1..n);
```

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{(n+1)^2}{2} - \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$$

Неважко переконатися, що права частина отриманої рівності зводиться до вигляду $\frac{1+n}{2} \cdot n$ (сума n перших членів арифметичної прогресії).

Перейдемо до обчислення заданої границі.

Задамо обмеження на a і b :

```
> assume(abs(a)<1):assume(abs(b)<1):
```

Якщо змінна підпорядкована якомусь обмеженню, то до її імені приєднується символ «~»:

```
> a; b;
```

$a \sim$

$$b \sim$$

Обчислимо суми заданих геометричних прогресій:

> A:=sum(a^k,k=0..n);B:=sum(b^k,k=0..n);

$$A := \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

$$B := \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1}$$

> limit(A/B,n=infinity);

$$\frac{b - 1}{a - 1}$$

Приклад 7. Знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$.

Розв'язання.

> S:=sum(k/n^2,k=1..n-1);

$$S := \frac{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}}{n^2}$$

> limit(S,n=infinity);

$$\frac{1}{2}$$

Приклад 8. Знайти $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right)$.

Розв'язання.

> S:=sum(1/(k*(k+1)),k=1..n+1);

$$S := -\frac{1}{n+2} + 1$$

> limit(S,n=infinity);

$$1$$

Приклад 9. Знайти суму

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}.$$

Розв'язання.

> S:=sum(1/(k*(k+1)*(k+2)),k=1..n);

$$S := -\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{4}$$

> limit(S,n=infinity);;

$$\frac{1}{4}$$

Приклад 10. Знайти значення виразу $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$.

Розв'язання. Не будемо повторювати міркування, наведені на с. 17 при розв'язанні цього прикладу. Перейдемо до розгляду рівняння $a = \sqrt{2 + a}$. Звільнимо змінну a від обмеження і розв'яжемо рівняння:

`> a:='a': solve(a=sqrt(2+a));`

2

Завдання до розділу

Знайти границі:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 1)(n + 4)}{n^3 + 2}$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - 1)^2 - (n + 2)^3}{(4 - n)^3}$.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2 + 4} + n}{\sqrt[3]{n^3 - 8}}$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 4}{7 - 6n + \sqrt{n^6 + 2}}$.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 4n\sqrt{n}}{\sqrt{3n^3 + 2n + 1}}$.

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt[3]{5n^2} + \sqrt[4]{9n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n})\sqrt{7 - n + n^2}}$.

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 3\sqrt{n^2 + 1}}{1 + \sqrt[7]{n^7 + 2}}$.

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n - 3} - \sqrt{n + 4})$.

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 3}{1 + \sqrt{n} + \sqrt{2n^2 + 3}}$.

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + n}{\sqrt{4n^2 + 2} + \sqrt{n} - 1}$.

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 2}$.

12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n}{n^2 + 2}$.

13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^n}{n + (-1)^n}$.

14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 + 1}}{n + 2}$.

15. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 2} - 2n)$.

16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 2}$.

17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 2)^2 - (n - 2)^2}{(n + 3)^2}$.

18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)^3 - (n - 1)^3}{(n + 1)^2 + (n - 1)^2}$.

19. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 8n + 1} - 2\sqrt{n^2 + 2n - 1})$.

20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{(-1)^n}{3^{n-1}} \right]$.

21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1)}{1 + 2 + 3 + \dots + 2n + 1}$.

Тема 2

Функції дійсної змінної

2.1. Означення функції

Означення 13. Нехай X і Y — дві множини елементів довільної природи. Кажуть, що задана функція, якщо задане правило, або закон, за яким кожному елементу x множини X ставиться у відповідність деякий (один і тільки один) елемент y множини Y .

Змінну x називають незалежною змінною, або *аргументом*. Змінну y називають *функцією*. Позначають функціональну залежність символом $y = f(x)$. Буквою f позначають правило відповідності. Символ f або вираз $f(x)$ також називають функцією.

Множину X називають *областю визначення функції*, множину Y — *областю значень функції*. Область визначення функції f позначають символом D_f , область значень функції f — символом E_f .

З означення функції випливає, що функція визначається трьома об'єктами: областю визначення функції, областю значень функції і правилом відповідності.

Дві функції f і g вважаються *рівними* $f = g$, якщо $D_f = D_g$, $E_f = E_g$ і відображення області визначення в область значень здійснюється за тим самим правилом.

Якщо множина E_f є *числовою множиною*, то функцію f називають *числовою*. Далі розглядатимуться числові функції, область визначення яких теж є числовою множиною.

2.2. Способи задання функції

Задати функцію — це значить задати усі три об'єкти, що визначають функцію: область визначення функції, область значень функції і правило відповідності. Основні способи завдання функції це — *аналітичний*, *графічний* і *табличний* способи.

Аналітичний спосіб. Функцію задають у вигляді аналітичного виразу, або формули, що містить аргумент x . Наприклад, $y = x^2 + 1$, $y = \sqrt{1-x}$, $y = |x + 5|$ тощо. Задаючи формулу, ми задаємо правило, за яким кожному значенню аргументу x ставиться значення функції y . При цьому під *областю визначення функції* розуміють усі ті значення x з області *дійсних чисел*, для яких усі операції у формулі виконувані. Так, у першому та третьому з наведених прикладів областю визначення є множина усіх дійсних чисел: $x \in \mathbb{R}$. У другому прикладі ($y = \sqrt{1-x}$) областю визначення функції є множина $x \in (-\infty, 1]$, оскільки вираз $\sqrt{1-x}$ при $x > 1$ в області дійсних чисел втрачає сенс. Під *областю значень функції* розуміють усі ті значення з області *дійсних чисел*, яких може набувати y , якщо x перебігає усю область визначення. Так, у всіх трьох

наведених прикладах областю значень функції є множина $y \in [0, +\infty)$. Таким чином, задаючи формулу, ми задаємо усі три об'єкти, що визначають функцію.

Спосіб задання функції у вигляді формули $y = f(x)$ називають *явним*.

Якщо зв'язок між змінними x і y задається у вигляді рівняння $F(x, y) = 0$, не розв'язаного відносно y , то кажуть, що функція y задана *неявно*. Під функцією $y = f(x)$ у цьому випадку розуміють розв'язок заданого рівняння, тобто таку залежність $y = f(x)$, що перетворює рівність $F(x, y) = 0$ на тотожність $F(x, f(x)) \equiv 0$. Наприклад, рівняння $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ визначає на проміжку $x \in [-R, R]$ дві функції: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ і $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ (верхню та нижню половини кола радіуса R з центром на початку координат).

Якщо задані функції $x = x(t)$, $y = y(t)$ однієї змінної t , то кажуть, що функція y від x задана *параметрично*. Наприклад, параметрично задана функція

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases}$$

визначає еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Іноді функцію задають на окремих підмножинах різними формулами, наприклад,

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

У даному прикладі область визначення функції задана: $D_f = (-\infty, +\infty)$, область значень функції складається з трьох чисел $E_f = \{-1; 0; 1\}$.

Графічний спосіб. Графіком функції $y = f(x)$ називається множина усіх точок $(x, f(x))$ координатної площини, у яких абсиси належать області визначення функції, а ординати дорівнюють відповідним значенням функції (рис. 1). Задаючи деякий графік, ми тим самим задаємо і область визначення функції (відрізок AB), і область значення функції (відрізок CD), і правило відповідності (на рис. 1 показано, як обчислити значення $f(a)$), тобто задаємо функцію.

Табличний спосіб. У техніці, у природничих та інших науках залежність між параметрами часто встановлюється експериментально або шляхом спостережень. Цю залежність не завжди можна описати якою-небудь формулою, і тоді її подають у вигляді таблиці, що містить відповідні значення параметрів

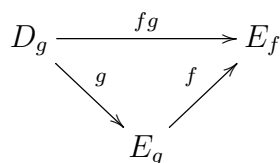
x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_1	y_2	$\dots$	y_n

Такий спосіб задання функції називають *табличним*. Значним недоліком такого способу є те, що він дає значення функції тільки для деяких значень аргументу. Областю визначення та областю значень функції, заданої таблицею, вважають значення параметрів, наведених у таблиці. Правило відповідності задається безпосередньо таблицею.

Описовий спосіб. Функція описується правилом (словесним), за яким аргументу x ставиться у відповідність значення функції y .

2.3. Складена функція

Нехай задані дві функції — функція $u = g(x)$ з областю визначення D_g і областю значень E_g та функція $y = f(u)$ з областю визначення D_f і областю значень E_f , і нехай множина E_g є підмножиною множини D_f : $E_g \subseteq D_f$. Кожному елементу множини D_g поставимо у відповідність елемент множини E_f за правилом $u = g(x)$, $y = f(u)$, або $y = f(g(x))$. Оскільки функція g кожному елементу множини D_g ставить у відповідність єдиний елемент множини E_g , а функція f кожному елементу множини $E_g \subseteq D_f$ ставить у відповідність єдиний елемент множини E_f , то за правилом $y = f(g(x))$ кожному елементу множини D_g ставиться у відповідність єдиний елемент множини E_f . Тобто залежність $y = f(g(x))$ є функцією. Отриману в такий спосіб функцію називають *складеною* функцією, або *суперпозицією* (композицією) функцій f і g . Як діє композиція відображень, показано наочно на трикутній діаграмі.



Приклад 1. Функція $y = \cos^2 x$ — складена, вона є суперпозицією функцій $y = u^2$ та $u = \cos x$.

2.4. Парність, непарність, періодичність, обмеженість, монотонність

2.4.1. Парні і непарні функції.

Означення 14. Функцію f називають *парною* (непарною), якщо її область визначення разом із значенням x містить значення $(-x)$ і для будь-якого x з її області визначення виконується рівність $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy , графік непарної функції симетричний відносно початку координат. На рис. 2, а подано графік парної функції, на рис. 2, б — графік непарної функції.

2.4.2. Періодичні функції

Періодом функції $f(x)$ називають число $T \neq 0$ таке, що для кожного x з області визначення функції значення $x + T$ і $x - T$ також входять до області визначення і виконуються рівності $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$.

Функцію, що має період, називають *періодичною*. Якщо функція має період T , її називають *періодичною з періодом T* .

Якщо число T є періодом функції, то числа $\pm nT$, $n \in \mathbb{N}$ також є її періодами.

У функції $f = \text{const}$ будь-яке число $T \neq 0$ є періодом, для функції Діріхле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ — раціональне;} \\ 0, & \text{якщо } x \text{ — ірраціональне} \end{cases}$$

будь-яке раціональне число $T \neq 0$ є її періодом. Періодичною є функція $\{x\}$ — дробова частина, вона має період $T = 1$. Періодичними є тригонометричні функції $\sin x$ і $\cos x$. Число 2π є їхнім періодом, оскільки $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

Додатний період T_0 функції $f(x)$ такий, що функція не має додатних періодів, менших від T_0 , називають *найменшим додатним періодом*, або **основним періодом** функції $f(x)$.

Не всі періодичні функції мають найменший додатний період. Наприклад, стала функція і наведена вище функція $D(x)$ не мають найменшого додатного періоду.

Якщо дійсна періодична функція $f(x)$ дійсного аргументу неперервна (і не рівна тотожно сталій), то вона має дійсний найменший період $T_0 > 0$ і будь-який інший її період має вигляд $\pm kT_0$, $k \in \mathbb{N}$.

Одне зауваження з приводу термінології. Часто слова «період функції» вживають у значенні «найменший додатний період». Тому, коли мова йтиме про основний період функції, ми це будемо оговорювати.

Якщо функція $f(x)$ має період T , то

- 1) функція $f(ax+b)$ має період $\frac{T}{a}$. Тут припускається, що a і b — деякі числа і $a \neq 0$;
- 2) складена функція $f(g(x))$ має період T (хоча цей період може бути і не найменшим додатним її періодом).

Сума, добуток і частка періодичних функцій з однаковим періодом є періодичною функцією з тим самим періодом.

Сума періодичних функцій з різними періодами $T_1 \neq T_2$ (можна вважати ці числа додатними) буде періодичною функцією, якщо існує число T , яке ділиться націло і на T_1 , і на T_2 , тобто $T = mT_1 = nT_2$, $m, n \in \mathbb{N}$, і це число T буде періодом функції-суми. Це саме стосується добутку і частки періодичних функцій.

2.4.3. Обмежені функції

Означення 15. Функцію $y = f(x)$ називають обмеженою зверху (знизу), якщо існує число M (m) таке, що для усіх $x \in D_f$ виконується нерівність $f(x) \leq M$ ($f(x) \geq m$).

Приклад 1. Функція $y = 2 - x^2$ обмежена зверху: для будь-якого $x \in D_f = (-\infty, \infty)$ виконується нерівність $2 - x^2 \leq 2$.

Приклад 2. Функція $y = |x| + \sin x$ обмежена знизу: очевидно є нерівність $|x| + \sin x \geq -1$, $x \in D_f = (-\infty, +\infty)$.

Функцію, що є обмеженою зверху і обмеженою знизу, називають *обмеженою*.

Приклад 3. Функція $y = \sqrt{(x-1)(3-x)}$ є обмеженою: на всій області визначення $x \in [1; 3]$ виконується умова $0 \leq \sqrt{(x-1)(3-x)} \leq 1$.

Наведемо ще одне означення обмеженої функції:

Означення 16. Функцію $y = f(x)$ називають обмеженою, якщо існує число $M > 0$ таке, що для всіх $x \in D_f$ виконується нерівність $|f(x)| \leq M$.

Приклад 4. Функція $y = \arctg x - \frac{1}{1+x^2}$ є обмеженою, оскільки для всіх x з її області визначення $x \in (-\infty, +\infty)$ виконується нерівність $\left| \arctg x - \frac{1}{1+x^2} \right| \leq \left| \arctg x \right| + \left| \frac{1}{1+x^2} \right| \leq \frac{\pi}{2} + 1$.

Означення 17. Функцію $y = f(x)$ називають необмеженою, якщо для будь-якого числа $M > 0$ (яке може бути наскільки завгодно великим) знайдеться хоча б одне значення $x^* \in D_f$, для якого виконується нерівність $|f(x^*)| > M$.

Аналогічно вводяться поняття функції, обмеженої та необмеженої на проміжку: при цьому передбачається, що аргумент x перебігає не всю область визначення функції, а набуває значень із заданого проміжку, що належить області визначення функції.

Приклад 5. Функція $y = \frac{1}{x}$ необмежена на проміжку $x \in (0, \infty)$: яке б не було число $M > 0$ для $x^* = \frac{1}{M+1} \in (0, +\infty)$ виконується нерівність $|f(x^*)| = \left| \frac{1}{x^*} \right| = M+1 > M$.

2.4.4. Зростаючі та спадні функції

Означення 18. Функція називається зростаючою, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, тобто для довільних значень x_1 і x_2 з області визначення і таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$.

Функція називається спадною, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, тобто для довільних значень x_1 і x_2 з області визначення і таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.

Приклади графіків зростаючої та спадної функції подано на рис. 3, а та 3, б відповідно.

Функцію називають зростаючою (спадною) на проміжку, якщо більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає більше (менше) значення функції. При цьому передбачається, що проміжок належить області визначення функції.

Функцію називають незростаючою (неспадною), якщо для довільних значень x_1 і x_2 з області визначення і таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) \leq f(x_1)$ ($f(x_2) \geq f(x_1)$). Приклади графіків незростаючої функції подано на рис. 4, а, неспадної — на рис. 4, б.

Аналогічно вводиться поняття функції незростаючої (неспадної) на проміжку.

Припустимо, що функція $f(x)$ визначена на деякому проміжку, а x_0 — внутрішня точка цього проміжку.

Означення 19. Функція називається зростаючою (спадною) в точці x_0 , якщо існує інтервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, який належить проміжку, такий, що $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) для всіх x з інтервалу $(x_0 - \delta, x_0)$ і $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$) для всіх x з інтервалу $(x_0, x_0 + \delta)$.

Якщо функція зростає (спадає) на проміжку, то вона зростає (спадає) у всіх внутрішніх точках проміжку.

Інтервали, на яких функція f зростає або спадає, називають інтервалами монотонності функції f . На рис. 5 подано графік функції $y = x^3 - 3x^2$ на проміжку $-2,5 \leq x \leq 2,5$. Як видно із рисунка, функція y зростає на проміжку $[-2,5; -1]$, на проміжку $[-1; 1]$ функція спадає і на проміжку $[1; 2,5]$ функція зростає. Інтервалами монотонності даної функції y на множині $-2,5 \leq x \leq 2,5$ є інтервали $(-2,5; -1)$, $(-1; 1)$ та $(1; 2,5)$.

2.5. Обернена функція

Нехай D — область визначення функції $f(x)$, а E — область її значень. Нехай функція $y = f(x)$ задовольняє вимогу: для кожного $y_0 \in E$ існує тільки одне значення $x_0 \in D$ таке, що $y_0 = f(x_0)$. Останню рівність можна розглядати як рівняння відносно невідомого x_0 . За вказаних умов для кожного $y_0 \in E$ існує розв'язок x_0 цього рівняння і цей розв'язок єдиний.

Позначимо залежність розв'язку x_0 від y_0 символом $x_0 = \varphi(y_0)$. Правило $\varphi(y)$ задає функцію з областю визначення E і областю значень D . Функцію φ називають оберненою до функції f (а функцію f — оберненою до функції φ).

Графіки прямої та оберненої функції симетричні відносно бісектриси першого і третього координатних кутів (рис. 0).

Достатньою умовою існування оберненої функції є її монотонність: якщо функція на деякому інтервалі зростає (спадає), то на цьому інтервалі для неї існує обернена функція і вона є зростаючою (спадною).

Для практичної побудови функції, оберненої до функції $f(x)$, спочатку знаходять інтервали монотонності функції $f(x)$, потім на кожному інтервалі монотонності з рівності $y = f(x)$ виражають x , тобто отримують формулу $x = \varphi(y)$ і, нарешті, у виразі $x = \varphi(y)$ аргумент позначають через x , а функцію — через y .

2.6. Елементарні функції

До класу *основних елементарних функцій* належать:

- 1) степенева функція $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
- 2) показникова функція $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- 3) логарифмічна функція $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- 4) тригонометричні функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;
- 5) обернені тригонометричні функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$,
 $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Функції, утворені з основних елементарних функцій за допомогою скінченної кількості арифметичних операцій і суперпозиції, складають клас *елементарних функцій*. Наприклад, елементарними функціями є:

$$y = \sqrt{x^2}, \quad y = \lg^3(\sin x + 4x), \quad y = \operatorname{arctg}(2^x + x^2) \text{ та багато інших.}$$

Має місце така класифікація елементарних функцій:

1. Функція виду

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

де $n \geq 0$ — ціле число; $a_0, a_1, \dots, a_n$ — будь-які числа; $a_0 \neq 0$, називається *цілою раціональною функцією* або *алгебраїчним многочленом степеня n* . Многочлен першого степеня називають також *лінійною функцією*.

2. Функція, що являє собою відношення двох цілих раціональних функцій:

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m},$$

називається *дробово-раціональною функцією*.

Сукупність цілих раціональних і дробово-раціональних функцій утворює клас *раціональних функцій*.

3. Функція, отримана за допомогою скінченної кількості арифметичних операцій і суперпозиції над степеневими функціями як із цілими, так і дробовими показниками і яка не є раціональною, називається *ірраціональною функцією*.

Наприклад,

$$y = \sqrt{x^2 + 1}, y = x + \sqrt[3]{x}, y = \sqrt{\frac{x^2 + 5x - 1}{x^3 + 1}}$$

та ін. — ірраціональні функції.

4. Будь-яка функція, що не є раціональною або ірраціональною функцією, називається *трансцендентною функцією*.

Наприклад, трансцендентними є функції $y = \sin x$, $y = \sin 2x + x$ та ін.

2.7. Задання функції в Maple

В Maple є кілька способів задання функції.

Спосіб 1. Визначення функції за допомогою оператора присвоєння `:=` : якомусь виразу присвоюється ім'я, наприклад:

```
> restart;
> f:=sin(x)+cos(x);
```

$$f := \sin(x) + \cos(x)$$

Увага: строго кажучи, даний спосіб не є способом задання функції в термінах Maple. У даному разі задається вираз, що має певне ім'я. У наведеному вище прикладі змінній f присвоюється значення виразу $\sin x + \cos x$, який містить значення x .

Якщо надати конкретне значення змінній x , то отримаємо значення функції (змінної) f для цього x . Продовжимо попередній приклад і обчислимо значення f при $x = \pi/4$. Це можна зробити, наприклад, так:

```
> x:=Pi/4;f;
```

$$x := \frac{\pi}{4}$$

У результаті виконання цих операцій змінна x набуває присвоєного їй значення:

```
> x;
```

$$\frac{\pi}{4}$$

Для подальшої роботи зі змінною x її доводиться звільняти:

```
> x:='x'; x;
```

$$x := x$$

Щоб уникнути такої ситуації, зручніше використовувати команду підстановки `subs({x1=a1, x2=a2,...},f)`, де вказуються змінні **xi** та їх нові значення **ai** ($i = 1, 2, \dots$), які треба підставити у вираз **f**. Наприклад:

```
\eval(%)
```

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

 $\sqrt{2}$

```
> f:=(x,y)->sin(x+y);
```

$$f := (x, y) \mapsto \sin(x + y)$$

```
> f(Pi/2,0);
```

1

```
> f:=unapply(x^2+y^2,x,y);
```

$$f := (x, y) \mapsto y^2 + x^2$$

74

[illegible]

Наприклад, функція

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ \sin x, & x \geq 1 \end{cases}$$

```
> f:=piecewise(x<0, 0, 0<=x and x<1, x, x>=1, sin(x));
```

$$f := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ \sin x, & x \geq 1 \end{cases}$$

Завдання до розділу

1. Знайти області визначення функцій:

$$1) f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x^2-3x+2}; \quad 4) f(x) = \arccos \frac{1-2x}{4};$$

$$2) f(x) = \lg(4-2x); \quad 5) f(x) = \log_2 \log_3 \log_4 x;$$

$$3) f(x) = \sqrt{1-|x+2|}; \quad 6) f(x) = \frac{1}{\ln(3+x)}.$$

2. Визначити, які із вказаних функцій є парними, які є непарними та які не є ні парними, ні непарними:

$$1) f(x) = 2x - 3x^3; \quad 4) f(x) = a^x + a^{-x} \ (a > 0);$$

$$2) f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}; \quad 5) f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2});$$

$$3) f(x) = \sin 2x + \cos 2x; \quad 6) f(x) = \sin^2 x - \cos x.$$

3. З'ясувати, які з наведених функцій періодичні та визначити їх основний період:

1) $f(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$; 4) $f(x) = \sin x + \cos \pi x$;

2) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$; 5) $f(x) = |\sin 3x|$;

3) $f(x) = \sin^2 x$; 6) $f(x) = \sin x^2$.

Тема 3

Границя функції

3.1. Границя функції в точці

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 (можливо, за винятком самої точки x_0). Візьмемо послідовність $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, яка збігається до x_0 . Значення функції в точках цієї послідовності утворюють числову послідовність $f(x_1), \dots, f(x_n), \dots$.

Означення 20. Число A називається границею функції $f(x)$ в точці $x = x_0$, якщо для *будь-якої* послідовності $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \neq x_0$ відповідна послідовність значень функції $f(x_n)$ збігається до A .

Символічно це записують так: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Приклад 1. Стала функція $f(x) = C = \text{const}$ має границю в кожній точці x_0 числової прямої: якою б не була послідовність x_n , що збігається до x_0 , відповідна послідовність значень функції $f(x_1) = C, f(x_2) = C, \dots, f(x_n) = C, \dots$ збігається до C : $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} C = C$.

Приклад 2. Функція $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, визначена при $x \neq 0$, в точці $x = 0$ границі не має.

Справді, візьмемо збіжну до нуля послідовність $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $n = 1, 2, \dots$. Відповідна послідовність значень функції $f(x_n) = \sin n\pi = 0$, $n = 1, 2, \dots$ збігається до нуля. Якщо ж візьмемо послідовність $x'_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, то отримаємо послідовність $f(x'_n) = 1$, $n = 1, 2, \dots$, яка збігається до 1. Як бачимо, двом різним послідовностям, що збігаються до $x_0 = 0$, відповідають послідовності значень функції, які мають різні границі. А це свідчить, що $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ не існує.

Наведемо ще одне означення границі функції в точці:

Означення 21. Число A називається границею функції $f(x)$ в точці $x = x_0$, якщо для *будь-якого* числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх x , що задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Це означення називають означенням «на мові $\varepsilon - \delta$ ». Можна показати, що означення 20 і 21 — еквівалентні.

3.2. Нескінченно малі та нескінченно великі величини

Означення 22. Функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою при $x \rightarrow x_0$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Приклад 1. Функції $f(x) = x^2$, $f(x) = \sin 3x$, $f(x) = 1 - \cos x$ є нескінченно малими при $x \rightarrow 0$.

Означення 23. Функція $f(x)$ називається нескінченно великою при $x \rightarrow x_0$, якщо для будь-якого числа A (яке може бути наскільки завгодно великим) існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх x , які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > A$.

Позначають це так: $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_0$ або $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ і $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) для всіх x , які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, то пишуть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$).

Приклад 2. Функції $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, $f(x) = \frac{1}{1 - \cos x}$ при $x \rightarrow 0$ є нескінченно великими.

3.3. Односторонні границі

При означенні границі функції в точці $x = x_0$ ніяких обмежень на спосіб прямування x до x_0 не накладалось. Якщо x прямує до x_0 , залишаючись меншим (більшим) від x_0 , і при цьому існує границя $f(x_n)$, то таку границю називають *лівосторонньою* (*правосторонньою*) границею функції $f(x)$ в точці $x = x_0$. Лівосторонню границю позначають символом $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$, правосторонню — символом $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$. У точці $x = 0$ односторонні границі позначають через $\lim_{x \rightarrow -0} f(x)$ і $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ відповідно.

Для односторонніх границь використовують також позначення:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \text{ та } f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x).$$

З існування границі функції в точці впливає існування і рівність односторонніх границь функції в цій точці, і, навпаки, з існування і рівності односторонніх границь функції в точці впливає існування границі функції в цій точці.

Якщо границя функції в точці не існує, то односторонні границі, як показують наведені нижче приклади, можуть не існувати, а можуть і існувати.

Приклад 1. Функція $y = \sin \frac{1}{x}$ границі в точці $x = 0$ не має (див.приклад 2 на попередній сторінці), очевидно, що ця функція в точці $x = 0$ не має і односторонніх границь.

Приклад 2. Функція $y = a^{\frac{1}{x}}$, ($a > 1$) в точці $x = 0$ має лівосторонню границю $\lim_{x \rightarrow -0} a^{\frac{1}{x}} = 0$, а її правостороння границя в цій точці нескінченна: $\lim_{x \rightarrow +0} a^{\frac{1}{x}} = +\infty$. Границя цієї функції в точці $x = 0$ не існує.

Приклад 3. У функції $f(x) = \operatorname{sgn} x$ (її означення див. на стор. 23) в точці $x = 0$ односторонні границі існують: $\lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sgn} x = -1$, $\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sgn} x = 1$. Оскільки ці границі — різні, то границя $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$ не існує.

3.4. Границя функції на нескінченності

Означення 24. Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, якщо для будь-якої нескінченно великої послідовності $\{x_n\}$ відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до A .

Позначають це так: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

Означення 25. Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), якщо для **будь-якої** нескінченно великої послідовності $\{x_n > 0\}$ ($\{x_n < 0\}$) відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до A .

Символічні позначення: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \right)$.

П р и к л а д 1. Функція $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ при $x \rightarrow \infty$ має границю, рівну нулю: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$. Справді, при $x_n \rightarrow \infty$ послідовності $\{x_n^2\}$, $\{x_n^2 + 1\}$ є нескінченно великими, послідовність $\left\{ \frac{1}{x_n^2 + 1} \right\}$ — нескінченно мала (як обернена до нескінченно великої).

П р и к л а д 2. Функція $f(x) = \arctg x$ на нескінченності має такі границі: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$
і $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}$.

3.5. Неперервні функції

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 .

Означення 26. Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 , якщо границя функції в точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Якщо виконуються умови $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$ $\left(\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0) \right)$, то функцію $f(x)$ називають *неперервною в точці x_0 зліва (справа)*.

На мові « $\varepsilon - \delta$ » означення неперервної функції має вигляд:

Означення 27. Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 , якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх x , які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Величину $\Delta x = x - x_0$ називають *приростом аргументу x в точці x_0* , а величину $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ — *приростом функції*, що відповідає приросту аргументу Δx . Наведемо означення неперервної функції на мові приростів:

Означення 28. Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 , якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Функцію називають *неперервною на проміжку (a, b)* , якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Функцію називають *неперервною на відрізку $[a, b]$* , якщо вона неперервна у внутрішніх точках відрізка і виконуються умови $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$ і $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$, тобто вона є неперервною в точці a справа, в точці b — зліва.

Графік функції, неперервної на проміжку, зображується неперервною лінією.

Якщо точка x_0 є ізольованою точкою області визначення функції (тобто існує окіл точки x_0 , який не містить точок області визначення, відмінних від точки x_0), то функція вважається неперервною в цій точці за означенням.

Арифметичні операції над неперервними функціями не виводять із класу неперервних функцій:

Твердження 3.5.1. Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні в точці x_0 , тоді їхні сума $u(x)+v(x)$, різниця $u(x)-v(x)$, а якщо $v(x_0) \neq 0$, то і частка $\frac{u(x)}{v(x)}$ є неперервними функціями в цій точці.

Степенева функція $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, показникова функція $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, логарифмічна функція $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, тригонометричні функції $y = \sin x$, $y = \cos x$ та обернені тригонометричні функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arctg} x$ є неперервними функціями на своїх областях визначення. Функція $y = \operatorname{tg} x$ є неперервною на кожному з інтервалів $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ як частка двох неперервних функцій: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, і на цих інтервалах дільник відмінний від нуля: $\cos x \neq 0$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. Виходячи з аналогічних міркувань, знаходимо, що функція $y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ є неперервною на кожному з інтервалів $(k\pi, (k + \pi))$, $k \in \mathbb{Z}$.

Твердження 3.5.2. Нехай функція $u = g(x)$ неперервна в точці x_0 , а функція $y = f(u)$ неперервна в точці $u_0 = g(x_0)$, тоді складена функція $y = f(g(x))$ неперервна в точці x_0 .

Твердження 3.5.1 та 3.5.2 дозволяють досить просто проводити дослідження функцій на неперервність.

Приклад 1. Дослідити функцію $y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x-1}$ на неперервність.

Розв'язання. Задана функція є часткою неперервних функцій: чисельник є неперервною функцією (функція $u = 1 + x^2$ — неперервна як сума неперервних функцій, функція $\sqrt{u}$ — степенева функція і є неперервною, функція $\sqrt{1+x^2}$ — неперервна як складена функція), знаменник $x - 1$ — неперервна функція як різниця неперервних функцій. Частка неперервних функцій є неперервною функцією в точках, де знаменник не дорівнює нулю. Тобто задана функція є неперервною на кожному з проміжків $(-\infty, 1)$ і $(1, +\infty)$.

3.6. Точки розриву функції

Означення 29. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 , за винятком, можливо, самої точки x_0 . Точка x_0 називається точкою розриву функції $f(x)$, якщо функція не визначена в точці x_0 або не є неперервною в цій точці.

Розглянемо класифікацію точок розриву.

1. Якщо в точці x_0 існують скінченні односторонні границі і вони рівні між собою $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, а функція $f(x)$ в точці x_0 не визначена або має значення $f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, то x_0 називають точкою *усувного розриву*.

У точці усувного розриву функцію можна довизначити так, що вона стане неперервною в цій точці — треба покласти $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

2. Якщо в точці x_0 існують скінченні односторонні границі і вони різні $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то x_0 називають точкою розриву *першого роду*. Різницю $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ називають *стрибком* функції $f(x)$ в точці x_0 .
3. Якщо хоча б одна із односторонніх границь функції в точці x_0 не існує або нескінченна, то x_0 називають точкою розриву *другого роду*.

Приклад 1. Функція $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ не визначена в точці $x_0 = 1$. Ця точка є точкою усувного розриву заданої функції, оскільки функція в цій точці має скінченну границю:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = 3.$$

Якщо покладемо $f(1) = 3$, то отримаємо неперервну функцію.

Приклад 2. Функція $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ в точці $x_0 = 0$ претерпає розрив першого роду: $\lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sgn}(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sgn}(x) = 1$.

Приклад 3. Функція $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ в точці $x_0 = 0$ має розрив другого роду — односторонні границі функції в цій точці не існують.

Приклад 4. Функція $f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}}$ в точці $x_0 = 3$ має розрив другого роду — $\lim_{x \rightarrow 3+0} 2^{\frac{1}{x-3}} = +\infty$.

Приклад 5. Функція $f(x) = \operatorname{tg} x$ в точках $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ має розрив другого роду, оскільки $\lim_{x \rightarrow x_k} \operatorname{tg} x = \infty$.

Приклад 6. Функція Діріхле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ — раціональне;} \\ 0, & \text{якщо } x \text{ — ірраціональне} \end{cases}$$

має розрив другого роду в кожній точці, оскільки вона не має границі в жодній точці.

3.7. Основні теореми про неперервні функції

Теорема 2 (Перша теорема Вейєрштрасса). *Якщо функція визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона обмежена на цьому проміжку.*

Теорема 3 (Друга теорема Вейєрштрасса). *Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона на цьому відрізку досягає свого найбільшого та найменшого значень, тобто існують точки x^* , $x_* \in [a, b]$ такі, що*

$$f(x^*) = M = \sup_{[a, b]} f(x), \quad f(x_*) = m = \inf_{[a, b]} f(x).$$

Теорема 4 (Перша теорема Больцано – Коші). *Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$ і на кінцях цього відрізка набуває значень різних знаків, тоді існує точка $c \in (a, b)$, в якій $f(c) = 0$.*

Геометрична ілюстрація теореми 4 подається на рис. 1. Графік неперервної функції зображується неперервною лінією. Неперервна лінія, що сполучає дві точки, які знаходяться по різні боки від осі Ox , принаймні один раз перетинає цю вісь. У наведеному на рис. 1 прикладі таких точок виявилось три.

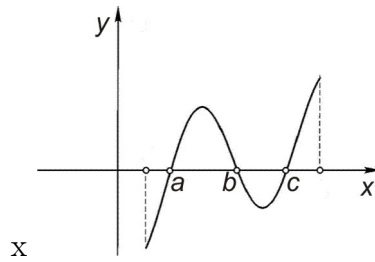


Рис. 1

Результати теореми 4 використовуються у разі наближеного розв'язування рівнянь виду $f(x) = 0$, де $f(x)$ неперервна функція. Якщо ми знайшли відрізок, на кінцях якого функція $f(x)$ набуває значень різних знаків, то для уточнення кореня рівняння відрізок ділять пополам і беруть ту половину, на кінцях якої значення функції мають різні знаки. Так поступають доти, поки не отримають наближене значення кореня з будь-якою наперед заданою точністю.

Теорема 5 (Друга теорема Больцано – Коші). *Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$, причому $f(a) = A$, $f(b) = B$, і нехай C – будь-яке число, що знаходиться між числами A і B , тоді існує точка $c \in (a, b)$, в якій $f(c) = C$.*

Геометрична ілюстрація теореми 5 подається на рис. 2.

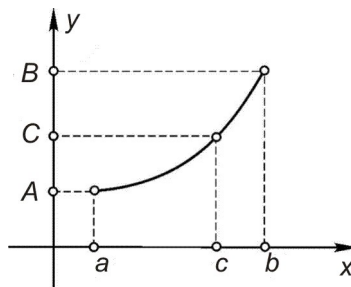


Рис. 2

Із теореми 5 випливає, що неперервна функція $f(x)$ заповнює своїми значеннями проміжок $[A, B]$ (рис. 2) суцільно, тобто відрізок $[A, B]$ осі Oy складається тільки із значень функції. Позначимо через M і m найбільше та найменше значення функції на відрізку $[a, b]$. За другою теоремою Вейерштрасса на відрізку $[a, b]$ існують точки, де ці значення досягаються. Нехай $M = f(x^*)$, $m = f(x_*)$ і нехай, наприклад $x_* < x^*$. Застосувавши теорему 5 до відрізка $[x_*, x^*]$, дійдемо висновку, що проміжок $[m, M]$ складається тільки із значень функції $f(x)$, тобто область значень функції, визначеної і неперервної на відрізку, також являє собою відрізок.

3.8. Розв'язування задач

Деякі способи обчислення границі функції натурального аргументу, тобто числової послідовності, розглянуті нами на стор. 14. Майже всі вони можуть бути перенесені на випадок функції неперервного аргументу.

Для відшукування границі функції користуються властивостями неперервних функцій та основними теоремами про границі. Наведемо основні з них. Нижче розглядається границя функції $f(x)$ при $x \rightarrow a$. Величина a може бути як скінченною, так і нескінченною.

Для функцій, як і для послідовностей, справджуються твердження про зв'язок між нескінченно малою і нескінченно великою, про добуток нескінченно малої на обмежену:

1. Якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$.
2. Якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ і $f(x) \neq 0$ в деякому проколотому околі точки $x = a$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty$.
3. Якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, а $g(x)$ є обмеженою в деякому околі точки $x = a$, то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Нехай існують *скінченні* границі $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$. Функції, що мають скінченні границі, мають усі властивості збіжних послідовностей:

4. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B$;
5. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$,
зокрема, стало можна винести за знак границі:
 $\lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $C = \text{const}$.

6. Якщо $B \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}$;

Розглянемо складену функцію $f(g(x))$. Якщо функція f неперервна, а значення функції $g(x)$ на деякому околі точки a належать області D_f функції f , то можна переходити до границі під знаком функції f :

7. $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$.

Наслідком останньої властивості є така властивість:

8. Якщо існують скінченні границі $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, то $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = A^B$.

Якщо одна із границь $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ або вони обидві є нескінченними, тоді:

- а) якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, то $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \infty$;
- б) якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty$;
- в) якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \infty$;
- г) якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, то $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \infty$.

Перейдемо до розгляду *невизначеностей* — випадків знаходження границі, в яких не можна скористатися властивостями 1–8 і а)–г) границі.

3.8.1. Розкриття невизначеностей

При обчисленні границь часто використовують границі, які називають *примітними*. Усього примітних границь — дві.

Примітні границі

Границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = 1$$

називають *першою примітною границею*.

Границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \{1^\infty\} = e$$

називають *другою примітною границею*. Тут e — ірраціональне число, $e \approx 2,718281828$.

Перейдемо до розгляду прикладів.

Невизначеність виду $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$

Приклад 1. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$.

Розв'язання. Досліджуваний дріб являє собою відношення многочленів. Знаходимо, що чисельник і знаменник дробу при $x = 2$ обертаються в нуль, тобто і чисельник, і знаменник діляться націло на лінійний двочлен $x - 2$. Розклавши ці многочлени на множники, можемо скоротити дріб:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)}{(x-10)} = \frac{-1}{-8}.$$

Приклад 2. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{x^2 + 3x - 4}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Позбудемось ірраціональності в чисельнику: помножимо чисельник і знаменник дробу на спряжений вираз до чисельника. У результаті зведемо дріб до виду, розглянутого в попередньому прикладі:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}}{x^2 + 3x - 4} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{5-x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})}{(x^2 + 3x - 4)(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+4)(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x+4)(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})} = \frac{2}{5 \cdot 4} \end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+5x} - 2}{x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Щоб позбутися ірраціональності в чисельнику, помножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений до чисельника. Нагадаємо, спряженим до різниці коренів кубічних є неповний квадрат суми цих коренів:

$$\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right) \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}\right) = a - b.$$

Перетворимо заданий вираз:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+5x} - 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[3]{8+5x} - 2\right) \left(\sqrt[3]{(8+5x)^2} + 2\sqrt[3]{8+5x} + 4\right)}{x \left(\sqrt[3]{(8+5x)^2} + 2\sqrt[3]{8+5x} + 4\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(8+5x) - 8}{x \left(\sqrt[3]{(8+5x)^2} + 2\sqrt[3]{8+5x} + 4\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{\sqrt[3]{(8+5x)^2} + 2\sqrt[3]{8+5x} + 4} = \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

Зауваження. Оскільки у заданому дробі чисельник і знаменник обертаються на нуль лише при одному значенні змінної, то позбутись ірраціональності можна заміною змінної. Позначимо $\sqrt[3]{8+5x} = t$, тоді $x = \frac{t^3 - 8}{5}$ і $t \rightarrow 2$ при $x \rightarrow 0$.

Проведемо заміну:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+5x} - 2}{x} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t - 2}{\frac{t^3 - 8}{5}} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{5}{t^2 + 2t + 4} = \frac{5}{12}.$$

Приклад 4. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\left\{\frac{0}{0}\right\}$. Дріб містить тригонометричні функції. Проведемо тотожні перетворення дробу з тим, щоб можна було скористатися першою примітною границею:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5x}{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5}{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3} = \frac{1 \cdot 5}{1 \cdot 3} = \frac{5}{3}.$$

Приклад 5. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Розв'язання. Проведемо тотожні перетворення дробу:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \frac{x^2}{4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{2}{4} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Невизначеність виду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$

Тут ми розглянемо приклади відшукування границь частки раціональних та ірраціональних функцій при $x \rightarrow \infty$. Такі приклади, як правило, розв'язують стандартним прийомом: чисельник і знаменник дробу ділять на вищий степінь x знаменника. При цьому враховують, що

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{x^m} = \begin{cases} 1, & \text{при } n = m; \\ 0, & \text{при } n < m; \\ \infty, & \text{при } n > m, \end{cases}$$

де показники степеня n і m — дійсні числа.

Приклад 6. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 5}{2x^2 + 8x - 16}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$. Поділимо чисельник і знаменник дробу на x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 5}{2x^2 + 8x - 16} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{8}{x} - \frac{16}{x^2}} = \frac{3}{2}.$$

Неважко узагальнити результати цього прикладу і дійти висновку, що

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{при } n = m; \\ 0, & \text{при } n < m; \\ \infty, & \text{при } n > m. \end{cases}$$

Приклад 7. Очевидно, що $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 6x + 10}{2x^4 + 5x^2 + 1} = 0$, оскільки степінь знаменника $m = 4$ вищий степеня чисельника $n = 3$.

Перейдемо до розгляду частки ірраціональних функцій.

Приклад 8. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1}}$.

Розв'язання. У прикладах відшукування границь при $x \rightarrow \infty$, якщо границя не є очевидною, треба окремо розглядати випадки $x \rightarrow +\infty$ і $x \rightarrow -\infty$.

Знайдемо границю

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{x}}{\frac{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1}}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{x}}}{\sqrt[3]{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}} = 1.$$

Виконуючи ділення чисельника і знаменника дробу на x , ми вносили x під знак радикала. Якщо x додатне, то ніяких труднощів не виникає. Якщо x від'ємне, то не можна вносити під знак кореня парного степеня від'ємну величину. У випадку $x \rightarrow -\infty$ доцільно зробити заміну $x = -t$ і перейти до границі при $t \rightarrow +\infty$.

Знайдемо тепер границю

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t^2 - 3t}}{\sqrt[3]{-t^3 - 2t^2 + 1}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{t^2 - 3t}}{-\sqrt[3]{t^3 + 2t^2 - 1}} = -1.$$

Як бачимо, у даному прикладі границі при $x \rightarrow +\infty$ і $x \rightarrow -\infty$ виявилися різними.

Невизначеність виду $\{1^\infty\}$

Невизначеність такого виду розкривається за допомогою другої примітної границі, при цьому враховують правило обчислення границі степенево-показникового виразу (див. властивість 8 на стор. 38).

Приклад 9. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x + 1} \right)^{x+1}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\{1^\infty\}$: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{2x+1} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) = \infty$.
Перетворимо заданий вираз так, щоб можна було скористатися другою примітною границею:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{2x+3}{2x+1} - 1 \right) \right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x+1} \right)^{x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2}{2x+1} \right)^{\frac{2x+1}{2}} \right)^{\frac{2}{2x+1} \cdot (x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x+1)}{2x+1} = e. \end{aligned}$$

Приклад 10. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} &= \{1^\infty\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + (\cos 2x - 1) \right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 2\sin^2 x \right)^{\frac{1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 2\sin^2 x \right)^{\frac{1}{-2\sin^2 x} \cdot \frac{-2\sin^2 x}{x^2}} = e^{-2}. \end{aligned}$$

Невизначеність виду $\{0 \cdot \infty\}$

Враховуючи зв'язок між нескінченно малою і нескінченно великою величинами $\left(\frac{1}{0} = \infty \text{ і, навпаки, } \frac{1}{\infty} = 0 \right)$, невизначеність $\{0 \cdot \infty\}$ зводять до невизначеності $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ або до невизначеності $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$.

Приклад 11. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \ln(1+x)$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \ln(1+x) &= \{\infty \cdot 0\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \ln(1+x)}{\sin x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{\sin x}} = \ln \left((1+x)^{\frac{1}{\sin x}} \right) = \ln e = 1. \end{aligned}$$

Приклад 12. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x \left(\sqrt{2-x} - \sqrt{x} \right)$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x \left(\sqrt{2-x} - \sqrt{x} \right) &= \{\infty \cdot 0\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \frac{\pi x}{2} ((2-x) - x)}{\cos \frac{\pi x}{2} (\sqrt{2-x} + \sqrt{x})} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-2x}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sin \frac{\pi}{2} (1-x)} = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Невизначеність виду $\{\infty - \infty\}$

Невизначеність виду $\{\infty - \infty\}$, як правило, зводять до невизначеності $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$.

Приклад 13. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(2x^2 + x) - \ln(x^2 + 1))$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(2x^2 + x) - \ln(x^2 + 1)) = \{\infty - \infty\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{2x^2 + x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \ln 2.$$

Приклад 14. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-4} \right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-4} \right) = \{\infty - \infty\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2-4} = \infty.$$

Приклад 15. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}) &= \{\infty - \infty\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})(\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x})}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}. \end{aligned}$$

Знайдемо границю

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{2}{1 + 1} = 1.$$

Неважко бачити, що функція $y = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}}$ є непарною, звідси робимо висновок, що

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} = -1.$$

Невизначеності виду $\{0^0\}$ і $\{\infty^0\}$ елементарними засобами розкрити не вдається. Знаходять границі з такими невизначеностями за допомогою правила Лопіталя (див., наприклад, [?], с. 210, [?], с. 131 – 135).

3.8.2. Дослідження функції на неперервність

Досліджують функцію на неперервність, спираючись на властивості неперервних функцій. При цьому приймають до уваги, що точками розриву є точки, проколоти око-¹ли яких входять до області визначення функції, а в самих цих точках функція не визначена. Такими точками є, наприклад, нулі знаменника частки двох функцій. Якщо функція визначається різними формулами на різних множинах, то треба перевірити межові точки цих множин.

Приклад 16. Дослідити на неперервність функцію $f(x) = \frac{x}{|x|}$.

¹Нагадаємо, що проколоти δ -околом точки x_0 називають множину $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$.

Розв'язання. Функція не визначена в точці $x = 0$. Неважко бачити, що $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{x}{|x|} = -1$, а $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{|x|} = 1$. Точка $x = 0$ для заданої функції є точкою розриву першого роду.

Приклад 17. Дослідити на неперервність функцію $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, якщо $x \neq 0$ і $f(0) = 0$.

Розв'язання. При $x \neq 0$ функція неперервна як добуток двох неперервних функцій. У точці $x = 0$ функція має границю, рівну нулю. Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, то функція неперервна і у точці $x = 0$. Отже, задана функція є неперервною на всій числовій осі.

Приклад 18. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{при } x \leq 0, \\ 1 - x, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{(x+2)(x-1)}, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Очевидно, що задана функція на проміжку $(-\infty, 0)$ є неперервною. У точці $x = 0$ вона має рівні односторонні границі

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} (x + 1) = 1 = f(1), \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (1 - x) = 1.$$

Тобто в точці $x = 0$ існує границя функції, і вона дорівнює значенню функції в цій точці — функція неперервна в точці $x = 0$.

На проміжку $(0, 1)$ функція $f(x)$ є неперервною.

У точці $x = 1$ лівостороння границя функції $f(x)$ дорівнює нулю, а

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{(x+2)(x-1)} = +\infty.$$

Тобто точка $x = 1$ є точкою розриву другого роду.

На проміжку $(1, +\infty)$ функція $f(x)$ неперервна.

Висновок: на кожному з проміжків $(-\infty, 1)$ і $(1, +\infty)$ функція неперервна. Точка $x = 1$ — точка розриву другого роду.

3.9. Відшукування границь у середовищі Maple

Для обчислення границь в Maple існують команди

`limit(expr, x=val, dir)`

та

`Limit(expr, x=val, dir).`

Тут **expr** — вираз, для якого обчислюється границя (функція чи n -ий член послідовності), **x=val** — точка, в якій обчислюється границя, **dir** — необов'язковий параметр, який може набувати значень: **right** (правостороння границя), **left** (лівостороння границя), **real** (дійсна змінна), **complex** (комплексна змінна).

Проілюструємо все сказане на прикладах.

Приклад 1.

`> restart;`

`> Limit(sin(x)/x, x=0); value(%);`

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

> Limit(sin(x)/x,x=0) = limit(sin(x)/x,x=0);

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Знайдемо односторонні границі функції $e^{\frac{1}{x}}$ в точці $x = 0$:

> Limit(exp(1/x),x=0,left)=limit(exp(1/x),x=0,left);

$$\lim_{x \rightarrow 0-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

> Limit(exp(1/x),x=0,right)=limit(exp(1/x),x=0,right);

$$\lim_{x \rightarrow 0+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

Знайдемо границю функції $f(x) = \frac{1}{x}$ в точці $x = 0$ як функції дійсної та комплексної змінної:

> limit(1/x, x = 0, real);

undefined

> limit(1/x, x = 0, complex);

$\infty + \infty I$

Приклад 2. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$.

Розв'язання.

> Limit((x^2-5*x+6)/(x^2-12*x+20),x=2)=limit((x^2-5*x+6)/(x^2-12*x+20),x=2);

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20} = \frac{1}{8}$$

Докладний аналіз цього прикладу див. на с. 39.

В останніх версіях Maple є можливість докладного ознайомлення з методами розв'язування задач. Виклик «репетитора» здійснюється через головне меню; Tools ► Tutors ► ... А далі треба вибрати розділ і тему (див. Рис. 3)

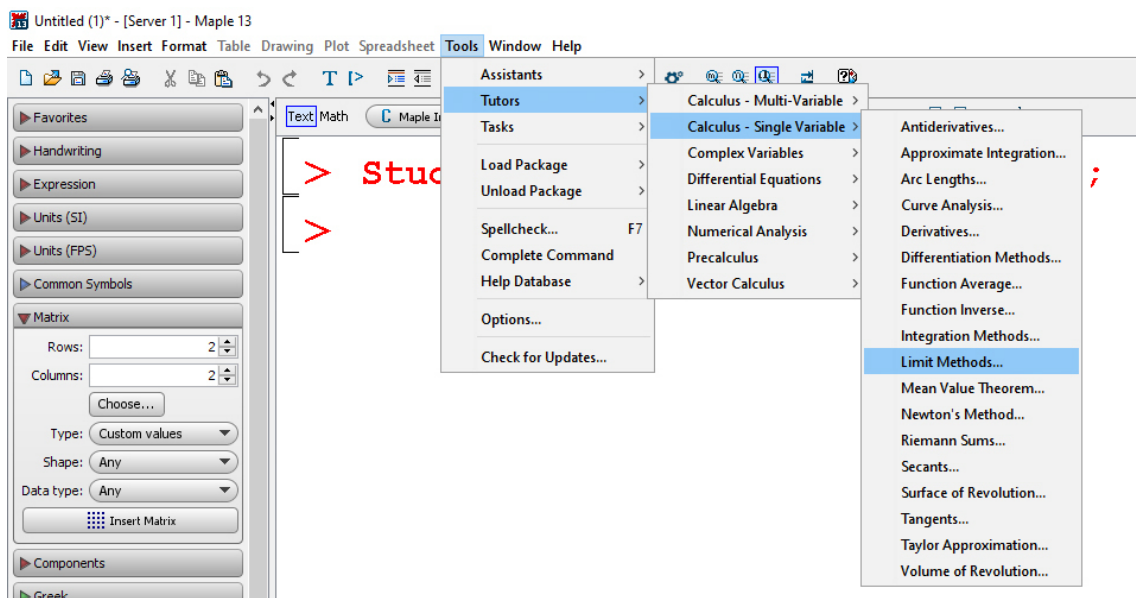


Рис. 3

На рис. 3 показаний вибір розділу «Аналіз функції однієї змінної» і теми «Методи границь» із цього розділу.

Після вибору теми з'являється вікно Maple-демонстрації обчислення границі функції.

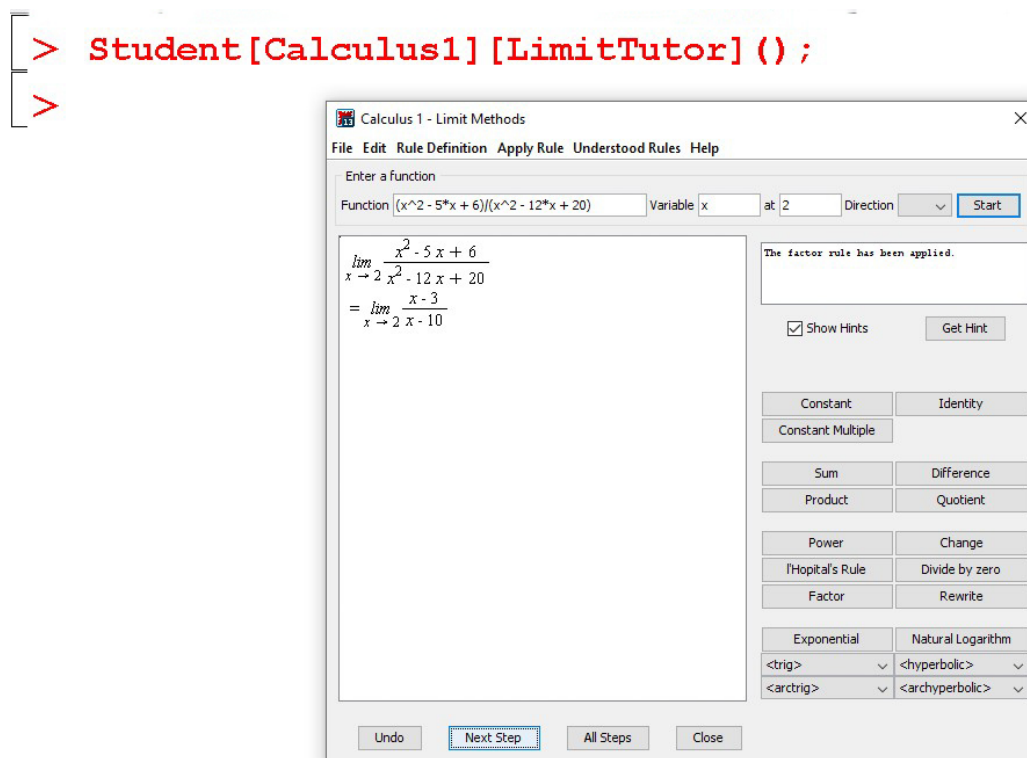


Рис.4

Інтерфейс Maple-демонстрації інтуїтивно зрозумілий. Спочатку треба ввести функцію (віконце Function), назву змінної (віконце Variable), граничне значення змінної (віконце at) і натиснути Start. У робочому вікні (найбільше вікно під віконцем Function) з'явиться у звичній математичній нотації запис границі, яку треба знайти. Щоб почати обчислення натискаємо Next Step. Обчислення проводяться покроково з поясненнями кожного кроку (пояснення див. під віконцем at). На рис. 4 показаний результат виконання першого кроку відшукування границі із прикладу 1 на с. 39, а саме — скорочення дробу на лінійний множник $(x - 2)$ (див. с. 39). Після розв'язання задачі і закриття маплета у робочому листку Maple будуть відображені усі кроки розв'язання задачі із стислими коментарями (див. рис. 5).

```
> Student[Calculus1][LimitTutor]();
```

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3}{x - 10} \quad [factor] \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x - 3)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x - 10)} \quad [quotient] \\
 &= \frac{\left(\lim_{x \rightarrow 2} x\right) + \lim_{x \rightarrow 2} (-3)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x - 10)} \quad [sum] \\
 &= \frac{\left(\lim_{x \rightarrow 2} x\right) - 3}{\lim_{x \rightarrow 2} (x - 10)} \quad [constant] \\
 &= -\frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2} (x - 10)} \quad [identity] \\
 &= -\frac{1}{\left(\lim_{x \rightarrow 2} x\right) + \lim_{x \rightarrow 2} (-10)} \quad [sum] \\
 &= -\frac{1}{\left(\lim_{x \rightarrow 2} x\right) - 10} \quad [constant] \\
 &= \frac{1}{8} \quad [identity] \\
 & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20} = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

Рис. 5

Результат, поданий на рис. 5, отримано в Maple 2021. Maple 13 видає лише кінцевий результат (див. формулу в самому низу рис. 5).

3.9.1. Дослідження функцій на неперервність засобами Maple

Перевірити неперервність функції $f(x)$ на заданому проміжку $[x_1, x_2]$ можна командою **iscont(f(x), x=x1..x2)**. Результатом виконання цієї команди буде відповідь **true** (істина), якщо функція неперервна на заданому проміжку, і **false** (хиба, неправда), якщо функція не є неперервною на цьому проміжку.

Дослідження неперервності функції на всій числовій осі здійснюється командою **iscont(f(x), x= -infinity..+infinity)**. Якщо функція $f(x)$ не є неперервною, для пошуку її точок розриву застосовують команду **discont(f(x), x)**.

Приклад 3. Дослідити на неперервність функцію

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2}, & x \leq 0 \\ 2 \cdot x + 1, & 0 < x < 1 \\ \sqrt{x}, & 1 \leq x \end{cases}$$

Розв'язання.

```
> restart;
```

```
> g:= x -> piecewise(x <= 0, 1/(x + 1)^2, 0 < x and x < 1,}
  2*x + 1, 1 <= x, sqrt(x))
```

$$g := x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & x \leq 0 \\ 2 \cdot x + 1 & 0 < x < 1 \\ \sqrt{x} & 1 \leq x \end{cases}$$

```
> iscont(g(x), x= -infinity..+infinity);
```

false

```
> discont(g(x),x);
```

$\{-1, 1\}$

Знайдемо границі функції $g(x)$ в точках $x = -1$ та $x = 1$:

```
> limit(g(x), x = -1);
```

∞

Точка $x = -1$ є точкою нескінченного розриву функції $g(x)$.

```
> limit(g(x), x = 1);
```

undefined

Як бачимо, спроба обчислити $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ виявилася невдалою. Обчислимо односторонні границі функції $g(x)$ в цій точці:

```
> limit(g(x), x = 1, left);
```

3

```
> limit(g(x), x = 1, right);
```

1

Оскільки односторонні границі функції $g(x)$ в точці $x = 1$ виявилися скінченними і різними, то маємо висновок, що точка $x = 1$ є точкою розриву першого роду.

Наведемо графік функції $g(x)$:

```
> plot(g(x),x=-3..5,y=-1..5,discont=true);
```

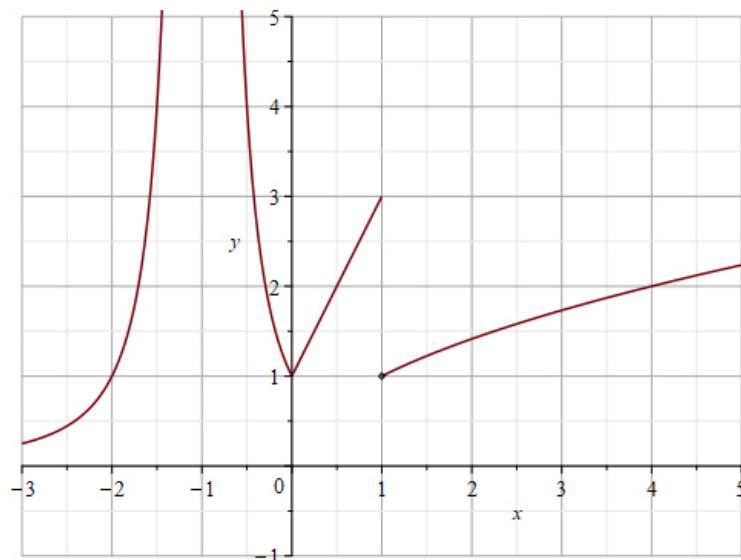


Рис. 6

Завдання до розділу

Знайти границі

1. a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{2x^2}}$; b) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos^2 x - 1}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$;
c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+12} - 3\sqrt{4+x}}{x^2 - 9}$; d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 4x} \right)$.
2. a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^3 - 27}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;
c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 + 2x} \right)$.
3. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x+1} \right)^{2x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^3 - 1}$;
c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin 3x} - \sqrt{1 - \sin 5x}}{\sin 6x}$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)$.
4. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sqrt{4 - x^2} - 2}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + x - 1}{2x^2 + 1} \right)^x$;
c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$; d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3x + 9}{\sqrt{x} - 2}$.
5. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{1-x}$; b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}{1 - 2 \cos x}$;
c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x - \operatorname{tg}^2 x} \right)$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - x \right)$.
6. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \cos x}{\sin^2 \frac{x}{2}}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{3x^2}$;
c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^4 - x^2} - \sqrt{x^4 - 9} \right)$; d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4}{1 - x^4} - \frac{1}{x - 1} \right)$.
7. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+2} \right)^{2x+1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{\sin 7x}$;
c) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{10 - x - 6\sqrt{1-x}}{x^2 - 64}$; d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^5 - 8} + x\sqrt{x(x^2 + 5)}}{\sqrt{x^5 + 2}}$.
8. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sqrt{4 - x^2} - 2}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + x - 1}{2x^2 + 3x} \right)^x$;
c) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos^2 x - 1}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^4 + 3x^2 - 4} - x^2 \right)$.

9. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1} \right)^{x+1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin^2 x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$;
c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{9x-3}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{2x}}$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2+2x}+x}{\sqrt{9x^2+1}+2x}$.
10. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-4} \right)^x$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$;
c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$; d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{\cos x - \sin x}$.
11. a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\frac{1}{1-x}}$; b) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{\cos 2x}$;
c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\cos x - \sqrt{1+x \sin x}}$; d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+3x}+x)$.
12. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3 - \sqrt{2x+9}}$;
c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-4x})$.
13. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+5}{x^2-5} \right)^{x^2}$;
c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9-x^2}{\sqrt{3x-3}}$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-3x+\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{4x^4+x^2}+x}$.
14. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)}$; b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 x}$;
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$; d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x \right)$.
15. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2-x+1})$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;
c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2+2x}+x}{\sqrt{9x^2+1}+2x}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{2x \sin x}$.
16. a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x \right)$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+1} \right)^{4x}$;
c) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}{\sin^2 x}$.
17. a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{\sqrt{\pi} - \sqrt{2x}}$; b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 x}$;
c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x})$.

18. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(1+x)}{1-x^2}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x}{x^2+1} \right)^{\frac{x^2+1}{x}}$;
c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+2x^2}{\sqrt{1+3x^2}-1}$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$.
19. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$; b) $\lim_{x \rightarrow +0} (1+\operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$;
c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$.
20. a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}-1}{2 \sin^2 x-1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} (1+\sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}$;
c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x-2}{x^3+1}$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-3\sqrt{x}+1}{2x^2+4x+\sqrt{x}}$.
21. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{2x \sin x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\sin x}{4+x} \right)^{\frac{1}{x}}$;
c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-\sqrt{x^2-x+2})$; d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.
22. a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+10 \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{x^2}}$;
c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x\sqrt{1+x}-1}$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27x^3+1}+x}{2x+\sqrt{x^2+1}}$.
23. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2+2} \right)^{2x^2}$;
c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{\sin 4x}$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x-\sqrt{4x^2+2x+1})$.
24. a) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-3x-28}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x^4)^{\frac{1}{x^4+2x^2}}$;
c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(1+x)}{x^2-1}$; d) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{4}{x^2-2x-3} \right)$.
25. a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}}$; b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$;
c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2x}{\sqrt[3]{4+8x^3}+2^{-x^2}} \right)$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2x-2})$.
26. a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$;
c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-2x+1}$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-2x+4})$.

27. a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{\sqrt{\pi} - \sqrt{2x}}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}}$;
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + 3x^2} - 2}{x^2 + x^3}$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 2}}{x + \sqrt{x}}$.

28. a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\cos \frac{x}{2}}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \operatorname{tg} x} \right)^{\frac{1}{x^3}}$;
 c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right)$; d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{2x - 2}}$.

29. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + \sin x}{x + x^2}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 3}{2x + 1} \right)^{x+1}$;
 c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x} + x}{\sqrt{9x^2 + 1} + 2x}$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x - \sqrt{x^2 + 4x} \right)$.

30. a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos x}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + x - 1}{2x^2 + 3x} \right)^x$;
 c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - x + 4}{x^2 - 16}$; d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + \sqrt[3]{x^3 + 1}}{\sqrt{x^6 + x^3} + 2x}$.

Дослідити функції на неперервність

1. $f(x) = \frac{\sqrt{7 + x} - 3}{x^2 - 4}$. 2. $f(x) = \frac{x + 5}{x^2 - 6x + 5}$

3. $f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$. 4. $f(x) = x[x]$.

5. $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{2^x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ 6. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

7. $f(x) = \begin{cases} 3x, & x \leq 0; \\ \cos \pi x, & 0 < x \leq 2; \\ 3 - x, & x > 2. \end{cases}$ 8. $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2 - x, & 1 < x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$

9. $f(x) = \frac{x\{x\}}{x + \{x\}}$. 10. $f(x) = \frac{x \cdot [x]}{x + \sin x}$.

Тема 4

Похідна

4.1. Поняття похідної

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку X і нехай x_0 — внутрішня точка цього проміжку. Візьмемо точку $x \in X$. Різницю $\Delta x = x - x_0$ називають *приростом аргументу*, а відповідну різницю значень функції $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ — *приростом функції*.

Означення 30. *Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називають границю відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx , коли останній прямує до нуля (за умови, що ця границя існує).*

Позначають похідну функції $y = f(x)$ у точці x_0 символами $y'(x_0)$ або $f'(x_0)$:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ або $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, то кажуть, що функція $y = f(x)$ в точці x_0 має нескінченну похідну.

Операцію знаходження похідної функції називають *диференціюванням* функції.

4.1.1. Фізичний, геометричний та економічний зміст похідної

Фізичний зміст похідної

Нехай функція $S(t)$ описує шлях, пройдений точкою за час t . Тоді $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$ — шлях, пройдений точкою за час Δt на відрізку часу $[t, t + \Delta t]$. Відношення шляху до часу, за який цей шлях пройдений, — це середня швидкість:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = V_{\text{ср}}.$$

Тут $V_{\text{ср}}$ — середня швидкість точки на проміжку часу $[t, t + \Delta t]$. Величина $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t) = V(t)$ — це миттєва швидкість точки в момент часу t .

Геометричний зміст похідної

Через точки M і N лінії, що є графіком функції $y = f(x)$, проведемо січну — пряму MN (рис. 7). Очевидно, що $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi$, де φ — кут, утворений січною з додатним напрямом осі Ox .

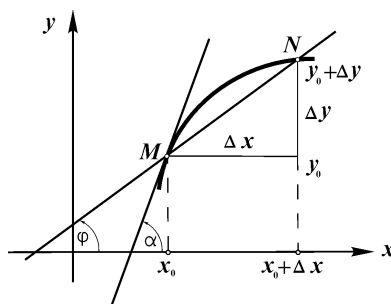


Рис. 7

Якщо Δx прямує до нуля, точка N прямує вздовж графіка функції $y = f(x)$ до точки M . При цьому пряма MN буде обертатись навколо точки M і займе граничне положення — положення дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці x . Тобто якщо існує похідна $f'(x_0)$, то

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha,$$

де α — кут між дотичною, проведеною до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0 , і додатним напрямом осі Ox . Звідси отримуємо геометричний зміст похідної: похідна $f'(x)$ в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(x_0, f(x_0))$.

Спираючись на геометричний зміст похідної, отримуємо рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Економічний зміст похідної

Кількість виробленої продукції за одиницю часу називають продуктивністю праці. Якщо $U(t)$ — кількість виробленої продукції за час t , то відношення $\frac{U(t + \Delta t) - U(t)}{\Delta t}$ — це середня продуктивність праці на проміжку часу $[t, t + \Delta t]$. Тоді границю

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta t} = U'(t)$$

можна трактувати як продуктивність праці в момент часу t .

4.2. Похідні основних елементарних функцій

№	Функція $f(x)$	Похідна $f'(x)$	№	Функція $f(x)$	Похідна $f'(x)$
1	C	0	9	$\sin x$	$\cos x$
2	x	1	10	$\cos x$	$-\sin x$
3	x^n	$nx^{n-1}, n \in \mathbb{R}$	11	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
4	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	12	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
5	e^x	e^x	13	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6	a^x	$a^x \ln a$	14	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	15	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
8	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	16	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

4.3. Основні правила диференціювання

Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ мають скінченні похідні u' і v' . Тоді

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
2. $(uv)' = u'v + uv'$.
3. $(Cu)' = Cu'$.
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0$.

4.4. Похідна оберненої функції

Нехай функція $y = f(x)$ така, що для неї існує обернена функція $x = \varphi(y)$.

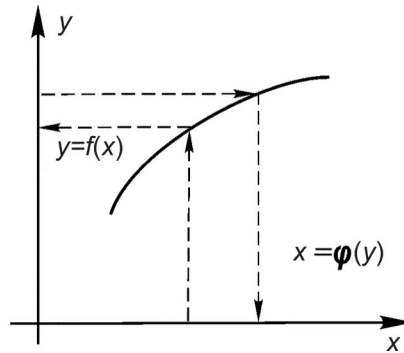


Рис. 8

Якщо існує похідна $f'(x)$, то

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)}.$$

Тобто між похідними прямої та оберненої функції має місце такий зв'язок:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}. \quad (4.4.1)$$

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = \operatorname{arctg} x$.

Розв'язання. Оберненою функцією до $y = \operatorname{arctg} x$ є функція $x = \operatorname{tg} y$. Знаходимо

$$x'_y = (\operatorname{tg} y)'_y = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2.$$

За формулою (4.4.1) маємо

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4.5. Похідна складеної функції

Нехай $y = f(u)$, а $u = g(x)$, тоді y є складеною функцією $y = f(g(x))$ змінної x . Нехай функції $f(u)$ і $g(x)$ мають скінченні похідні $y'_u = f'(u)$ і $u'_x = g'(x)$. Тоді існує похідна від y за змінною x :

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x.$$

Отже, ми отримали формулу для похідної складеної функції:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = e^{\sin x}$.

Розв'язання. Задана функція є складеною: $y = e^u$, $u = \sin x$. За формулою похідної складеної функції маємо:

$$y'_x = y'_u u'_x = (e^u)'_u \cdot u'_x = e^u \cdot \cos x = e^{\sin x} \cos x.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = \cos^5 \sqrt{x^3 + 1}$.

Розв'язання. Функція y є складеною, її можна подати як суперпозицію таких функцій:

$$y = u^5, \quad u = \cos v, \quad v = \sqrt{w}, \quad w = x^3 + 1.$$

Знаходимо похідну

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_u \cdot u'_v \cdot v'_w \cdot w'_x = 5u^4 \cdot (-\sin v) \cdot \frac{1}{2\sqrt{w}} \cdot 3x^2 = \\ &= 5 \cos^4 \sqrt{x^3 + 1} \cdot \left(-\sin \sqrt{x^3 + 1} \right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 1}} \cdot 3x^2. \end{aligned}$$

4.6. Похідна функції, заданої параметрично

Нехай задана пара неперервних функцій

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

визначених на одному проміжку. Нехай функція $x(t)$ строго монотонна. Тоді існує обернена функція $t = t(x)$ і змінна y є складеною функцією від змінної x : $y = y(t(x))$. Знайдемо її похідну:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x.$$

Враховуючи, що $t'_x = \frac{1}{x'_t}$ (див. зв'язок між похідними прямої та оберненої функції на попередній сторінці), можемо записати формулу обчислення похідної параметрично заданої функції:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Тут припускається, що похідні y'_t і x'_t існують і скінченні, окрім того, припускається, що $x'_t \neq 0$.

Приклад 1. Знайти похідну параметрично заданої функції

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t. \end{cases}$$

Розв'язання. Задана пара функцій визначає залежну змінну y як функцію аргументу x на кожному з проміжків $t \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. На кожному з цих проміжків існує похідна

$$y'_x = \frac{R \cos t}{-R \sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

4.7. Похідна неявно заданої функції

Похідну від функції $y(x)$, заданої співвідношенням $F(x, y) = 0$, тобто функції заданої неявно, знаходять у такий спосіб: беруть похідну за змінною x від обох частин рівності $F(x, y) = 0$, враховуючи, що y — функція від x , у результаті отримують лінійне рівняння відносно y' , з якого і знаходять похідну y' .

Приклад 1. Знайти похідну функції $y(x)$, заданої рівнянням $x^2 + y^2 = R^2$.

Розв'язання. Беремо похідну від обох частин заданої рівності:

$$2x + 2yy' = 0.$$

Звідси знаходимо y' :

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Якщо ми виразимо y як явну функцію від x , тобто розв'яжемо рівняння $x^2 + y^2 = R^2$ відносно y , а потім візьмемо похідну, то отримаємо той самий результат:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = R^2 &\Leftrightarrow y^2 = R^2 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}, \\ y' &= \pm \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\pm\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Зауваження. Розв'язати рівняння $F(x, y) = 0$ відносно y вдається дуже й дуже рідко, тому не варто марнувати час на побудову його розв'язку, а брати похідну від неявної функції за описаною вище схемою.

Приклад 2. Знайти похідну функції, заданої неявно:

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Розв'язання. Беремо похідну від обох частин рівності

$$\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (2x + 2yy').$$

Після спрощення маємо вираз

$$y'x - y = x + yy',$$

з якого і знаходимо y'

$$y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

4.8. Логарифмічна похідна

Логарифмічною похідною функції $f(x)$ називають похідну $(\ln f(x))'$.

Розглянемо застосування логарифмічної похідної. Знайдемо похідну функції $y = u^v$, де $u = u(x) > 0$ і $v = v(x)$ — деякі функції, що мають скінченні похідні u' і v' . Прологарифмуємо y : $\ln y = v \ln u$ і візьмемо похідну від обох частин цієї рівності:

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \frac{u'}{u}.$$

Враховуючи, що $y = u^v$, отримуємо формулу для похідної степенево-показникової функції

$$(u^v)' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right).$$

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = x^{\sin x}$.

Розв'язання. Логарифмуємо y :

$$\ln y = \sin x \ln x.$$

Беремо похідну від обох частин отриманої рівності:

$$\frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \sin x \frac{1}{x}.$$

Виражаємо звідси y' :

$$y' = y \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

4.9. Диференційовні функції

Означення 31. Функція $y = f(x)$ називається диференційовною в точці x_0 , якщо її приріст Δy в цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad (4.9.1)$$

де A — деяке число, що не залежить від Δx , а $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$, коли $\Delta x \rightarrow 0$.

Якщо поділимо рівність (4.9.1) на Δx і перейдемо до границі при $\Delta x \rightarrow 0$, то побачимо, що границя відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ існує і дорівнює A :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = A.$$

Тобто якщо функція диференційовна в точці, то вона в цій точці має скінченну похідну.

З іншого боку, якщо функція має в точці x_0 скінченну похідну, то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \beta, \text{ де } \beta \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Звідси знаходимо приріст функції $y = f(x)$:

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \beta \Delta x.$$

Як бачимо, приріст функції має вигляд (4.9.1).

Маємо висновок:

Твердження 4.9.1. Функція є диференційовною в точці тоді і тільки тоді, коли вона в цій точці має скінченну похідну.

Функцію, що має скінченну похідну в кожній точці деякого проміжку називають диференційовною на цьому проміжку.

4.9.1. Зв'язок між диференційовністю і неперервністю функції

У рівності (4.9.1) перейдемо до границі при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x = 0,$$

звідси випливає

Твердження 4.9.2. Функція, диференційовна в точці, є неперервною в цій точці.

Зауваження. Функція може бути неперервною в точці, але недиференційовною в цій точці. Наприклад, функція $y = |x|$ в точці $x = 0$ неперервна, але не має похідної в цій точці.

4.10. Диференціал функції

Нехай приріст функції $y = f(x)$ можна подати у вигляді (4.9.1).

Означення 32. Диференціалом функції $y = f(x)$ називають головну, лінійну по Δx частину приросту функції.

Позначають диференціал функції $y = f(x)$ символами dy або df . Диференціал функції, обчислений в точці x_0 , позначають через $dy(x_0)$ чи $df(x_0)$. Тоді за означенням маємо

$$df(x_0) = A \cdot \Delta x.$$

Врахуємо, що A в точці x_0 дорівнює $A = f'(x_0)$, і отримаємо правило обчислення диференціала функції $f(x)$ в точці x_0 :

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Приріст Δx аргументу x ще позначають символом dx . У цих позначеннях диференціал функції набуває вигляду $dy = y'_x dx$, звідки маємо ще одне позначення для похідної

$$y'_x = \frac{dy}{dx}.$$

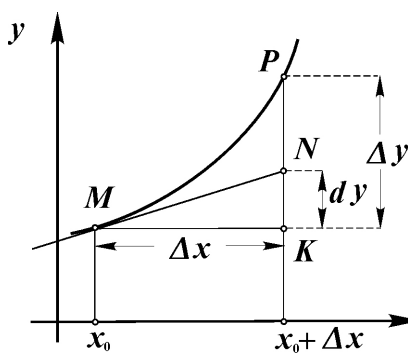


Рис. 9

Геометричний зміст диференціала проілюстровано на рис. 3: крива MP — графік функції $y = f(x)$, пряма MN — дотична до графіка в точці M , довжина відрізка KP — приріст ординати графіка функції:

$$KP = \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Із прямокутного трикутника MKP знаходимо, що $KN = MK \cdot \operatorname{tg} \angle NMK$. Оскільки пряма MN — дотична, то $\operatorname{tg} \angle NMK = f'(x_0)$. Враховуючи, що $MK = \Delta x$, отримуємо такий результат:

$$KN = f'(x_0) \cdot \Delta x = dy(x_0).$$

Якщо Δy — приріст ординати функції y , що відповідає приросту Δx аргументу x , то dy — відповідний приріст ординати дотичної.

Звертаємо увагу, що при малих значеннях Δx величини Δy і dy відрізняються мало (строго кажучи, $\Delta y - dy \rightarrow 0$, коли $\Delta x \rightarrow 0$). Цей факт дозволяє застосувати диференціал до наближених обчислень. Якщо нам відомі значення функції $f(x_0)$ і її похідної $f'(x_0)$ в точці x_0 , то можна знайти наближене значення функції $f(x)$ в точці $x_0 + \Delta x$. Якщо функція $f(x)$ диференційовна, то $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, де $\alpha \rightarrow 0$, коли $\Delta x \rightarrow 0$. Нехтуючи доданком $\alpha \cdot \Delta x$, що прямує до нуля швидше, ніж Δx , отримуємо наближену рівність

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \quad (4.10.1)$$

Про похибку, яка при цьому припускається, дивись докладніше параграф «Формула Тейлора» на стор. 67.

Приклад 1. Обчислити наближено $\sqrt{0,99}$.

Розв'язання. Можемо вважати, що нам треба обчислити значення функції $y = \sqrt{x}$ в точці $x = 0,99$. За x_0 — точку, в якій нам відомі (або їх легко обчислити) значення функції і її похідної, — візьмемо точку $x_0 = 1$. Тоді $\Delta x = x - x_0 = 0,99 - 1 = -0,01$. Скористаємося формулою (4.10.1):

$$\sqrt{0,99} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(-0,01) = 1 - 0,005 = 0,995.$$

Для порівняння наведемо наближене значення $\sqrt{0,99}$ з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$:

$$\sqrt{0,99} \approx 0,994987.$$

4.11. Похідні та диференціали вищих порядків

Похідну $f'(x)$ називають *першою* похідною функції $f(x)$. Якщо функція $f'(x)$ є диференційовною, то її похідну $(f'(x))'$ називають *другою похідною* або *похідною другого порядку* функції $f(x)$. Похідну від другої похідної називають *третьою похідною* і т.д.

Означення 33. *Похідною n -го порядку функції називають першу похідну від її похідної порядку $n - 1$.*

Для позначення порядку похідної використовують відповідну кількість штрихів або числа, записані римськими чи арабськими цифрами. Якщо число записується арабськими цифрами, то його беруть у дужки. Так, символом y'' позначають другу похідну, символами y''' , y^{III} , $y^{(3)}$ — третю похідну, символами y^{IV} , $y^{(4)}$ — четверту похідну, ..., символом $y^{(n)}$ — похідну n -го порядку.

Приклад 1. Очевидно, що

$$(e^x)^{(n)} = e^x. \quad (4.11.1)$$

Справді, $y = e^x$, $y' = e^x$, $y'' = (y')' = (e^x)' = e^x$, ..., $y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = (e^x)' = e^x$.

Приклад 2. Знайдемо похідну n -го порядку функції $y = (1+x)^\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$. Скориставшись похідною степеневі функції, знаходимо, що $y' = \mu(1+x)^{\mu-1}$, $y'' = \mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2}$, ..., $y^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2) \dots (\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n}$. Тобто справджується формула

$$((1+x)^\mu)^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2) \dots (\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n}. \quad (4.11.2)$$

Приклад 3. Знайдемо похідну n -го порядку функції $y = \sin x$.

Знаходимо перші чотири похідні цієї функції:

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x, \quad y^{\text{IV}} = \sin x.$$

Зрозуміло, що далі все буде повторюватись. Знаходимо, що $y' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $y'' = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$, $y''' = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$, ..., $y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

Отже, маємо формулу

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \quad (4.11.3)$$

Приклад 4. Аналогічно можна показати, що справджується формула

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \quad (4.11.4)$$

Диференціал $dy = f'(x)dx$ функції називають *першим* диференціалом, або диференціалом *першого порядку*. Диференціал першого порядку від першого диференціала називають *другим* диференціалом або диференціалом *другого порядку* і т.д.

Означення 34. Диференціалом n -го порядку називають диференціал першого порядку від диференціала порядку $n - 1$.

Позначають диференціал n -го порядку символом $d^n y$. Обчислюють диференціал n -го порядку від функції $y = f(x)$ за формулою

$$d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n. \quad (4.11.5)$$

Завдання до розділу

Знайти похідні функцій:

1. $y = 2\sqrt[3]{x^2} + x^{\sqrt{2}} + \frac{2}{x^3}.$

2. $y = x^3(x^2 - 2)^2.$

3. $y = e^{-5x} \sin x.$

4. $y = x \arccos 2x - \sqrt{1 - 4x^2}.$

5. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}).$

6. $y = 2^{x^2 + \cos x}.$

7. $y = \ln \operatorname{tg} x.$

8. $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}.$

9. $y = \ln \frac{x+1}{x-1}.$

10. $y = \frac{2 \cos x}{\cos 2x}.$

11. $y = \lg^2(x + \sin 2x).$

12. $y = x^{\ln x}.$

13. $y = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x - x.$

14. $y = (\sin x)^x.$

15. $y = \operatorname{ctg} x \ln \cos x.$

16. $y = (1 + x^2)^{\operatorname{tg} x}.$

Знайти похідні параметрично заданих функцій:

17. $\begin{cases} x = e^{-t} \cos t, \\ y = e^{-t} \sin t. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = t \ln t, \\ y = \frac{\ln t}{t}. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = 2 \operatorname{tg} 3t, \\ y = \frac{1}{\cos 3t}. \end{cases}$

Знайти похідні неявно заданих функцій:

21. $x^2 + 4xy + 2y^2 - 8x = 0.$

22. $xy + \ln y = 1.$

23. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$

24. $x \sin y + y \cos x = 0.$

Знайти похідні вказаних порядків:

25. $y = \frac{x+1}{x-1},$

знайти y'' .

26. $y = x^2 e^{2x},$

знайти y^{IV} .

27. $y = \operatorname{arctg} x,$

знайти y''' .

28. $y = \ln(1+x),$

знайти $y^{(n)}$.

Обчислити наближено з використанням першого диференціала:

29. $\sqrt[3]{28}.$

30. $\operatorname{arctg} 1,05.$

31. $\lg 11.$

32. $\sin 29^\circ.$

33. Під кутом між двома кривими в точці їх перетину розуміють кут між їхніми дотичними, проведеними в цій точці. Під яким кутом перетинаються криві $y = x^2$ і $x = y^2$?

34. Написати рівняння дотичної до кривої

$$x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^2$$

в точках: а) $t = 0$; б) $t = 1$.

35. Написати рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ в точці $M\left(6, \frac{64}{10}\right)$.

Тема 5

Властивості диференційовних функцій

5.1. Основні теореми диференціального числення

Теорема 6 (Теорема Ферма). *Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому проміжку X і досягає свого найбільшого (найменшого) значення у внутрішній точці $x = c$ цього проміжку. Якщо в цій точці існує скінченна похідна $f'(c)$, то вона дорівнює нулю $f'(c) = 0$.*

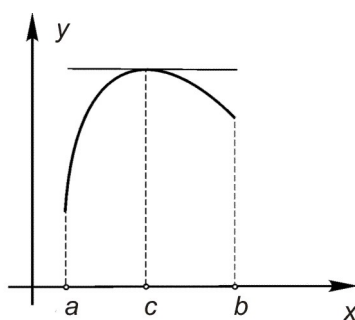


Рис. 10

Теорема Ферма має такий геометричний зміст: якщо функція досягає найбільшого (найменшого) значення у внутрішній точці $x = c$ проміжку і є в цій точці диференційовною, то дотична до графіка функції в цій точці паралельна осі Ox (рис. 10).

Теорема 7 (Теорема Ролля). *Нехай функція $f(x)$*

1) *визначена і неперервна на замкнутому проміжку $[a, b]$;*

2) *диференційовна на інтервалі (a, b) ;*

3) *на кінцях проміжку набуває рівних значень $f(a) = f(b)$.*

Тоді існує принаймні одна точка c ($a < c < b$) така, що $f'(c) = 0$.

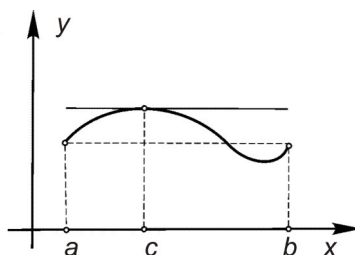


Рис. 11

Геометричний зміст теореми Ролля проілюстровано на рис. 11: графік неперервної на $[a, b]$ і диференційовної на (a, b) функції, яка на кінцях проміжку $[a, b]$ набуває рівних значень, має принаймні одну точку, де дотична до графіка паралельна осі абсцис. Як видно із рис. 11, таких точок може бути кілька.

Теорема 8 (Теорема Лагранжа). *Нехай функція $f(x)$*

1) *визначена і неперервна на проміжку $[a, b]$;*

2) *диференційовна на (a, b) .*

Тоді існує принаймні одна точка c ($a < c < b$) така, що

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Геометричний зміст теореми Лагранжа показано на рис. 12: графік неперервної на $[a, b]$ і диференційованої на (a, b) функції має принаймні одну точку, де дотична до графіка паралельна січній. Таких точок може бути кілька (див. рис. 12).

Із теореми Лагранжа маємо такі наслідки:

Наслідок 1. *Якщо визначена і неперервна на $[a, b]$ функція має похідну, рівну нулю на (a, b) , то функція є сталою на $[a, b]$.*

Наслідок 2. *Якщо функції f і g , визначені і неперервні на $[a, b]$, мають на (a, b) рівні похідні $f'(x) = g'(x)$, $x \in (a, b)$, то на проміжку $[a, b]$ вони відрізняються на сталу: $f(x) - g(x) = \text{const}$, $x \in [a, b]$.*

Теорема 9 (Теорема Коші). *Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$*

1) *визначені і неперервні на проміжку $[a, b]$;*

2) *диференційовні на проміжку (a, b) ;*

3) *$g'(x) \neq 0$ на проміжку (a, b) .*

Тоді існує точка c ($a < c < b$) така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

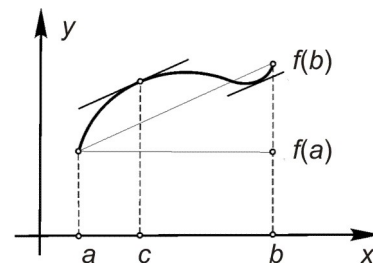


Рис. 12

5.2. Правило Лопітала

Теорема 10 (Правило Лопітала). *Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ визначені і диференційовні в деякому околі точки a , за винятком, можливо, самої точки a . Нехай $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ і $g'(x) \neq 0$ у вказаному околі точки a . Тоді, якщо існує границя відношення похідних $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує і границя відношення функцій $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, причому справджується формула*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Зауваження 1. Якщо похідні $f'(x)$ і $g'(x)$ задовольняють ті ж вимоги, що і функції $f(x)$ і $g(x)$, то правило Лопітала можна застосувати повторно.

Зауваження 2. Правило Лопітала залишається справедливим і у випадку, коли $x \rightarrow \infty$, та у випадку, коли $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$.

Приклад 1. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, чисельник і знаменник дробу задовольняють вимоги правила Лопітала, тому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

Приклад 2. Знайти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 1}{e^x} = 0$$

Невизначеності виду $\{0 \cdot \infty\}$, $\{\infty^0\}$, $\{0^0\}$, $\{1^\infty\}$ можна звести до невизначеності $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ або $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$. Покажемо це на прикладах.

Приклад 3. Знайти $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2}{x} = 0.$$

Приклад 4. Знайти $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x} = \{0^0\} = \lim_{x \rightarrow +0} \left(e^{\ln x}\right)^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\sin x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} \sin x \ln x}.$$

Знайдемо границю

$$\lim_{x \rightarrow +0} \sin x \ln x = \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \cdot x \ln x = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = 0.$$

Тут ми врахували результати попереднього прикладу: $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = 0$.

Отже, $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x} = e^0 = 1$.

Приклад 5. Знайти $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \{1^\infty\} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} e^{\operatorname{tg} 2x \ln \operatorname{tg} x}.$$

Знаходимо границю

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \ln \operatorname{tg} x = \{\infty \cdot 0\} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\sin^2 2x} \cdot 2} = -\frac{1}{4}.$$

Тобто $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{-\frac{1}{4}}$.

5.3. Формула Тейлора

Нехай $p(x)$ — многочлен степеня n :

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

Розкладемо многочлен $p(x)$ за степенями $x - x_0$, де x_0 деяке число, тобто подамо многочлен $p(x)$ у вигляді

$$p(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \cdots + A_n(x - x_0)^n, \quad (5.3.1)$$

де $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ — невідомі коефіцієнти. Покладемо в (5.3.1) $x = x_0$ і отримаємо $A_0 = p(x_0)$. Обчислюючи значення $p^{(k)}(x_0)$, із рівності (5.3.1) знаходимо, що

$$A_k = \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Таким чином, ми встановили, що для многочлена $p(x)$ справджується формула

$$p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (5.3.2)$$

Формулу (5.3.2) називають формулою Тейлора для многочлена $p(x)$.

Нехай $f(x)$ — n разів диференційовна функція. Складемо многочлен n -го степеня

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Цей многочлен і його похідні (до n -ї включно) мають ті самі значення в точці x_0 , що і функція $f(x)$ та її похідні. Тобто, якщо $f(x)$ — многочлен степеня n , то $f(x) = p_n(x)$, але якщо $f(x)$ не є многочленом, то виникає питання, наскільки відрізняються ці дві функції? Позначимо

$$f(x) - p_n(x) = r_n(x).$$

Якщо функція $f(x)$ має неперервну похідну $n + 1$ порядку, то можна показати¹, що

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad (5.3.3)$$

де θ — деяке число: $0 < \theta < 1$.

Функцію $f(x)$ подають у вигляді

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x). \quad (5.3.4)$$

Формулу (5.3.4) називають формулою Тейлора функції $f(x)$. Функцію $r_n(x)$ називають залишковим членом формули Тейлора, а її подання у вигляді (5.3.3) називають залишковим членом у формі Лагранжа.

Окремий випадок формули Тейлора при $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x) \quad (5.3.5)$$

називають формулою Маклорена.

Формула Тейлора застосовується при наближених обчисленнях, при знаходженні границь, при дослідженні поведінки функції та ін.

¹Див., наприклад, [?], с. 185 – 188.

5.3.1. Формула Тейлора для основних елементарних функцій

Наведемо відомі найбільш вживані формули для деяких елементарних функцій і опишемо поведінку залишкового члена r_n в залежності від n — порядку формули:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x),$$
$$r_n(x) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, x \in \mathbb{R}. \quad (5.3.6)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + r_{2m}(x),$$
$$r_n(x) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, x \in \mathbb{R}. \quad (5.3.7)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + r_{2m}(x),$$
$$r_n(x) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, x \in \mathbb{R}. \quad (5.3.8)$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu x}{1!} + \frac{\mu(\mu-1)x^2}{2!} + \cdots + \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)x^n}{n!} + r_n(x),$$
$$r_n(x) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, |x| < 1. \quad (5.3.9)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + r_n(x),$$
$$r_n(x) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, |x| < 1. \quad (5.3.10)$$

Завдання до розділу

1. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції

$$f(x) = (x+2)(x-4).$$

Обчислити границі, користуючись правилом Лопіталя:

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x - 4}{x^5 + 6x^2 - x - 1}.$

3. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 6x^2 - 16}{x^4 + 5x - 6}.$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}.$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}.$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x.$

7. $\lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x).$

8. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right).$

10. $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$

11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x.$

12. $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x.$

13. $\lim_{x \rightarrow +0} (\sin x)^x.$

14. Розкласти многочлен $p(x) = 2 + 2x + 3x^2 + x^3$ за степенями $(x + 1)$.

Записати формулу Тейлора порядку n в околі точки x_0 для функцій:

15. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$, $n = 2$, $x_0 = 2$. **16.** $y = \sqrt{4x + 1}$, $n = 3$, $x_0 = 2$.

Записати формулу Маклорена n -го порядку для функцій:

17. $y = \arcsin x$, $n = 3$. **18.** $y = x^2 e^x$, $n = 3$.

Тема 6

Дослідження функції

6.1. Ознака монотонності функції

Теорема 11. Якщо функція $f(x)$ диференційовна на (a, b) і $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на (a, b) , то $f(x)$ зростає (спадає) на (a, b) .

Інтервали, на яких функція зростає (спадає), називають *інтервалами монотонності* функції.

Приклад 1. Знайти інтервали монотонності функції $y = \frac{x}{1+x^2}$.

Розв'язання. Область визначення функції $D_y = (-\infty, +\infty)$.

Знаходимо похідну функції:

$$y' = \frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Визначаємо проміжки, на яких похідна зберігає знак:

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Отже, на проміжку $(-\infty, -1)$ $f'(x) < 0$ — функція спадає, на проміжку $(-1, +1)$ $f'(x) > 0$ — функція зростає, на проміжку $(1, +\infty)$ $f'(x) < 0$ — функція спадає.

6.2. Локальні екстремуми функції

Означення 35. Точку x_0 називають точкою локального максимуму (мінімуму) функції $f(x)$, якщо для всіх x із деякого δ -околу¹ точки x_0 виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Якісний вигляд графіка неперервної функції в околі точки локального екстремуму показано на прикладі функції $y = x|x^2 - 1|$, її графік подано на рис. 13. Точки з абсцисами A та C є точками максимуму цієї функції, точки з абсцисами B та D — точками мінімуму.

¹Нагадаємо, що δ -околом точки x_0 називають інтервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, де δ — додатне число.

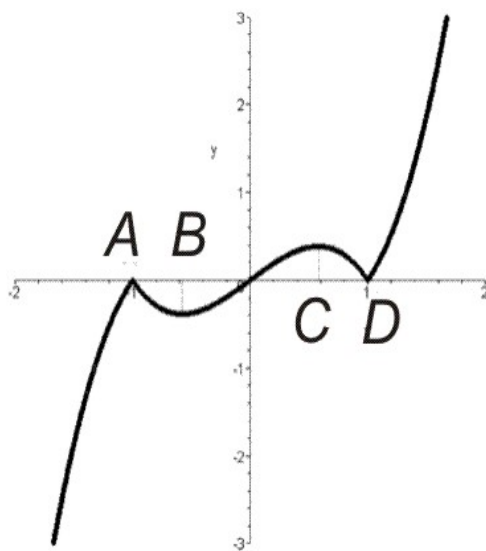


Рис. 13

Точки максимуму і мінімуму називають точками *екстремуму*. Значення функції в точках екстремуму називають *екстремумами функції* (максимумом і мінімумом функції).

Точки, в яких похідна функції дорівнює нулю або не існує, називають *критичними точками*.

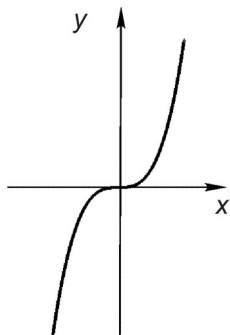


Рис. 14

Як випливає з теореми Ферма, в точках екстремуму похідна функції або дорівнює нулю, або не існує. Вказана умова є лише необхідною умовою екстремуму: якщо в деякій точці похідна функції дорівнює нулю (або не існує), то ця точка може і не бути точкою екстремуму. Наприклад, похідна функції $y = x^3$ (рис. 14) обертається в нуль в точці $x = 0$, але ця точка не є точкою екстремуму вказаної функції.

Наведемо достатні умови екстремуму для функцій, неперервних у критичних точках.

Твердження 6.2.1. (Перше правило). Нехай функція $f(x)$ є диференційовною в деякому δ -околі точки x_0 , за винятком, можливо, самої точки x_0 , і є неперервною в цій точці. Якщо із збільшенням значень x при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак, то x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$. Якщо похідна $f'(x)$ змінює знак з «+» на «-», то x_0 — точка максимуму; якщо похідна $f'(x)$ змінює знак з «-» на «+», то x_0 — точка мінімуму. Якщо при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ зберігає знак, то в точці x_0 функція $f(x)$ екстремуму не має.

Твердження 6.2.2. (Друге правило). Нехай функція $f(x)$ є диференційовною в деякому околі точки x_0 і в точці x_0 існує друга похідна $f''(x_0)$. Якщо $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 — точка екстремуму функції $f(x)$, а саме: якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка мінімуму, якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимуму.

Твердження 6.2.3. (Третє правило). Нехай функція $f(x)$ є $(n-1)$ разів диференційовною в деякому околі точки x_0 і в точці x_0 існує похідна $f^{(n)}(x_0)$. Нехай виконуються умови

$$f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, \dots, f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тоді, якщо число n — парне, то x_0 — точка екстремуму функції $f(x)$, а саме: якщо

$f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка мінімуму; якщо $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимуму. Якщо ж n — число непарне, то в точці x_0 функція $f(x)$ екстремуму не має.

П р и к л а д 1. Знайти екстремуми функції $y = x|x^2 - 1|$.

Р о з в ' я з а н н я. Задана функція визначена і неперервна на проміжку $(-\infty, +\infty)$. Запишемо подання заданої функції у вигляді

$$y = \begin{cases} x(x^2 - 1), & -\infty < x \leq -1; \\ -x(x^2 - 1), & -1 < x \leq 1; \\ x(x^2 - 1), & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

На кожному з інтервалів $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$ функція є диференційовною. У точках $x = -1$ і $x = 1$ похідна функції не існує. Справді, знаходимо, що

$$y' = \begin{cases} 3x^2 - 1, & -\infty < x < -1; \\ -3x^2 + 1, & -1 < x < 1; \\ 3x^2 - 1, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Оскільки в околі точки $x = -1$ по різні боки від цієї точки функція y та її похідна y' описуються різними аналітичними виразами, дослідимо поведінку похідної y' при $x \rightarrow -1 \pm 0$. Знаходимо, що $\lim_{x \rightarrow -1-0} y' = \lim_{x \rightarrow -1-0} (3x^2 - 2) = 2$, а $\lim_{x \rightarrow -1+0} y' = \lim_{x \rightarrow -1+0} (-3x^2 + 1) = -2$, на підставі чого робимо висновок, що в точці $x = -1$ функція y похідної не має. Аналогічними міркуваннями дійдемо висновку, що задана функція не має похідної і в точці $x = 1$.

Знайдемо стаціонарні точки функції y . Розв'яжемо рівняння $y' = 0$: $\pm(3x^2 - 1) = 0$. Його коренями є $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ та $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Таким чином, ми встановили, що функція $y = x|x^2 - 1|$ має чотири критичні точки $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ і $x = 1$. Ці точки, і тільки вони, є підозрілими на екстремум. Звертаємо увагу, що дослідити на екстремум критичні точки x_1 і x_4 ми можемо тільки за першим правилом (похідна функції, що досліджується, в цих точках не існує). До дослідження точок x_2 і x_3 можна залучити як перше, так і друге правило.

Вище ми з'ясували, що під час переходу через точку $x = -1$ похідна y' змінює знак з «+» на «-», тобто $y'(x) > 0$, коли $x \in (-1 - \delta, -1)$, і $y'(x) < 0$, коли $x \in (-1, -1 + \delta)$; δ — досить мале додатне число. За першим правилом знаходимо, що функція $y(x)$ в точці $x = -1$ має максимум.

Аналогічно можна показати, що $y'(x) < 0$, коли $x \in (1 - \delta, 1)$, і $y'(x) > 0$, коли $x \in (1, 1 + \delta)$, тобто $y'(x)$ під час переходу через точку $x = 1$ змінює знак з «-» на «+». У точці $x = 1$ функція $y(x)$ має мінімум.

Дослідимо на екстремум стаціонарні точки x_2 та x_3 . Знаходимо, що на проміжку $(-1, +1)$ друга похідна має вигляд: $y''(x) = -6x$. Оскільки $y'(x_2) = 0$, $y''(x_2) > 0$, то x_2 — точка мінімуму. Знаходимо, що в точці x_3 виконуються умови $y'(x_3) = 0$, $y''(x_3) < 0$, тобто x_3 — точка максимуму.

П р и к л а д 2. Знайти екстремуми функції $y = 6x^4 - x^6$.

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо критичні точки функції. Функція є диференційовною у всій області визначення $D_y = (-\infty, +\infty)$. Її похідна має вигляд $y' = 24x^3 - 6x^5$. Прирівнюємо похідну до нуля і знаходимо стаціонарні точки:

$$y' = 0 \Leftrightarrow 24x^3 - 6x^5 = 0 \Leftrightarrow 6x^3(4 - x^2) = 0 \Leftrightarrow 6x^3(2 + x)(2 - x) = 0.$$

Стаціонарними точками функції y є $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$.

Знаходимо другу похідну і обчислюємо її значення в стаціонарних точках:

$$y'' = 72x^2 - 30x^4, \quad y''(-2) = -192, \quad y''(0) = 0, \quad y''(2) = -192.$$

Звідси за другим правилом робимо висновок, що стаціонарні точки $x_1 = -2$ та $x_3 = 2$ — точки максимуму функції y . Стаціонарна точка $x_2 = 0$ потребує додаткового дослідження. Знаходимо, що

$$y''' = 144x - 120x^3, \quad y'''(0) = 0, \quad y^{IV} = 144 - 360x^2, \quad y^{IV}(0) = 144.$$

Оскільки виконуються умови

$$y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0, \quad y^{IV} \neq 0,$$

на підставі третього правила робимо висновок, що точка $x_2 = 0$ є точкою екстремуму (першою відмінною від нуля похідною в точці є похідна парного порядку). Оскільки $y^{IV}(0) = 144 > 0$, то $x_2 = 0$ — точка мінімуму.

6.3. Найбільше та найменше значення неперервної функції на відрізку

Функція, неперервна на відрізку, досягає свого найбільшого та найменшого значень або в критичних точках, або на кінцях відрізка. Для відшукування найбільшого та найменшого значень неперервної функції на відрізку знаходять похідну функції. Далі знаходять критичні точки функції. Вибирають критичні точки, що належать відрізку. Обчислюють значення функції у вибраних критичних точках і на кінцях відрізка. Серед отриманих значень функції вибирають найбільше та найменше значення.

Приклад 1. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x + \frac{1}{x}$ на відрізку $[0,01; 10]$.

Розв'язання. Область визначення функції $D_y = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Знаходимо критичні точки функції:

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

Заданий проміжок $[0,01; 10]$ містить лише одну критичну точку $x_2 = 1$. Обчислюємо значення функції на кінцях проміжку та в точці x_2 :

$$y(0,01) = 0,01 + 100 = 100,01; \quad y(1) = 2; \quad y(10) = 10 + 0,1 = 10,1.$$

$$\text{Отже, } \inf_{[0,01; 10]} y(x) = y(1) = 2; \quad \sup_{[0,01; 10]} y(x) = y(0,01) = 100,01.$$

6.4. Опуклість та увігнутість графіка функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на (a, b) . Тоді в кожній точці проміжку (a, b) існує дотична до її графіка функції, і ця дотична не паралельна до осі Oy , оскільки похідна $y'(x)$, $x \in (a, b)$ — скінченна.

Означення 36. Назвемо графік функції $y = f(x)$ опуклим на (a, b) , якщо він розташований нижче будь-якої дотичної до нього (рис. 15).

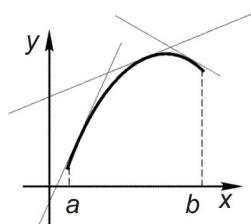


Рис. 15

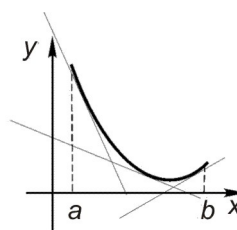


Рис. 16

Означення 37. Назвемо графік функції $y = f(x)$ увігнутим на (a, b) , якщо він розташований вище будь-якої дотичної до нього (рис. 16).

Теорема 12 (Ознака опуклості, увігнутості графіка). Якщо функція $y = f(x)$ має на (a, b) другу похідну і $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) \geq 0$), то графік функції $y = f(x)$ опуклий (увігнутий).

Це правило досить просто запам'ятовується, рис. 17.



Рис. 17 . Знак y'' та опуклість, увігнутість графіка y .

Означення 38. Точку $M(x_0, f(x_0))$, в якій графік функції $y = f(x)$ має дотичну і в якій відбувається зміна напрямку опуклості графіка, називають точкою перегину графіка.

Якщо точка x_0 є точкою перегину графіка функції $y = f(x)$, то в точці x_0 друга похідна функції або дорівнює нулю, або не існує. В околі точки перегину по різні боки від неї графік функції знаходиться по різні боки від дотичної (рис. 18).

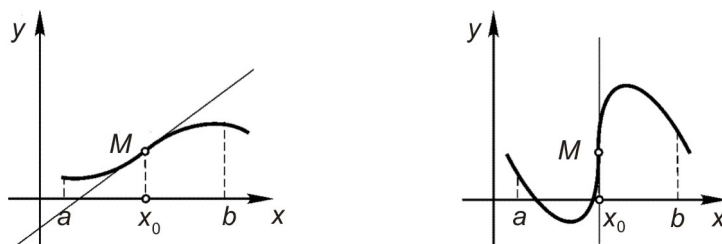


Рис.18

Якщо під час переходу через точку x_0 друга похідна змінює знак, то x_0 — точка перегину.

Приклад 1. Знайти точки перегину графіка функції $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$.

Розв'язання. Знаходимо другу похідну функції: $y'' = 6x - 12$. Знаходимо точки, в яких друга похідна дорівнює нулю або не існує. Для заданої функції такою є точка $x = 2$: $y''(2) = 0$. Очевидно, що $y''(x)$ під час переходу через цю точку змінює знак. Отже, графік функції зазнає перегину в точці $x = 2$.

Приклад 2. Знайти точки перегину графіка функції $y = \sqrt[3]{1-x}$.

Розв'язання. Знаходимо другу похідну заданої функції:

$$y = \sqrt[3]{1-x}, \quad y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}, \quad y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(1-x)^5}}.$$

Як бачимо, друга похідна в нуль ніде не обертається, але в точці $x = 1$ вона не існує. Неважко бачити, що $y''(x) < 0$, коли $x < 1$, і $y''(x) > 0$, коли $x > 1$. Тобто $x = 1$ — точка перегину графіка заданої функції.

6.5. Асимптоти графіка функції

Асимптотою кривої $y = f(x)$, що має нескінченну гілку, називають таку пряму, що відстань точки $M(x, f(x))$ кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка M рухається вздовж гілки кривої до нескінченності. Асимптоти бувають *вертикальні* та *похилі*.

Означення 39. Пряма $x = a$ називається вертикальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$, якщо хоча б одна із односторонніх границь $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ або $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ дорівнює $-\infty$ або $+\infty$.

Приклад 1. Як приклад функції, що має вертикальну асимптоту, розглянемо функцію $y = e^{\frac{1}{x}}$. Вона не визначена в точці $x = 0$. Знаходимо, що $\lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{x}} = 0$, а $\lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$. Тобто пряма $x = 0$ (вісь Oy) є вертикальною асимптотою її графіка. Графік функції $y = e^{\frac{1}{x}}$ зображено на рис. 19. Коли $x \rightarrow +0$, точка $(x, e^{\frac{1}{x}})$ графіка рухається вздовж правої гілки кривої у безмежність і при цьому відстань точки кривої до прямої $x = 0$ прямує до нуля.

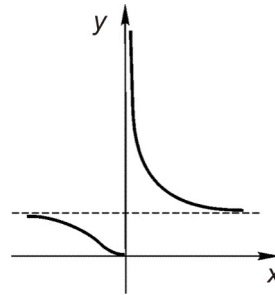


Рис. 19

Означення 40. Пряма $y = kx + b$ називається похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$, якщо

$$f(x) - (kx + b) \rightarrow 0, \text{ коли } x \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow -\infty). \quad (6.5.1)$$

З означення похилої асимптоти випливає, що пряма $y = kx + b$ буде асимптотою графіка функції $y = f(x)$ тоді і тільки тоді, коли існують скінченні границі:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad (6.5.2)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx). \quad (6.5.3)$$

Відшуковуючи величини k і b , треба окремо розглянути випадки, коли $x \rightarrow +\infty$ і коли $x \rightarrow -\infty$. Якщо хоча б одна із границь (6.5.2) або (6.5.3) при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) не існує або нескінченна, то графік функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) похилих асимптот не має.

Приклад 2. Знайдемо асимптоти графіка функції $y = x \operatorname{arctg} x$. Функція є неперервною, тому її графік вертикальних асимптот не має. Шукаємо похилі асимптоти. Розглянемо спочатку границі (6.5.2) і (6.5.3) при $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{x} = \frac{\pi}{2}, \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{1+x^2}} = -1. \end{aligned}$$

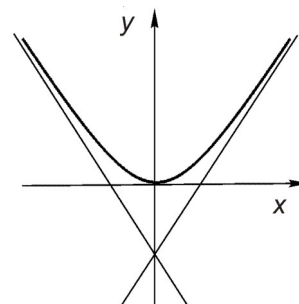


Рис. 20

Отже, ми встановили, що крива $y = x \operatorname{arctg} x$ при $x \rightarrow +\infty$ має асимптоту

$$y = \frac{\pi}{2}x - 1.$$

Перевіряємо наявність асимптот при $x \rightarrow -\infty$. Знаходимо

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{x} = -\frac{\pi}{2},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}x) = -1.$$

Тобто графік функції $y = x \operatorname{arctg} x$ при $x \rightarrow -\infty$ має асимптоту $y = -\frac{\pi}{2} - 1$. Графік функції та його асимптоти зображені на рис. 20.

Окремий випадок похилої асимптоти — це *горизонтальні* асимптоти, тобто асимптоти, що паралельні осі Ox .

Якщо виявилось, що границя $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ і при цьому існує скінченна границя $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, то пряма $y = b$ — горизонтальна асимптота графіка функції $y = f(x)$.

Якщо функція $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$ має скінченну границю $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, то звідси вже випливає, що $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ і що $y = b$ — горизонтальна асимптота.

П р и к л а д 3. Очевидно, що функція $y = \operatorname{arctg} x$ при $x \rightarrow \infty$ має скінченні границі

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Звідси робимо висновок, що пряма $y = \frac{\pi}{2}$ є асимптотою графіка функції при $x \rightarrow +\infty$, а при $x \rightarrow -\infty$ асимптотою графіка функції є пряма $y = -\frac{\pi}{2}$.

П р и к л а д 4. Неважко бачити, що функція $y = e^{\frac{1}{x}}$ (див. приклад 1 цього параграфа) має при $x \rightarrow \infty$ асимптоту $y = 1$, оскільки $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$. Графік функції $y = e^{\frac{1}{x}}$ зображено на рис. 19.

6.6. Схема побудови графіка функції

Для побудови графіка функції можна рекомендувати таку схему дослідження функції:

1. Вказати область визначення функції (її природну область існування).
2. Визначити, чи є функція парною або непарною.
3. Визначити, чи є функція періодичною.
4. Дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву, якщо такі є, і вказати їх характер.
5. Знайти проміжки монотонності та екстремуми функції.
6. Визначити проміжки опуклості та увігнутості графіка функції, знайти точки перегину.
7. Знайти асимптоти графіка функції.
8. Звести усі дані до таблиці і побудувати ескіз графіка.

Приклад 1. Побудувати графік функції $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

Розв'язання.

1. Область визначення функції $D_y = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.
2. Функція ні парна, ні непарна.
3. Функція неперіодична.
4. Функція неперервна на кожному з проміжків $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$. Точка $x = 1$ — точка розриву другого роду: $\lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} y = +\infty$.
5. Визначаємо інтервали монотонності. Знаходимо похідну:

$$y' = \frac{(2x - 2)(x - 1) - (x^2 - 2x + 2)}{(x - 1)^2} = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}.$$

Стаціонарні точки функції $x = 0$, $x = 2$.

На проміжку $(-\infty, 0)$ $y' > 0$ — функція зростає, при $x \in (0; 1)$ $y' < 0$ — функція спадає. На проміжку $(1; 2)$ $y' < 0$ — функція спадає, і на проміжку $(2, +\infty)$ $y' > 0$ — функція зростає. Точка $x = 0$ — точка максимуму, $x = 2$ — точка мінімуму.

6. Знаходимо другу похідну:

$$y'' = \frac{((x - 2) + x)(x - 1)^2 - x(x - 2)2(x - 1)}{(x - 1)^4} = \frac{2}{(x - 1)^3}.$$

Якщо $x < 1$, то $y''(x) < 0$, тобто при $x < 1$ графік функції опуклий. При $x > 1$ графік увігнутий, оскільки при $x > 1$ $y''(x) > 0$. Точок перегину графік не має: хоча по різні боки від точки $x = 1$ графік має різні напрями опуклості, але в точці $x = 1$ графік дотичної не має — ця точка є точкою розриву.

7. Графік функції має вертикальну асимптоту $x = 1$, оскільки в цій точці функція має нескінченні односторонні границі (див. пункт 4). Перевіряємо наявність похилих асимптот, знаходимо границі:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x(x - 1)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 2}{x - 1} = -1.$$

Отже, графік має при $x \rightarrow +\infty$ асимптоту $y = x - 1$.

Неважко бачити, що

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = -1,$$

тобто пряма $y = x - 1$ є асимптотою графіка і при $x \rightarrow -\infty$.

8. Зводимо отримані результати дослідження у таблицю і будуємо графік.

x		0		1		2		— характерні точки;
y		-2		$\nexists$		2		— значення функції, $\nexists$ — не існує;
y'	+	0	-	$\nexists$	-	0	+	— знак похідної;
y''	-	-	-	$\nexists$	+	+	+	— знак другої похідної;
	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$	$\nearrow$ — зростає, $\searrow$ — спадає;
	$\frown$	$\frown$	$\frown$		$\smile$	$\smile$	$\smile$	$\frown$ — опуклий, $\smile$ — увігнутий.

Графік функції та його асимптоти зображені на рис. 21.

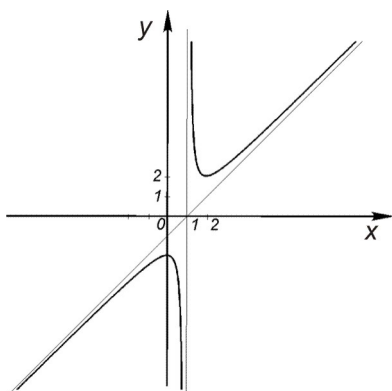


Рис. 21

6.7. Диференціювання в Maple

6.7.1. Відшукування похідних

Обчислення похідних виразу `expr` за змінною `x` здійснюється командами `diff(expr,x)` або `Diff(expr,x)`.

Перейдемо до розгляду прикладів.

Приклад 1.

```
> restart;
```

Знайдемо похідну від деякого виразу, скажімо, $x^3 + \ln x$:

```
> y:=x^3+ln(x); yd:=diff(y,x);
```

$$y := x^3 + \ln(x)$$

$$yd := 3x^2 + \frac{1}{x}$$

Задамо тепер функцію $f(x) = x^3 + \ln x$:

```
> f:=x->x^3+ln(x);
```

$$f := x \mapsto x^3 + \ln(x)$$

Знайдемо похідну функції $f(x)$:

```
> Diff(f(x),x)=diff(f(x),x);
```

$$\frac{d}{dx} (x^3 + \ln(x)) = 3x^2 + \frac{1}{x}$$

Знайдемо похідну, наприклад, 4-го порядку функції $f(x)$:

```
> Diff(f(x),x$4)=diff(f(x),x$4);
```

$$\frac{d^4}{dx^4} (x^3 + \ln(x)) = -\frac{6}{x^4}$$

Для відшукування похідної *функції* (а не виразу) застосовується також диференціальний оператор `D`, і результатом дії оператора буде також функція. Знайдемо похідну визначеної вище функції $f(x)$:

```
> fd:=D(f);
```

$$fd := x \mapsto 3 \cdot x^2 + \frac{1}{x}$$

Для відшукування похідних вищих порядків функції однієї змінної застосовується оператор `D@@n`, де `n` — порядок похідної. Приклад:

```
> fd4:=(D@@4)(f);
```

$$fd4 := x \mapsto \frac{-6}{x^4}$$

6.7.2. Похідна параметрично заданої функції

Якщо функція y змінної x задана параметрично

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

то похідну y'_x знаходять за правилом

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Цим же правилом користуються при обчисленні похідних вищих порядків:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(y'_t)'_t}{x'_t}.$$

П р и к л а д 2.

```
> restart;
> y_x:=diff(y(t),t)/diff(x(t),t)
```

$$y_x := \frac{\frac{d}{dt}y(t)}{\frac{d}{dt}x(t)}$$

```
> y_xx:=diff(y_x,t)/diff(x(t),t);
```

$$y_xx := \frac{\frac{\frac{d^2}{dt^2}y(t)}{\frac{d}{dt}x(t)} - \frac{\left(\frac{d}{dt}y(t)\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right)}{\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2}}{\frac{d}{dt}x(t)}$$

Знайдемо похідні першого та другого порядку функції

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t. \end{cases}$$

```
> x:=t->R*cos(t);y:=t->R*sin(t);
```

$$\begin{aligned} x &:= t \mapsto R \cdot \cos(t) \\ y &:= t \mapsto R \cdot \sin(t) \end{aligned}$$

```
> y_x;
```

$$-\frac{\cos(t)}{\sin(t)}$$

```
> y_xx;
```

$$-\frac{1 + \frac{\cos(t)^2}{\sin(t)^2}}{R \sin(t)}$$

```
> simplify(%);
```

$$-\frac{1}{R \sin(t)^3}$$

6.7.3. Похідна функції, заданої неявно

Похідна функції $y(x)$, заданої рівнянням $f(x, y) = 0$, обчислюється функцією `implicitdiff(f, y, x)`.

Приклад 3. Знайти похідну функції $y(x)$, заданої рівнянням $x^2 + y^2 = R^2$.

Розв'язання.

```
> restart ;
```

```
> f:=x^2+y^2=R^2;
```

$$f := x^2 + y^2 = R^2$$

```
> y_x:=implicitdiff(f,y,x);;
```

$$y_x := -\frac{x}{y}$$

6.7.4. Похідна степенево-показникового виразу

Відшукування похідної степенево-показникового виразу $u(x)^{v(x)}$ в Maple не потребує попереднього логарифмування виразу і здійснюється за загальним правилом:

```
> diff(u(x)^v(x),x);
```

$$u(x)^{v(x)} \left(\left(\frac{d}{dx} v(x) \right) \ln(u(x)) + v(x) \frac{\left(\frac{d}{dx} u(x) \right)}{u(x)} \right)$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = x^{\sin x}$.

Розв'язання.

```
> diff(x^sin(x),x);
```

$$x^{\sin(x)} \left(\cos(x) \ln(x) + \frac{\sin(x)}{x} \right)$$

6.8. Дослідження функції в Maple

6.8.1. Інтервали монотонності

Умовою монотонності функції є збереження знаку її першої похідної (див. Теорему 6, с. 70).

Приклад 1. Знайти інтервали монотонності функції $y = \frac{x}{1+x^2}$.

Розв'язання. Задамо функцію

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2},$$

і розв'яжемо нерівність $f'(x) > 0$.

```
> restart;
```

```
> f:=x-> x/(1+x^2);
```

$$f := x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$$

> fd:=D(f);

$$fd := x \mapsto \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$$

> solve(fd(x)>0);

$$(-1, 1)$$

Оскільки функція визначена на всій числовій осі, робимо висновок;
на проміжку $(-\infty, -1)$ функція спадає;
на проміжку $(-1, 1)$ функція зростає;
на проміжку $(1, \infty)$ функція спадає.

За докладнішим аналізом звернемося до «репетитора»²:

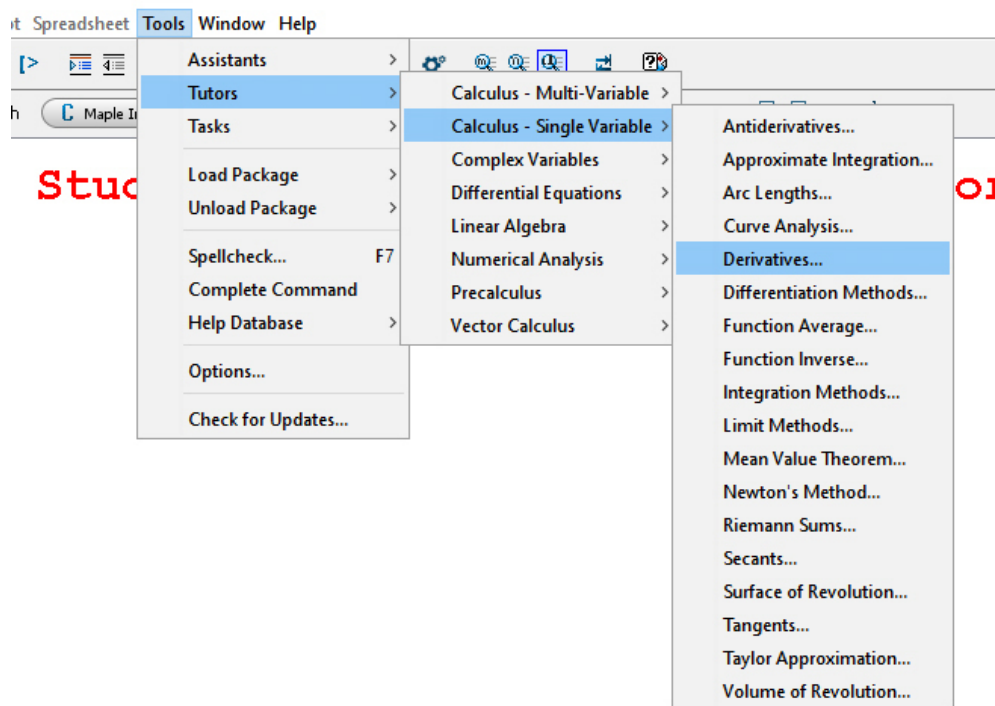


Рис. 22

Відкривається вікно:

²Tutor — репетитор.

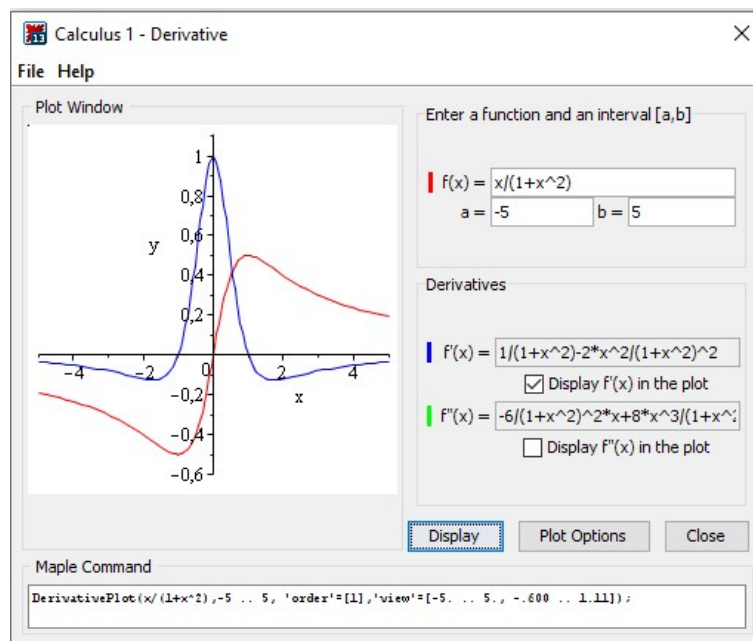


Рис. 23

Задаємо «репетитору» функцію та проміжок дослідження, і він знаходить першу та другу похідні заданої функції і будує графік функції і, за бажанням користувача, графіки похідних. У які віконця вводити дані, видно з рис. 23: це віконце « $f(x)=$ » та віконця « $a=$ » і « $b=$ ». Після введення даних треба натиснути «Display» (на рис. 23 віконце, обведене синьою рамкою). Після закриття вікна «репетитора» графік поміщається в робочий листок.

> Student[Calculus1][DerivativeTutor]();

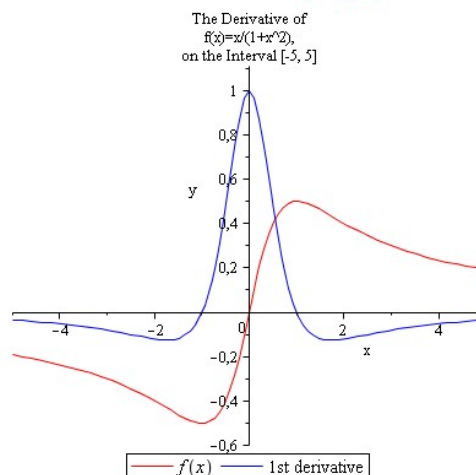


Рис. 24

З графіків рис. 24 робимо висновок, що $f'(x) < 0$ при $-\infty < x < -1$ — функція спадає, $f'(x) > 0$ при $-1 < x < 1$ — функція зростає, $f'(x) < 0$ при $1 < x < \infty$ — функція спадає.

6.8.2. Локальні екстремуми

В Maple для дослідження функції на екстремум є функція `extrema(expr, constraints, vars, 's')`, де `expr` — алгебраїчний вираз, що досліджується,

constraints — обмеження, у разі відсутності обмежень вказують `{}`,

vars — змінна чи множина змінних,

's' — ім'я змінної, де будуть збережені результати дослідження.

Функція **extrema** знаходить стаціонарні точки алгебраїчного виразу **expr** і обчислює його значення в цих точках.

Приклад:

```
> extrema(abs(x^2-1), {}, x, 's');
```

1

```
> s;
```

$\{\{x = 0\}\}$

Покажемо, як можна знайти критичні точки функції.

П р и к л а д 2. Знайти екстремуми функції $f(x) = |x^2 - 1|$.

Р о з в ' я з а н н я.

```
> restart;
```

Задаємо функцію:

```
> f:=x->abs(x^2-1);
```

$f := x \mapsto |x^2 - 1|$

Знаходимо стаціонарні точки функції:

```
> fd:=D(f):solve(fd(x)=0)
```

0

Досліджуємо першу похідну на неперервність:

```
> iscont(fd(x), x=-infinity..infinity);
```

false

Знаходимо точки, в яких перша похідна не існує:

```
> discont(fd(x), x);
```

$\{-1, 1\}$

Знаходимо односторонні границі першої похідної в цих точках:

```
> limit(fd(x), x=-1, left);
```

-2

```
> limit(fd(x), x=-1, right);
```

2

```
> limit(fd(x), x=1, left);
```

-2

```
> limit(fd(x), x=1, right);
```

2

Знаходимо другу похідну і обчислюємо її значення в стаціонарній точці $x = 0$:

```
> fdd:=D(fd):fdd(0);
```

-2

Маємо такі висновки: критичними точками функції $f(x)$ є $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$. В точці $x = -1$ $f'(x)$ не існує. При переході цієї точки $f'(x)$ змінює знак з «-» на «+». Точка $x = -1$ є точкою мінімуму функції $f(x)$. В точці $x = 0$ виконуються умови: $f'(0) = 0$, $f''(0) < 0$. Точка $x = 0$ є точкою максимуму функції $f(x)$. І, нарешті, знаходимо, що точка $x = 1$ є точкою мінімуму: $f'(1)$ не існує, при переході цієї точки $f'(x)$ змінює знак з «-» на «+».

Зауважимо, що критичні точки і точки екстремуму можна знайти функціями **CriticalPoints** і **ExtremePoints** пакету **Student[Calculus1]**.

6.8.3. Найбільше та найменше значення неперервної функції на відрізку

Функції **maximize(expr,x=a..b,location)** та **minimize(f(x),x=a..b,location)** здійснюють пошук найбільшого та найменшого значень функції **expr** на відрізку $[a, b]$, необов'язковий параметр **location** дозволяє вивести інформацію про розташування точок, де це найбільше (найменше) значення досягається.

Приклад 3. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = |x^2 - 1|$ на відрізку $[-2, 2]$.

Розв'язання.

```
> restart;
```

```
> f:=x->abs(x^2-1);
```

$f := x \mapsto |x^2 - 1|$

```
> f(x);
```

$|x^2 - 1|$

```
> maximize(f(x),x=-2..2,location);
```

$3, \{ \{x = -2\}, 3 \}, \{ \{x = 2\}, 3 \}$

```
> minimize(f(x),x=-2..2,location);
```

$0, \{ \{x = -1\}, 0 \}, \{ \{x = 1\}, 0 \}$

Знайдемо найбільше значення функції на відрізку $[-1, 1]$:

```
> maximize(f(x),x=-1..1,location);
```

$1, \{ \{x = 0\}, 1 \}$

6.8.4. Опуклість та увігнутість графіка функції

Проміжки опуклості (увігнутості) графіка функції можна знайти як розв'язки нерівності $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$). Точки перегину графіка функції знаходимо як точки, при переході яких $f''(x)$ змінює знак.

Точки перегину графіка функції можна знайти також за допомогою функції `InflectionPoints` пакету `Calculus1`.

Приклад 4. Знайти проміжки увігнутості та опуклості та точки перегину графіка функції $y = |x^2 - 1|$.

Розв'язання.

```
> restart;  
> f:=x->abs(x^2-1);
```

$$f := x \mapsto |x^2 - 1|$$

```
> fd:=D(f):fdd:=D(fd):  
> solve(fdd(x)>0);
```

$$(-\infty, -1), (1, \infty)$$

З отриманих результатів маємо такі висновки: на кожному з проміжків $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ графік функції увігнутий, на проміжку $(-1, 1)$ графік функції опуклий. Точками перегину є точки $(-1, 0)$ і $(1, 0)$.

Знайдемо точки перегину функцією `InflectionPoints`:

```
> with(Student[Calculus1]):InflectionPoints(f(x));
```

$$[-1, 1]$$

Відповідь отримана у вигляді списку, у якому перелічені абсциси точок перегину. Напрям опуклості доведеться визначати додатково.

6.8.5. Асимптоти графіка функції

Пошук асимптот графіка функції здійснюється функцією `Asymptotes` з пакету `Student[Calculus1]`.

Покажемо кілька розглянутих вище (див. с. 75) прикладів:

```
> with(Student[Calculus1]);  
> Asymptotes(x*arctan(x),x);
```

$$\left[y = -\frac{\pi x}{2} - 1, y = \frac{\pi x}{2} - 1 \right]$$

```
> Asymptotes(exp(1/x),x);
```

$$[y = 1, x = 0]$$

6.8.6. Аналіз графіка функції

Вважаємо за необхідне звернути увагу читача на функцію `Student[Calculus1][CurveAnalysisTutor]()` — аналіз графіка функції. Викликати її можна або через головне меню

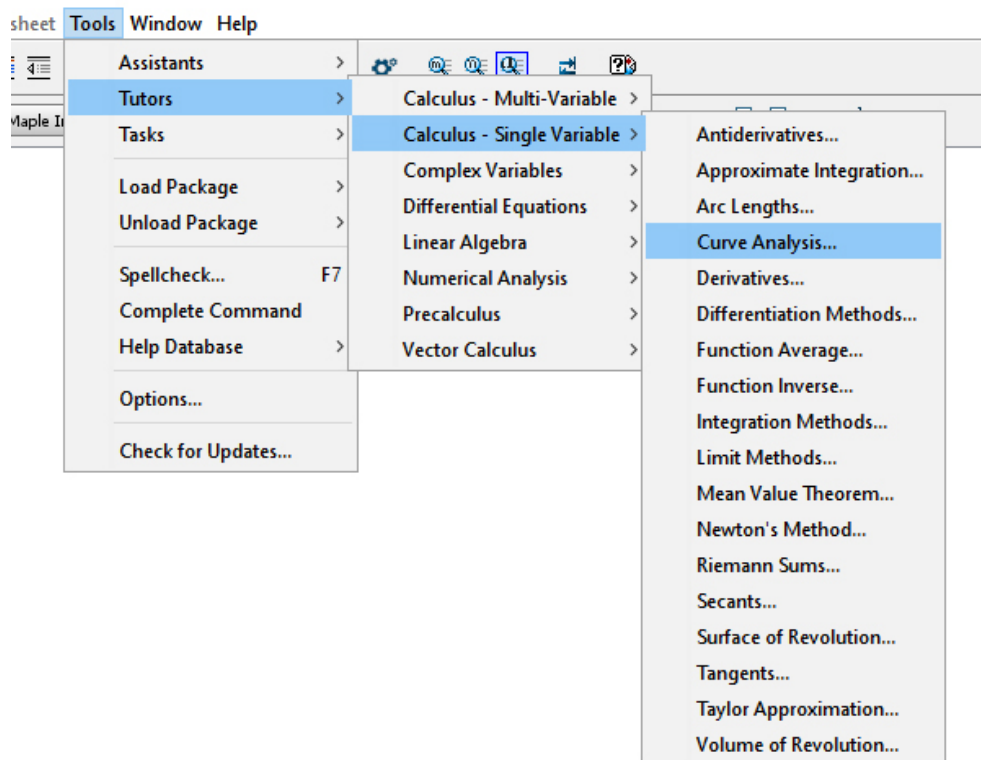


Рис. 25

або командою `Student[Calculus1][CurveAnalysisTutor]()` в програмі Maple. Після виконання цієї команди з'явиться вікно, в якому треба буде ввести функцію і проміжок дослідження. Функцію і проміжок можна вказати в команді. Наприклад:

`> Student[Calculus1][CurveAnalysisTutor](abs(x^2-1), -2..2);`

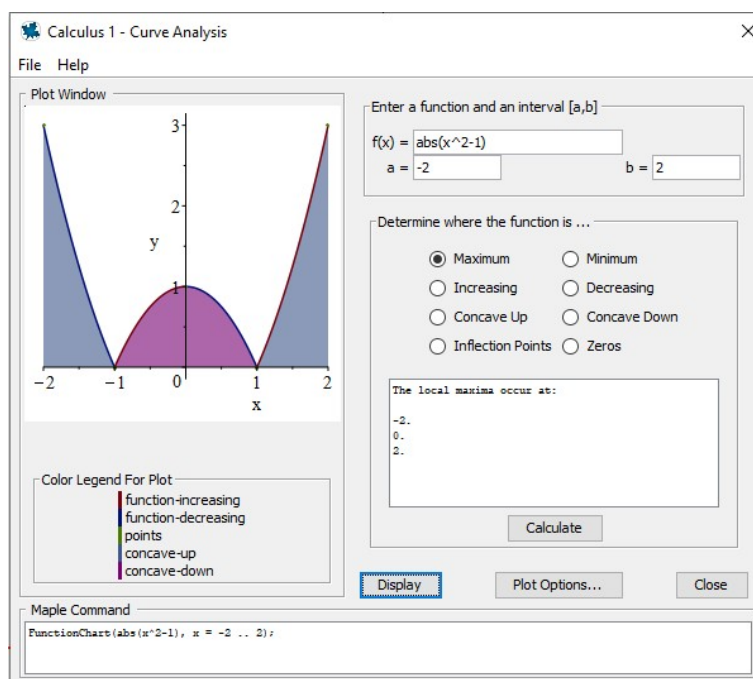


Рис. 26 Maplet-вікно Curve Analysis

Ліва частина вікна містить графік досліджуваної функції. Підграфік функції на проміжках увігнутості та опуклості заливаний різними кольорами. У правій частині вікна

розташована інформація про досліджувану функцію та проміжок дослідження. Нижче інформації про проміжок розташована таблиця 4×2 позицій активації дослідження властивостей функції. Кожна властивість може бути досліджена за вибором користувача. Нижче таблиці розташоване віконце, у якому після натискання кнопки «Calculate» з'являються результати дослідження.

Звертаємо увагу, на рис. 26 показані результати дослідження функції $f(x)$ на максимум на відрізку $[-2, 2]$. Як точки локального максимуму вказані абсциси точок -2 , 0 та 2 . Тобто серед точок локального екстремуму Maple вказує і точки так званого кінцевого екстремуму³.

Після натискання кнопки «Close» вікно маплета закривається і в робочий листок поміщається графік досліджуваної функції. Результати досліджень при цьому не зберігаються.

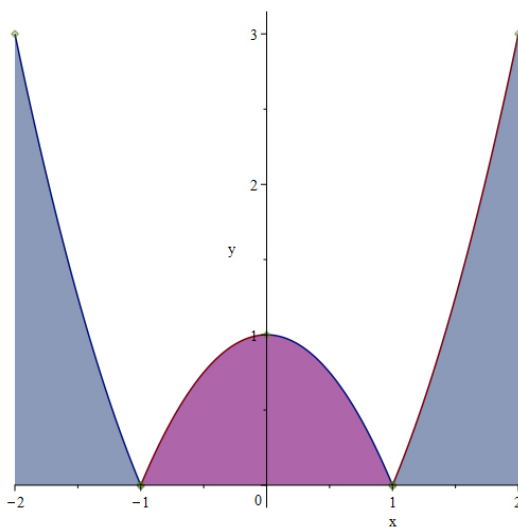


Рис. 27

6.8.7. Побудова графіка функції

Явне задання функції

Побудова графіка функції в Maple здійснюється функцією `plot(f, x=x0..x1, opt)`, де **f** — вираз від незалежної змінної **x**, **x** — незалежна змінна, **x0**, **x1** — лівий та правий кінці проміжку, на якому будується графік, **opt** — необов'язкові параметри, що визначають тип графіка (вид координатних осей, колір і товщину ліній, текстові пояснення на графіку тощо).

П р и к л а д 5. Побудувати графік функції $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Р о з в ' я з а н н я.

```
> plot(sin(x)/x, x=-10..10);
```

³Означення кінцевого екстремуму див., наприклад, в [?], с. 229.

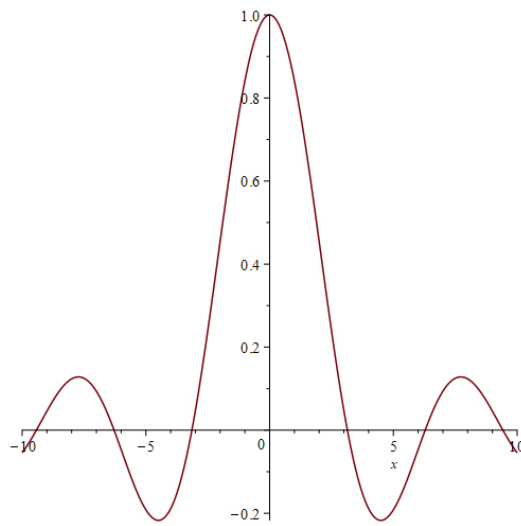


Рис. 28

Приклад 6. Побудувати на одній координатній площині графіки функцій $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$.

Розв'язання.

`> plot([1,x,x^2],x=-2..2);;`

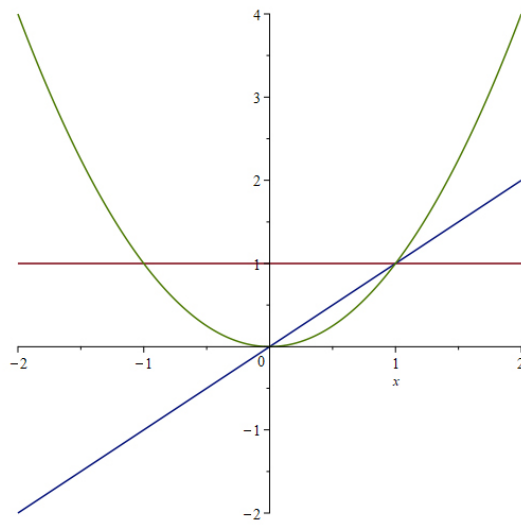


Рис. 29

Параметричне задання функції

Приклад 7. Побудувати графік параметрично заданої функції $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$

Розв'язання.

```
> plot([cos(t)^3, sin(t)^3, t=0..2*Pi], x=-1..1);
```

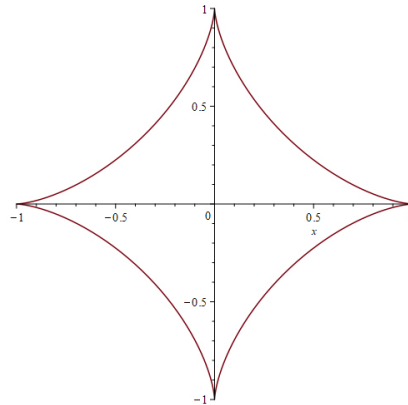


Рис. 30

Приклад 8. Побудувати на одній координатній площині графіки параметрично заданих функцій $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ та $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$.

Розв'язання.

```
> plot([2*cos(t), sin(t), t = 0 .. 2*Pi], [cos(t), sin(t), t = 0 .. 2*Pi]),  
color = [blue, green], scaling=constrained);
```

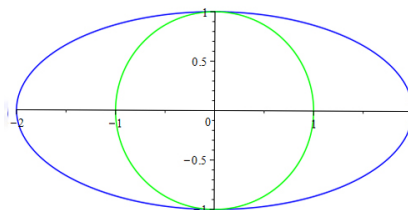


Рис. 31

Параметр `scaling=constrained` команди `plot` задає однакові масштаби по координатним осям графіка. Без задання цього параметра у цьому прикладі Maple зображує еліпс як круг радіуса 2:

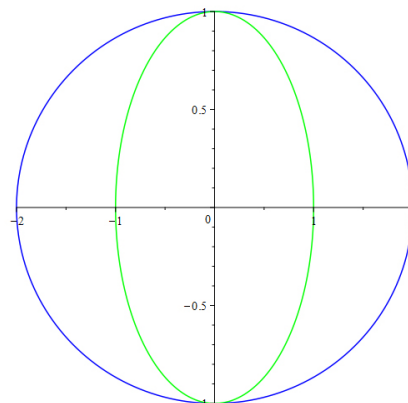


Рис. 32

Побудова ліній в полярній системі координат

Найбільш важливою після прямокутної системи координат є полярна система координат. Вона складається з деякої точки O , яка називається *полюсом*, і *полярної осі* — променя OE , що виходить з полюса. Окрім того задається одиниця масштабу для вимірювання відстані.

Нехай M — довільна точка площини. Відстань точки M до точки O позначимо через ρ , кут, на який треба повернути вісь OE , щоб вона пройшла через точку M , позначимо через φ (рис. 33).

Полярними координатами точки M називаються числа ρ і φ . При цьому число ρ вважається першою координатою і називається *полярним радіусом*, число φ — другою координатою і називається *полярним кутом*.

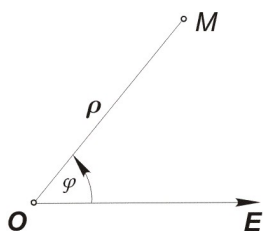


Рис. 33

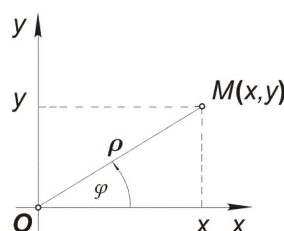


Рис. 34

Точка з полярними координатами ρ і φ позначається так: $M(\rho, \varphi)$. Очевидно, що полярний радіус може набувати будь-яких невід'ємних значень; $0 \leq \rho < \infty$. Зазвичай вважається, що полярний кут змінюється в межах $0 \leq \varphi < 2\pi$. Але у деяких випадках доводиться розглядати кути, більші 2π , а також від'ємні кути, тобто кути що відліковуються від полярної осі за годинниковою стрілкою.

Встановимо зв'язок між полярними координатами точки M та її прямокутними координатами. При цьому вважатимемо, що полюс знаходиться на початку прямокутної системи координат, а полярна вісь — це додатна піввісь абсцис. Тоді зв'язок між прямокутними координатами точки $M(x, y)$ та її полярними координатами (рис. 34) має вигляд:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Виразимо полярні координати точки M через її прямокутні координати:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Для побудови кривої $\rho(\varphi)$ необхідно визначити межі зміни параметра φ . Їх знаходять як розв'язки нерівності $\rho(\varphi) \geq 0$.

Приклад 9. Побудувати криву, задану в полярній системі координат рівнянням $\rho = 1 + \cos \varphi$.

Розв'язання. Знаходимо межі зміни φ . Очевидно, що в даному прикладі $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Будуємо криву:

```
> plot([1+cos(t),t,t=0..2*Pi],coords=polar);
```

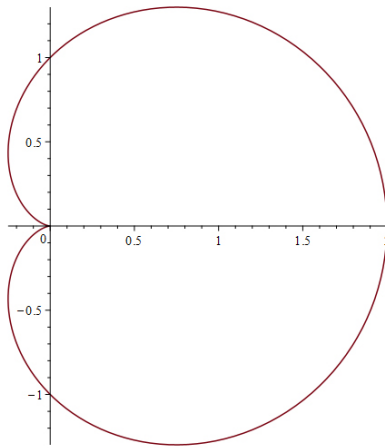


Рис. 35

Зуваження. При побудові кривих в полярній системі координат Maple не відслідковує невід'ємність полярного радіуса. Графік кривої $\rho = \rho(\varphi)$ в полярній системі координат Maple буде як криву, задану в параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = \rho(t) \cos t, \\ y = \rho(t) \sin t. \end{cases}$$

Наприклад:

```
> plot([cos(2*t),t,t=0..2*Pi],coords=polar);
```

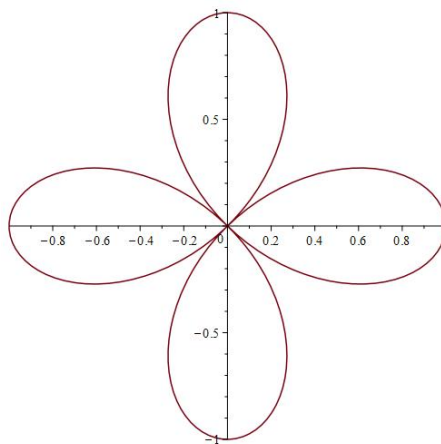


Рис. 36

```
> plot([cos(2*t)*cos(t),cos(2*t)*sin(t),t=0..2*Pi],color=green);
```

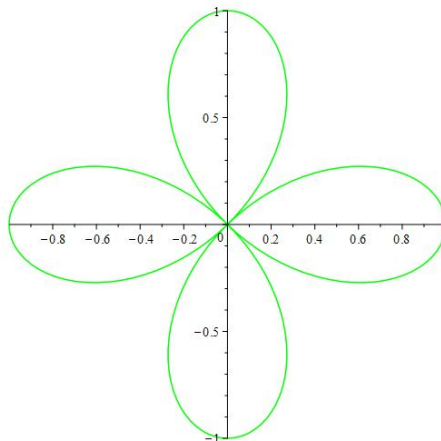


Рис. 37

З урахуванням нерівності $\rho(t) = \cos 2t \geq 0$ маємо таку лінію:

```
> plot([[cos(2*t),t,t=-Pi/4..Pi/4],[cos(2*t),t,t=3*Pi/4..5*Pi/4]],
        coords=polar,scaling=constrained,color=black);
```

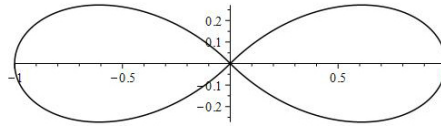


Рис. 38

Неявне задання функції

Приклад 10. Побудувати графік функції, заданої рівнянням $4x^2 + 2xy + y^2 = 4$.

Розв'язання. Маємо випадок неявного задання функції. Графік неявної функції будується функцією `implicitplot(expr, x=a..b, y=c(x)..d(x), options)` з пакету `plots`. Підключаємо пакет і будуємо графік:

```
> with(plots);
> implicitplot(4*x^2+2*x*y+y^2=4,x=-2..2,y=-3..3,scaling=constrained);
```

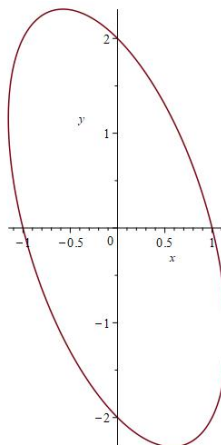


Рис. 39

Приклад 11. Побудувати гіперболу

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

та її асимптоти.

Розв'язання. Асимптотами заданої гіперболи є прямі $y = \pm \frac{3}{4}x$. Будуємо три лінії на одному графіку:

```
> implicitplot([y=3*x/4,y=-3*x/4,x^2/16-y^2/9=1],x=-20..20,y=-15..15,
        scaling=constrained);
```

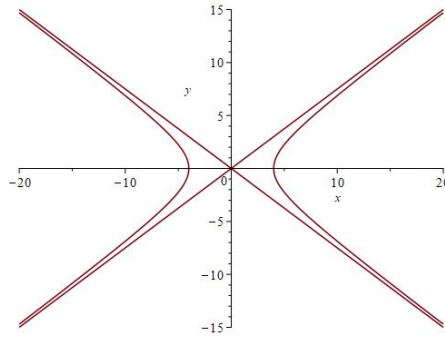


Рис. 40

Завдання до розділу

Визначити інтервали монотонності та точки екстремуму функції:

1. $f(x) = x^2 \sqrt[3]{6x - 7}$.

2. $f(x) = \frac{(x - 1)^3}{(x - 2)^2}$.

3. $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{6}{x^3}$.

4. $f(x) = \frac{x^3}{(2 - x)^2}$.

Визначити напрям опуклості графіка функції та знайти точки перегину:

5. $f(x) = (x - 3)(x - 5)^2$.

6. $f(x) = e^{2x - x^2}$.

7. $f(x) = 3x^4 + 6x^2$.

8. $f(x) = (x + 1)e^x$.

Знайти найбільше та найменше значення функції на вказаному проміжку:

9. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, $x \in [2; 4]$.

10. $f(x) = 4\sqrt{x} - x - 5$, $x \in [0; 9]$.

11. $f(x) = 10 - 2x^2 - \frac{108}{x}$, $x \in [1; 5]$.

12. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4x + 9}$, $x \in [0; 4]$.

Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

13. $y = \frac{x}{x^2 - 4}$.

14. $y = \frac{x^4}{4} + x^3$.

15. $y = \frac{2x^2}{x + 1}$.

16. $y = xe^{-x}$.

Тема 7

Невизначений інтеграл

7.1. Первісна

Означення 41. Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо

$$F'(x) = f(x)$$

для всіх x із цього проміжку.

Приклад 1. Функція $F(x) = \sin x$ є первісною функції $f(x) = \cos x$, оскільки $(\sin x)' = \cos x$.

Приклад 2. Функція $F(x) = \operatorname{arctg} x$ є первісною функції $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, оскільки $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

За наслідками із теореми Лагранжа маємо:

1. Якщо функція $F(x)$ має похідну, рівну нулю, $F'(x) = 0$, то $F(x) = C = \text{const}$;
2. Якщо $F(x)$ і $\Phi(x)$ — різні первісні функції $f(x)$, то $F(x) - \Phi(x) = C$, тобто дві різні первісні однієї функції відрізняються на сталу величину.

7.2. Невизначений інтеграл

Нехай $F(x)$ — яка-небудь первісна функції $f(x)$, тоді множина функцій $F(x) + C$, де C — довільна стала, являє собою сукупність усіх первісних функції $f(x)$.

Означення 42. Сукупність первісних функції $f(x)$ називають невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ і позначають символом $\int f(x)dx$.

У виразі $\int f(x)dx$ символ « $\int$ » називають знаком інтеграла, функцію $f(x)$ називають підінтегральною функцією, вираз $f(x)dx$ — підінтегральним виразом, змінну x — змінною інтегрування.

Якщо $F(x)$ яка-небудь первісна функції $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де C — довільна стала.

Операцію відшукування первісної $F(x)$ для заданої функції $f(x)$, тобто відшукування функції $F(x)$ за її відомою похідною $F'(x) = f(x)$, називають інтегруванням функції

$f(x)$. Операція інтегрування є оберненою до операції диференціювання. Щоб переконатися, що інтегрування проведено правильно, достатньо взяти похідну від результату інтегрування і отримати підінтегральну функцію.

Приклад 1. Перевірити, що $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

Розв'язання. Візьмемо похідну від функції $\ln|x| + C$. Вона визначена при всіх $x \neq 0$. Якщо $x > 0$, то $\ln|x| = \ln x$ і $(\ln x + C)' = \frac{1}{x}$. При $x < 0$ маємо: $\ln|x| = \ln(-x)$ і $(\ln(-x) + C)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Як бачимо, $(\ln|x| + C)' = \frac{1}{x}$, тобто функція $F(x) = \ln|x|$ є первісною для функції $f(x) = \frac{1}{x}$, а значить, рівність $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ — вірна.

Відповідь на питання, для яких функцій існує первісна, дає така

Теорема 13. Якщо функція неперервна на проміжку (a, b) , то на цьому проміжку для неї існує первісна та невизначений інтеграл.

7.3. Властивості невизначеного інтеграла

Безпосередньо з означення невизначеного інтеграла випливають такі його властивості:

1. Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції; диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, тобто

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x), \quad d \int f(x) dx = f(x) dx.$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої, тобто

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3. Сталий множник можна винести з-під знака інтеграла, тобто якщо $k = \text{const} \neq 0$, то

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx.$$

4. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ мають на деякому проміжку первісні, тоді на цьому проміжку існує первісна функції $f(x) + g(x)$ і

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

7.4. Таблиця інтегралів

Наведені нижче невизначені інтеграли називають табличними інтегралами. Більшість із них отримані на підставі відомої таблиці похідних. У справедливості наведених рівностей досить легко переконатись диференціюванням.

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C.$
4. $\int e^x dx = e^x + C.$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}, \quad a > 0, a \neq 1.$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C.$
9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C.$
10. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C.$
11. $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C.$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C.$
14. $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$

7.5. Основні методи інтегрування

7.5.1. Безпосереднє інтегрування

Під безпосереднім інтегруванням розуміють інтегрування з використанням табличних інтегралів і властивостей невизначеного інтеграла.

П р и к л а д 1. $\int \left(x^2 + 2 \sin x + \frac{5}{x^2+1} - \frac{1}{x} \right) dx = \int x^2 dx + 2 \int \sin x dx + 5 \int \frac{1}{1+x^2} dx - \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} - 2 \cos x + 5 \operatorname{arctg} x - \ln |x| + C.$

П р и к л а д 2. $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = x - \operatorname{arctg} x + C.$

Приклад 3. $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$
 $= \operatorname{tg} x - x + C.$

7.5.2. Метод підстановки

Метод *підстановки*, або метод *заміни змінної*, полягає в тому, що в інтегралі $\int f(x) dx$ покладають $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ — деяка диференційовна функція:

$$\int f(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{array} \right\} = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (7.5.1)$$

Функцію $\varphi(t)$ підбирають так, щоб у результаті заміни отримати інтеграл, який уже можна знайти безпосереднім інтегруванням.

Правомірність такого прийому знаходження первісної обґрунтовується відомою теоремою (див., наприклад, [?], с. 384–385):

Теорема 14. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(t)$ визначені на проміжках X і T відповідно, $\varphi(T) \subset X$, функція $\varphi(t)$ неперервна на T і диференційовна у внутрішніх точках проміжку T . Тоді, якщо функція $f(x)$ має на X первісну $F(x)$, тобто $\int f(x) dx = F(x) + C$, то функція $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ має на T первісну $F(\varphi(t))$, тобто

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C. \quad (7.5.2)$$

Формулу (7.5.2), записану у вигляді (7.5.1), називають формулою *інтегрування заміною змінної*.

Приклад 4. $\int \cos(3x + 1) dx = \left\{ \begin{array}{l} 3x + 1 = t \\ x = \frac{t-1}{3} \\ dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right\} = \int \cos t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \sin t + C =$
 $= \frac{1}{3} \sin(3x + 1) + C.$

Неважко узагальнити результати цього прикладу і подати їх у вигляді твердження:

Твердження 7.5.1. Якщо

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ то } \int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

Формулу (7.5.2), записану у вигляді

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x) dx = dt \end{array} \right\} = \int f(t) dt, \quad (7.5.3)$$

називають формулою *інтегрування підстановкою*. Перетворення частини підінтегрального виразу $\varphi'(x) dx = d(\varphi(x)) = dt$ називають *внесенням під знак диференціала*.

Приклад 5. $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{dx}{x} = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right\} = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C =$
 $= \ln |\ln x| + C.$

П р и к л а д 6. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$. Зокрема, $\int \operatorname{tg}(x) dx =$
 $= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$.

Питання, яку заміну змінних вибрати для спрощення інтеграла, вирішується у кожному випадку окремо. Детальний аналіз прикладів вибору заміни змінних у залежності від типу підінтегральної функції буде проведено нижче.

7.5.3. Інтегрування частинами

Нехай u та v — диференційовні функції. За відомою формулою диференціального числення можемо записати:

$$d(u \cdot v) = v du + u dv.$$

Проінтегруємо цю рівність:

$$\int d(uv) = \int v du + \int u dv.$$

Враховуючи, що $\int d(uv) = uv + C$, отримаємо формулу

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (7.5.4)$$

Формулу (7.5.4) називають формулою *інтегрування частинами*.

Наведемо основні типи інтегралів, які знаходять інтегруванням частинами.

1. Інтеграли виду $\int P_n(x)e^{ax} dx$, $\int P_n(x) \cos ax dx$, $\int P_n(x) \sin bx dx$, **де** $P_n(x)$ — **алгебраїчний многочлен**.

У цьому випадку покладають $u = P_n(x)$, через dv позначають ту частину підінтегрального виразу, що залишилася.

П р и к л а д 7. Знайти $\int x e^x dx$.

Р о з в ' я з а н н я. Покладемо $u = x$, $dv = e^x dx$. Тоді $du = dx$, а $v = \int e^x dx = e^x$. Застосуємо формулу (7.5.4):

$$\int \underbrace{x}_u \underbrace{e^x dx}_{dv} = \underbrace{x}_u \underbrace{e^x}_v - \int \underbrace{e^x}_v \underbrace{dx}_{du} = x e^x - e^x + C.$$

Домовимось надалі записувати вирази для u і dv та вирази для du і v у фігурних дужках між знаками рівності:

$$\int x e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad dv = e^x dx, \\ du = dx, \quad v = e^x. \end{array} \right\} = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

Якщо степінь многочлена $P_n(x)$ вищий одиниці, то формулу інтегрування частинами застосовують повторно.

П р и к л а д 8. Знайти $\int (x^2 + 1) \sin x dx$.

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int (x^2 + 1) \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 + 1, \quad dv = \sin x, \\ du = 2x dx, \quad v = -\cos x. \end{array} \right\} = -(x^2 + 1) \cos x + \int x \cos x dx.$$

Отриманий інтеграл $\int x \cos x \, dx$ має простіший вигляд, ніж заданий інтеграл. Застосовуємо інтегрування частинами ще раз:

$$\int x \cos x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \cos x, \\ du = dx, \quad v = \sin x \end{array} \right\} = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Запишемо остаточний результат:

$$\int (x^2 + 1) \sin x \, dx = -(x^2 + 1) \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C.$$

2. Інтеграли виду $\int P_n(x) \operatorname{arctg} ax \, dx$, $\int P_n(x) \operatorname{arccotg} ax \, dx$, $\int P_n(x) \arcsin ax \, dx$, $\int P_n(x) \arccos ax \, dx$, де $P_n(x)$ — алгебраїчний многочлен.

У цьому випадку за u вибирають обернену тригонометричну функцію.

Приклад 9. Знайти $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{arctg} x \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = x \, dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) \, dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) + C. \end{aligned}$$

3. Інтеграли виду $\int P_n(x) \ln^m x \, dx$, де $P_n(x)$ — алгебраїчний многочлен, $m \in \mathbb{N}$.

У цьому випадку покладають $u = \ln^m x$.

Приклад 10.

$$\int x^2 \ln x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, \quad dv = x^2 \, dx, \\ du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^3}{3}. \end{array} \right\} = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{x} \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

4. Інтеграли виду $\int e^{ax} \cos bx \, dx$, $\int e^{ax} \sin bx \, dx$.

Ці інтеграли беруть двічі частинами, вибираючи щоразу за u функцію одного типу, наприклад, тригонометричну функцію.

Приклад 11. Знайти $\int e^{-x} \cos 2x \, dx$.

Розв'язання.

$$\int e^{-x} \cos 2x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \cos 2x, \quad dv = e^{-x}, \\ du = -2 \sin 2x \, dx, \quad v = -e^{-x} \end{array} \right\} = -\cos 2x e^{-x} - 2 \int \sin 2x e^{-x} \, dx.$$

Інтеграл $\int \sin 2x e^{-x} \, dx$ візьмемо частинами, поклавши $u = \sin 2x$:

$$\int \sin 2x e^{-x} \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \sin 2x, \quad dv = e^{-x}, \\ du = 2 \cos 2x \, dx, \quad v = -e^{-x}. \end{array} \right\} = -\sin 2x e^{-x} + 2 \int \cos 2x e^{-x} \, dx.$$

У такий спосіб ми отримали рівність

$$\int e^{-x} \cos 2x \, dx = -\cos 2x e^{-x} - 2 \left(-\sin 2x e^{-x} + 2 \int \cos 2x e^{-x} \, dx \right).$$

Звертаємо увагу, що інтеграл, який ми шукаємо (позначимо його через $I = \int e^{-x} \cos 2x \, dx$), фігурує в обох частинах отриманої рівності:

$$I = -\cos 2x e^{-x} + 2 \sin 2x e^{-x} - 4I.$$

Звідси знаходимо, що $I = \frac{e^{-x}(-\cos 2x + 2 \sin 2x)}{5}$.

7.6. Основні класи функцій, що інтегруються в квадратурах

Класів функцій, інтеграли від яких виражаються через елементарні функції, відомо порівняно небагато. Розглянемо основні з них.

7.6.1. Інтегрування дробово-раціональних функцій

Розклад раціонального дробу

Дробово-раціональною функцією називають функцію виду

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \quad (7.6.1)$$

де $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ — многочлени (через m і n ми позначили степені многочленів).

Якщо степінь чисельника менший степеня знаменника, тобто $m < n$, то дріб (7.6.1) називають *правильним*, у протилежному випадку — *неправильним*.

Будь-який неправильний дріб можна подати у вигляді суми многочлена і правильного дробу, тобто при $m \geq n$ має місце подання

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = W_{m-n}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_n(x)}, \quad k < n.$$

Многочлени $W_{m-n}(x)$ і $R_k(x)$ можна знайти, виконуючи ділення многочленів (наприклад, за відомим алгоритмом «ділення куточком»).

П р и к л а д 1. Виділити цілу частину дробу $\frac{x^4 + 4x^2 + 2}{x^2 + 1}$.

Р о з в ' я з а н н я. Проведемо ділення многочленів

$$\begin{array}{r} x^4 + 4x^2 + 2 \quad | \quad x^2 + 1 \\ x^4 + + \quad | \quad x^2 + 3 \\ \hline 3x^2 + 2 \\ 3x^2 + 3 \\ \hline -1 \end{array}$$

Ми отримали, що $x^4 + 4x^2 + 2 = (x^2 + 3)(x^2 + 1) - 1$, звідси маємо:

$$\frac{x^4 + 4x^2 + 2}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 3)(x^2 + 1) - 1}{x^2 + 1} = x^2 + 3 - \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Інколи вдається виділити цілу частину дробу, перетворюючи належним чином його чисельник.

П р и к л а д 2. Виділити цілу частину дробу $\frac{x^4 + x}{x^2 + 1}$.

Розв'язання.

$$\frac{x^4 + x}{x^2 + 1} = \frac{x^4 - 1 + 1 + x}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1) + x + 1}{x^2 + 1} = x^2 - 1 + \frac{x + 1}{x^2 + 1}.$$

Відомо, що на множині комплексних чисел многочлен степеня n однозначно розкладається у добуток лінійних множників:

$$Q_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Числа x_k , $k = 1, \dots, n$ називають *коренями многочлена* $Q_n(x)$.

Серед чисел x_k , $k = 1, \dots, n$ можуть виявитись однакові числа. Тоді подання многочлена набуває вигляду

$$Q_n(x) = a_0(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_r)^{m_r},$$

де числа x_k , $k = 1, \dots, n$ — усі різні. Число m_k називають кратністю кореня x_k , $m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$.

Якщо многочлен $Q_n(x)$ з дійсними коефіцієнтами має комплексний корінь $\alpha + i\beta$, то спряжене комплексне число $\alpha - i\beta$ теж є його коренем. Комплексно спряжені корені многочлена з дійсними коефіцієнтами мають однакову кратність. Добуток лінійних множників $x - (\alpha + i\beta)$ і $x - (\alpha - i\beta)$ — це квадратний тричлен з від'ємним дискримінантом:

$$(x - (\alpha + i\beta))(x - (\alpha - i\beta)) = x^2 + px + q,$$

де p та q — дійсні числа і $p^2 - 4q < 0$.

Таким чином, на множині дійсних чисел многочлен з дійсними коефіцієнтами однозначно розкладається у добуток степенів лінійних множників та степенів квадратних тричленів з дійсними коефіцієнтами і від'ємними дискримінантами:

$$Q_n(x) = a_0(x - x_1)^{m_1} \dots (x^2 + p_kx + q_k)^{m_k}.$$

Означення 43. Найпростішими дробами називають дробу виду:

I. $\frac{A}{(x - a)^k}, \quad k \in \mathbb{N};$

II. $\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad p, q \in \mathbb{R}, \quad p^2 - 4q < 0.$

Твердження 7.6. 1. Будь-який правильний дріб однозначно розкладається у суму найпростіших дроби, при цьому розклад має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{(x - a)^m \dots (x^2 + px + q)^n} &= \frac{A_1}{(x - a)} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x - a)^m} + \dots \\ &\dots + \frac{B_1x + C_1}{(x^2 + px + q)} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{B_nx + C_n}{(x^2 + px + q)^n}. \end{aligned}$$

Розклад правильного дроби на найпростіші проводять за методом невизначених коефіцієнтів. Як це робиться, покажемо на прикладах.

Приклад 3. Розкласти на найпростіші дробу

$$\frac{9x^3 - x^2 - 34x + 30}{x(x - 1)(x - 2)(x + 3)}.$$

Розв'язання. Застосуємо метод невизначених коефіцієнтів. Знаменник дробу має чотири корені, вони *усі дійсні і різні*. Кожному дійсному простому кореню $x = a$ відповідає один найпростіший дріб вигляду $\frac{A}{x-a}$. Отже, заданий дріб розкладається на суму чотирьох найпростіших дробів:

$$\frac{9x^3 - x^2 - 34x + 30}{x(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+3}.$$

Невизначені коефіцієнти A, B, C, D обчислимо наступним чином: дробу у правій частині отриманої рівності зведемо до спільного знаменника, отримаємо два рівні дробу з однаковими знаменниками. Оскільки дробу рівні, знаменники дробів рівні, то рівні і їхні чисельники. Із рівності чисельників і знайдемо невизначені коефіцієнти:

$$\begin{aligned} \frac{9x^3 - x^2 - 34x + 30}{x(x-1)(x-2)(x+3)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+3} = \\ &= \frac{A(x-1)(x-2)(x+3) + Bx(x-2)(x+3) + Cx(x-1)(x+3) + Dx(x-1)(x-2)}{x(x-1)(x-2)(x+3)}. \end{aligned}$$

Прирівнюємо чисельники:

$$9x^3 - x^2 - 34x + 30 = A(x-1)(x-2)(x+3) + Bx(x-2)(x+3) + Cx(x-1)(x+3) + Dx(x-1)(x-2).$$

Маємо два тотожно рівні многочлени. Недоцільно розкривати дужки, множити многочлени, зводити подібні і прирівнювати коефіцієнти при однакових степенях x . Набагато простіше надати змінній x яких-небудь значень, а найкраще — значень коренів знаменника.

Покладемо $x = 0$, тоді маємо рівність $30 = 6A$, звідки $A = 5$. Нехай $x = 1$, тоді $2 = -2B$, звідки $B = -1$. Якщо $x = 2$, то $30 = 10C$, $C = 3$, при $x = 3$ маємо $-120 = -60D$, $D = 2$.

Отже,

$$\frac{9x^3 - x^2 - 34x + 30}{x(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{5}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+3}.$$

Приклад 4. Розкласти на найпростіші дробу

$$\frac{4x+1}{(x-2)(x+1)^2}.$$

Розв'язання.

Маємо випадок: корені знаменника дійсні, серед них є *кратні*. Кількість найпростіших дробів, які відповідають *кратному* кореню, дорівнює *кратності* кореня. Отже, у цьому прикладі знаменник має один простий дійсний корінь $x = 2$ і 2-кратний дійсний корінь $x = -1$; усього найпростіших дробів буде три:

$$\frac{4x+1}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Зведемо праву частину до спільного знаменника і прирівняємо чисельники дробів:

$$4x+1 = A(x+1)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x-2).$$

Покладемо $x = 2$, маємо $9 = 9A$, $A = 1$. Покладемо $x = -1$, отримаємо $-3 = -3C$, $C = 1$. Надамо змінній x довільного значення, наприклад, $x = 0$, тоді отримаємо рівність $1 = A - 2B - 2C$. Звідси знаходимо $B = -\frac{1}{2}(1 - A + 2C) = -1$.

Отже,

$$\frac{4x+1}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Приклад 5. Розкласти на найпростіші дроби

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+1)}.$$

Розв'язання.

Знаменник має один дійсний і два *прості комплексні взаємоспряжені* корені. Кожній *парі простих комплексних взаємоспряжених коренів* відповідає один найпростіший дріб вигляду $\frac{Ax+B}{x^2+ax+b}$. Отже, у цьому прикладі заданий дріб розкладається на суму двох найпростіших дробів. Невизначених коефіцієнтів буде три:

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Після зведення до спільного знаменника отримаємо рівність

$$1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2).$$

Пропонуємо самостійно знайти значення коефіцієнтів і впевнитись, що

$$A = \frac{1}{5}, \quad B = -\frac{1}{5}, \quad C = \frac{2}{5}.$$

Приклад 6. Написати вигляд розкладу на найпростіші дроби для дробу

$$\frac{1}{(x+2)(x-4)^2(x^2+4)^2(x^2+x+1)}.$$

Розв'язання.

Слід врахувати кратність дійсних та комплексних коренів: кількість найпростіших дробів, які відповідають дійсним кратним кореням або парам кратних взаємоспряжених комплексних коренів, дорівнює кратності цих коренів. Кількість невизначених коефіцієнтів, як завжди, повинна дорівнювати степеню знаменника заданого дробу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+2)(x-4)^2(x^2+4)^2(x^2+x+1)} = & \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x-4} + \frac{A_3}{(x-4)^2} + \\ & + \frac{B_1x+C_1}{x^2+x+1} + \frac{B_2x+C_2}{x^2+4} + \frac{B_3x+C_3}{(x^2+4)^2}. \end{aligned}$$

Інтегрування найпростіших дробів

Інтегрування найпростіших дробів зводиться до знаходження інтегралів таких чотирьох типів:

$$\text{I.} \quad \int \frac{A}{(x-a)} dx = A \int \frac{1}{(x-a)} dx = \ln|x-a| + C.$$

$$\text{II.} \quad \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{A}{(-n+1)(x-a)^{n-1}} + C, \quad n > 1.$$

$$\text{III.} \quad \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)} dx.$$

$$\text{IV. } \int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} dx, \quad n > 1.$$

В **III** і **IV** квадратний тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів, тобто $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

Інтегрування дробів типу **III** і **IV** покажемо на прикладах.

Розглянемо інтеграл типу **III**.

Приклад 7. Знайти $\int \frac{x+1}{x^2+4x+5} dx$.

Розв'язання. У знаменнику дробу виділимо повний квадрат

$$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2 + 5 = (x+2)^2 + 1$$

і зробимо підстановку $x+2 = t$:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2+4x+5} dx &= \int \frac{x+1}{(x^2+4x+4)+1} dx = \int \frac{x+1}{(x+2)^2+1} dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} x+2 = t \\ dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{t-1}{t^2+1} dt = \int \frac{t}{t^2+1} dt - \int \frac{1}{1+t^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \ln(t^2+1) - \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+5) - \operatorname{arctg}(x+2) + C. \end{aligned}$$

Розглянемо інтеграл типу **IV**.

Приклад 8. Знайти $\int \frac{2x+1}{(x^2+6x+13)^2} dx$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат

$$x^2 + 6x + 13 = x^2 + 6x + 9 - 9 + 13 = (x+3)^2 + 4.$$

Зробимо підстановку $x+3 = t$:

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+6x+13)^2} dx = \int \frac{2x+1}{((x+3)^2+4)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x+3 = t \\ dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{2t-5}{(t^2+4)^2} dt.$$

Останній інтеграл розіб'ємо на два інтеграли:

$$\int \frac{2t-5}{(t^2+4)^2} dt = \int \frac{2t}{(t^2+4)^2} dt - 5 \int \frac{1}{(t^2+4)^2} dt.$$

Розглянемо перший з них:

$$\int \frac{2t}{(t^2+4)^2} dt = \left\{ \begin{array}{l} t^2+4 = z \\ 2t dt = dz \end{array} \right\} = \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z} + C = -\frac{1}{t^2+4} + C.$$

Розглянемо інтеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(t^2+4)^2} dt &= \frac{1}{4} \int \frac{4}{(t^2+4)^2} dt = \frac{1}{4} \int \frac{(4+t^2) - t^2}{(t^2+4)^2} dt = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{t^2+4} dt - \frac{1}{4} \int \frac{t^2}{(t^2+4)^2} dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \int \frac{t^2}{(t^2+4)^2} dt. \end{aligned}$$

Інтеграл, що залишився, візьмемо частинами:

$$\int \frac{t^2}{(t^2+4)^2} dt = \int t \cdot \frac{t}{(t^2+4)^2} dt = \left\{ \begin{array}{l} u = t, \quad dv = \frac{t}{(t^2+4)^2} \\ du = dt, \quad v = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2+4} \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+4} dt = -\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \int \frac{2t-5}{(t^2+4)^2} dt &= -\frac{1}{t^2+4} - 5 \left(\frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + \frac{1}{8} \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \right) + C = \\ &= -\frac{8+5t}{8(t^2+4)} - \frac{5}{16} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C. \end{aligned}$$

Повернемося до старої змінної і запишемо остаточний результат:

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+6x+13)^2} dx = -\frac{5x+23}{8(x^2+6x+13)} - \frac{5}{16} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C.$$

7.6.2. Інтегрування раціональних дробів

Для знаходження інтеграла від раціонального дробу проводять такі дії:

1. Якщо дріб неправильний, то виділяють цілу частину дробу і подають дріб у вигляді суми многочлена і правильного дробу.

2. Правильний дріб розкладають на суму найпростіших дробів.

3. Проводять інтегрування отриманого виразу.

Перейдемо до розгляду прикладів.

Корені знаменника дійсні, усі різні.

Приклад 9. Знайти $\int \frac{x^2}{x^2+3x-4} dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{x^2}{x^2+3x-4} dx = \int \frac{x^2+3x-4-(3x-4)}{x^2+3x-4} dx = \int \left(1 - \frac{3x-4}{x^2-3x-4} \right) dx.$$

Розкладемо отриманий правильний дріб на суму найпростіших дробів:

$$\frac{3x-4}{x^2-3x-4} = \frac{3x-4}{(x+4)(x-1)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+4)}{(x+4)(x-1)}.$$

Звідси маємо рівність

$$3x-4 = A(x-1) + B(x+4).$$

Знаходимо коефіцієнти A і B :

$$\begin{aligned} x = -4, \quad -16 &= -5A, \quad A = \frac{16}{5}; \\ x = 1, \quad -1 &= 5B, \quad B = -\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^2+3x-4} dx &= \int \left(1 - \frac{3x-4}{x^2-3x-4} \right) dx = \int \left(1 - \frac{16}{5(x+4)} + \frac{1}{5(x-1)} \right) dx = \\ &= x - \frac{16}{5} \ln |x+4| + \frac{1}{5} \ln |x-1| + C. \end{aligned}$$

Корені знаменника дійсні, серед них є кратні.

Приклад 10. Знайти $\int \frac{1}{x^2(x+1)} dx$.

Розв'язання. Розкладемо дріб на суму найпростіших дробів:

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2}{x^2(x+1)}.$$

Прирівнюємо чисельники крайнього лівого та крайнього правого дробів цієї низки рівностей:

$$1 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2.$$

Знаходимо невідомі коефіцієнти:

$$\begin{aligned} x = 0, \quad 1 &= B; \\ x = -1, \quad 1 &= C; \\ x = 1, \quad 1 &= 2A + 2B + C, \quad A = -1. \end{aligned}$$

Знаходимо заданий інтеграл:

$$\int \frac{1}{x^2(x+1)} dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} \right) dx = -\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1| + C.$$

Серед коренів знаменника є комплексні.

П р и к л а д 11. Знайти $\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx$.

Р о з в ' я з а н н я.

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)x}{x(x^2+1)},$$

$$1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x.$$

Надамо змінній x три різні значення, наприклад, $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, і отримаємо три умови для визначення трьох невідомих коефіцієнтів A , B і C :

$$\begin{aligned} x = 0, \quad 1 &= A; \\ x = 1, \quad 1 &= 2A + B + C; \\ x = -1, \quad 1 &= 2A + B - C. \end{aligned}$$

Ця система має єдиний розв'язок: $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$.

Знаходимо інтеграл

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

7.6.3. Інтегрування деяких тригонометричних функцій

Інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x) dx$

Наведемо підстановки, які в окремих випадках зводять інтеграл даного виду до інтеграла від раціональної функції.

Таблиця 1		
	Умови	Підстановка
1	$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$	$\cos x = t$
2	$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$	$\sin x = t$
3	$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$	$\operatorname{tg} x = t$

П р и к л а д 12. Знайти $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є непарною відносно $\sin x$, тобто маємо випадок 1. Зробимо підстановку $\cos x = t$, $\sin x \, dx = -dt$:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x} \, dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{\sin x \, dx}{1 - \cos^2 x} = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \right| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.\end{aligned}$$

Приклад 13. Знайти інтеграл $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x + 2} \, dx$.

Розв'язання. Маємо випадок 2 — підінтегральна функція є непарною відносно $\cos x$. Скористаємось підстановкою $\sin x = t$, $\cos x \, dx = dt$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^3 x}{\sin x + 2} \, dx &= \int \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x \, dx}{\sin x + 2} = \int \frac{1 - t^2}{t + 2} \, dt = \int \frac{4 - t^2 - 3}{t + 2} \, dt = \\ &= \int \left(2 - t - \frac{3}{t + 2} \right) \, dt = 2t - \frac{t^2}{2} - 3 \ln |t + 2| + C = \\ &= 2 \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} - 3 \ln |\sin x + 2| + C.\end{aligned}$$

Приклад 14. Знайти $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} \, dx$.

Розв'язання. Скористаємось підстановкою $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1 + t^2}$. Враховуючи, що

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}, \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1 + t^2} = \frac{t^2}{1 + t^2},$$

можемо записати

$$\int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} \, dx = \int \frac{\frac{t^2}{1 + t^2}}{1 + \frac{1}{1 + t^2}} \cdot \frac{dt}{1 + t^2} = \int \frac{t^2}{(t^2 + 1)(t^2 + 2)} \, dt.$$

Розкладемо дріб $\frac{t^2}{(t^2 + 1)(t^2 + 2)}$ на суму найпростіших дробів. Звертаємо увагу на те, що дріб не містить першого степеня змінної t . Якщо позначити $z = t^2$, то дріб набуває вигляду $\frac{z}{(z + 1)(z + 2)}$ і має такий розклад:

$$\frac{z}{(z + 1)(z + 2)} = \frac{A}{z + 1} + \frac{B}{z + 2},$$

де, як неважко переконатись, $A = -1$, $B = 2$.

Знаходимо інтеграл

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2}{(t^2 + 1)(t^2 + 2)} \, dt &= \int \left(\frac{2}{t^2 + 2} - \frac{1}{t^2 + 1} \right) \, dt = \\ &= \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} t + C = \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} - x + C.\end{aligned}$$

Якщо функція $R(\sin x, \cos x)$ не задовольняє умови, наведені в табл. 1 (див. стор. 106), то застосовують універсальну тригонометричну підстановку.

Універсальна тригонометрична підстановка

Універсальною тригонометричною підстановкою називають підстановку

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad (7.6.2)$$

оскільки вона зводить інтеграли виду $\int R(\sin x, \cos x) dx$, де $R(u, v)$ — будь-яка раціональна функція, до інтегралів від дробово-раціональної функції аргументу t .

У результаті застосування підстановки (7.6.2) отримаємо:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int \mathcal{R}(t) dt,$$

де $\mathcal{R}$ — раціональна функція.

Приклад 15. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

Розв'язання. Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3+5\cos x} &= \int \frac{1}{3+5\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{4-t^2} = \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+t}{2-t} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

Інтеграли виду $\int \sin^m x \cos^n x dx$

Обмежимося розглядом випадку, коли m і n — цілі невід'ємні числа.

1. Якщо $m = 2k + 1$ — число непарне, то застосовують підстановку $\cos x = t$:

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = \int \sin^{2k} x \cos^n x \sin x dx = - \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x).$$

Приклад 16.

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^2 x dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\} = \\ &= - \int (1-t^2)t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

2. Якщо $n = 2k + 1$ — число непарне, то застосовують підстановку $\sin x = t$.

Приклад 17.

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^3 x dx &= \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t, \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \\ &= \int t^4 (1-t^2) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C. \end{aligned}$$

3. Якщо m і n — числа парні, то знижують степінь, застосовуючи формули:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

П р и к л а д 18.

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x \, dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx = \\ &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} \, dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

Інтеграли виду $\int \sin mx \cos nx \, dx$, $\int \sin mx \sin nx \, dx$, $\int \cos mx \cos nx \, dx$

Для знаходження таких інтегралів застосовуються формули:

1. $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x];$
2. $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x];$
3. $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$

П р и к л а д 19.

$$\int \sin 3x \cos 5x \, dx = \int \frac{1}{2} (\sin 8x - \sin 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 8x}{8} + \frac{\sin 2x}{2} \right) + C.$$

7.6.4. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

1. Інтеграли виду

$$\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots \right] dx,$$

де R — раціональна функція, $p_1, q_1, p_2, q_2, \dots$ — цілі числа.

Інтеграл знаходять за допомогою підстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n,$$

де n — найменше спільне кратне чисел $q_1, q_2, \dots$

П р и к л а д 20.

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1 + \sqrt{x+1}} \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+1} = t, \\ x = t^2 - 1, \\ dx = 2t \, dt. \end{array} \right\} = \int \frac{t^2 - 1}{1 + t} 2t \, dt = 2 \int (t - 1) t \, dt = \\ &= 2 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) + C = \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} - x + C. \end{aligned}$$

Приклад 21.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = t^6, \\ dx = 6t^5 dt. \end{array} \right\} = \int \frac{t^3}{t^2+1} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^8}{t^2+1} dt = \\ &= \int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + \operatorname{arctg} t + C = \\ &= \frac{\sqrt[6]{x^7}}{7} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt{x}}{3} + \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C.\end{aligned}$$

2. Інтеграли від диференціальних біномів

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx,$$

де m, n, p — раціональні числа.

Інтеграл такого виду виражається через скінченну комбінацію елементарних функцій лише у таких трьох випадках:

1) якщо p — ціле число. Застосовується заміна $x = t^s$, де s — спільний знаменник дробів m і n ;

2) якщо $\frac{m+1}{n}$ — ціле число. Застосовується підстановка $a + bx^n = t^s$, де s — знаменник дробу p ;

3) якщо $\frac{m+1}{n} + p$ — ціле число. Застосовується підстановка $ax^{-n} + b = t^s$, де s — знаменник дробу p .

Приклад 22. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}$.

Розв'язання. Запишемо підінтегральну функцію у вигляді

$$x^{-4} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

звідки знаходимо $m = -4$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$. Як бачимо, має місце випадок 3:

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{-4+1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2 — \text{ціле число.}$$

Застосуємо підстановку $x^{-2} + 1 = t^2$, з якої знаходимо, що

$$x = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}, \quad dx = -(t^2-1)^{-\frac{3}{2}} t dt.$$

У результаті заданий інтеграл набуває вигляду

$$\begin{aligned}\int x^{-4} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx &= - \int (t^2-1)^2 \left(1 + \frac{1}{t^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}} (t^2-1)^{-\frac{3}{2}} t dt = \\ &= - \int (t^2-1) dt = -\frac{t^3}{3} + t + C = -\frac{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}{3x^3} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C = \\ &= \frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3} + C.\end{aligned}$$

3. Інтеграли виду $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$, де $b^2 - 4ac \neq 0$.

Існує багато способів знаходження інтегралів такого типу — це відомі три підстановки Ейлера, тригонометричні підстановки та інші¹.

Ми обмежимося розглядом застосування тригонометричних підстановок.

Виділенням під знаком радикала повного квадрата і відповідною лінійною заміною змінних інтеграли такого виду зводяться до інтегралів одного з таких трьох типів:

- 1) $\int R(z, \sqrt{m^2 - z^2}) dz$, підстановка $z = m \sin t$ або $z = m \cos t$;
- 2) $\int R(z, \sqrt{z^2 - m^2}) dz$, підстановка $z = \frac{m}{\sin t}$ або $z = \frac{m}{\cos t}$;
- 3) $\int R(z, \sqrt{z^2 + m^2}) dz$, підстановка $z = m \operatorname{tg} t$ або $z = m \operatorname{ctg} t$.

У результаті застосування вказаних підстановок ці інтеграли зводяться до інтеграла вигляду $\int \mathcal{R}(\sin t, \cos t) dt$, де $\mathcal{R}$ — раціональна функція.

П р и к л а д 23. Знайти інтеграл $\int \sqrt{3 - 2x - x^2} dx$.

Р о з в ' я з а н н я. Виділимо повний квадрат у підкореному виразі:

$$3 - 2x - x^2 = -(x^2 + 2x) + 3 = -(x^2 + 2x + 1) + 1 + 3 = 4 - (x + 1)^2.$$

Замінімо $x + 1 = z$, $dx = dz$, тоді інтеграл набуде вигляду

$$\int \sqrt{3 - 2x - x^2} dx = \int \sqrt{4 - (x + 1)^2} dx = \int \sqrt{4 - z^2} dz.$$

Застосуємо підстановку $z = 2 \sin t$, $dz = 2 \cos t dt$:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4 - z^2} dz &= \int \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} 2 \cos t dt = \\ &= 4 \int \cos^2 t dt = 2 \int (1 + \cos 2t) dt = 2t + \sin 2t + C. \end{aligned}$$

Повернемося до старої змінної. Оскільки $z = 2 \sin t$, то $t = \arcsin \frac{z}{2}$. Далі знаходимо, що

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} = 2 \cdot \frac{z}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{z^2}{4}} = \frac{z}{2} \sqrt{4 - z^2}.$$

Враховуючи, що $z = x + 1$, запишемо остаточний результат:

$$\int \sqrt{3 - 2x - x^2} dx = 2 \arcsin \frac{x + 1}{2} + \frac{x + 1}{2} \sqrt{3 - 2x - x^2} + C.$$

П р и к л а д 24. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 4}}$.

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо підстановку $x = \frac{2}{\sin t}$, $dx = -\frac{2}{\sin^2 t} \cos t dt$:

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 4}} = \int \frac{-\frac{2}{\sin^2 t} \cos t dt}{\frac{2}{\sin t} \sqrt{\frac{4}{\sin^2 t} - 4}} = -\frac{1}{2} \int dt = -\frac{t}{2} + C = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{x} + C.$$

¹Докладніше див., наприклад, [?], с. 308 – 312, [?], с. 424 – 426.

Приклад 25. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$.

Розв'язання. Скористаємося підстановкою $x = \operatorname{tg} t$, $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 t \sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1}} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t} + C.$$

Повернемося до старої змінної. Пошлемося на відому формулу $\sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1}}$, врахуємо, що $\operatorname{tg} t = x$, і запишемо остаточний результат:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C.$$

7.7. Інтеграли, що «не беруться»

Ми розглянули основні класи елементарних функцій, інтеграли від яких є також елементарними функціями. Але не кожна неперервна¹ елементарна функція має своєю первісною елементарну функцію. Якщо інтеграл від елементарної функції не виражається через елементарні функції у скінченному вигляді, то кажуть, що цей інтеграл «не береться».

Зокрема, такими інтегралами є

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}$$

та багато інших.

Для деяких первісних, що не є елементарними функціями і які знайшли широке застосування, складені докладні таблиці їх значень у залежності від значення аргументу. Знайти ці таблиці можна у відповідній довідковій літературі.

7.8. Невизначений інтеграл в Maple

Для відшукування первісних в Maple є функції **Int** та **int**. Покажемо їх застосування на прикладах:

> restart; Int(x,x)=int(x,x);

$$\int x dx = \frac{x^2}{2}$$

Як бачимо, довільна стала інтегрування до знайденої первісної не додається. Унаслідок цього при повторному інтегруванні втрачаються доданки, що містять сталі інтегрування:

> Int((Int(x,x)),x)=int(int(x,x),x);

$$\int \int x dx dx = \frac{x^3}{6}$$

Насправді ми мали б отримати такий результат:

$$\int \left(\int x dx \right) dx = \int \left(\frac{x^2}{2} + C \right) dx = \frac{x^3}{6} + C \cdot x + C1.$$

¹Неперервність функції на деякому інтервалі забезпечує існування її первісної на цьому інтервалі.

Якщо Maple запропонувати знайти інтеграл, що «не береться», то відповідь буде отримана або через спеціальні функції, або буде повторений запис інтеграла:

```
> int(exp(-x^2), x);
```

$$\frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x)}{2}$$

```
> int(exp(-x^2)*sin(x)/x, x);
```

$$\int \frac{e^{-x^2} \sin x}{x} dx$$

Звертаємо увагу, що в Maple є можливість не лише отримати кінцевий результат інтегрування, а й відслідкувати процес отримання первісної покроково та отримати пояснення, які властивості чи методи при цьому були використані. Найчастіше використовуються методи заміни змінної та інтегрування частинами. Ці методи реалізуються функціями **Change** та **Parts** з пакету **IntegrationTools**. При інтегруванні виразів, що зводяться до інтегрування раціональних дробів, виникає потреба у розкладі раціонального дробу на суму найпростіших дробів. Такий розклад здійснюється функцією **convert(f, parfrac, x)**, де **f** — раціональна функція змінної **x**. Покажемо застосування перелічених функцій на прикладах.

Метод заміни змінної.

Приклад 1. Провести в інтегралі $\int \cos(3x + 1) dx$ підстановку $3x + 1 = u$.

Розв'язання.

```
> with(IntegrationTools):
```

```
> V:=Int(cos(3*x+1), x);
```

$$V := \int \cos(3x + 1) dx$$

```
> Change(V, 3*x+1 = u);
```

$$\int \frac{\cos(u)}{3} du$$

Метод інтегрування частинами.

Приклад 2. Застосувати до інтеграла $\int x e^x dx$ інтегрування частинами.

Розв'язання.

```
> V:=Int(x*exp(x), x);
```

$$V := \int x e^x dx$$

```
> u:=x:
```

```
> Parts(V, u);;
```

$$x e^x - \left(\int e^x dx \right)$$

Розклад раціонального дробу.

Приклад 3. Розкласти правильний раціональний дріб $\frac{4x + 1}{(x - 2)(x + 1)^2}$ на суму найпростіших дробів.

Розв'язання.

```
> convert((4*x+1)/((x - 2)*(x+1)^2), parfrac, x);
```

$$\frac{1}{(x + 1)^2} - \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 2}$$

Неправильний раціональний дріб

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = W_{m-n}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_n(x)}, \quad k < n.$$

розкладеться на суму цілої частини дробу $W_{m-n}(x)$ та суму найпростіших дробів — розкладу правильного дробу $\frac{R_k(x)}{Q_n(x)}$. Наприклад:

```
> convert((x^3 + x)/(x^2 - 1), parfrac, x);
```

$$x + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

Відслідкувати процес інтегрування покроково можна функцією `Student[Calculus1][IntTutor]()`. Її можна викликати або через головне меню (Tools ► Tutors ► Calculus - Single Variable ► Integration Methods...), або командою `> Student[Calculus1][IntTutor]()`;

Розглянемо покроковий процес інтегрування на прикладі інтеграла $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$

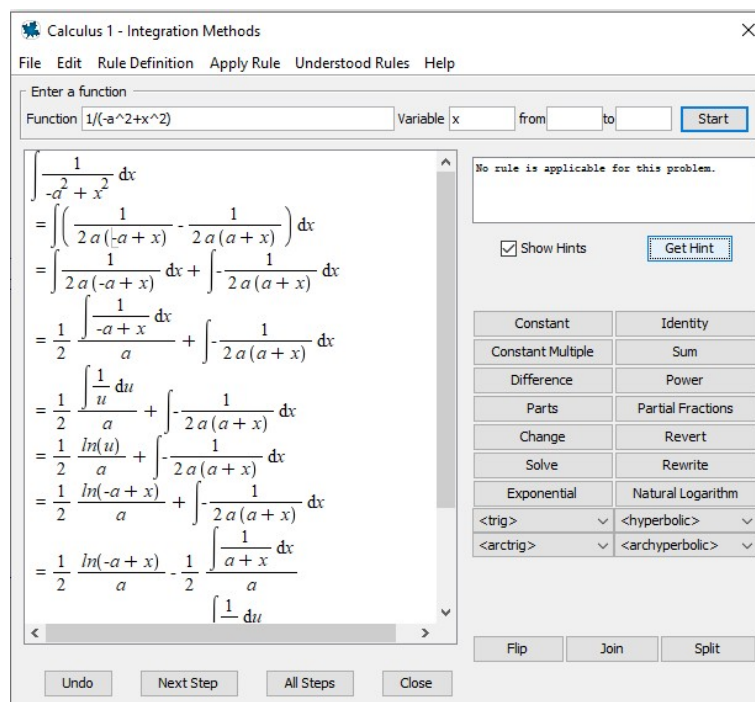


Рис. 41 Maple-вікно вивчення методів інтегрування

Після закриття Maple-вікна кнопкою Close результати будуть поміщені в робочий листок

```
> Student[Calculus1][IntTutor](1/(x^2-a^2),x);
```

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{1}{-a^2 + x^2} dx \\
 &= \int \left(\frac{1}{2a(-a+x)} - \frac{1}{2a(a+x)} \right) dx && [partialfractions] \\
 &= \int \frac{1}{2a(-a+x)} dx + \int -\frac{1}{2a(a+x)} dx && [sum] \\
 &= \frac{\int \frac{1}{-a+x} dx}{2a} + \int -\frac{1}{2a(a+x)} dx && [constantmultiple] \\
 &= \frac{\int \frac{1}{u} du}{2a} + \int -\frac{1}{2a(a+x)} dx && [change, u = -a + x, u] \\
 &= \frac{\ln(u)}{2a} + \int -\frac{1}{2a(a+x)} dx && [power] \\
 &= \frac{\ln(-a+x)}{2a} + \int -\frac{1}{2a(a+x)} dx && [revert] \\
 &= \frac{\ln(-a+x)}{2a} - \int \frac{1}{a+x} dx && [constantmultiple] \\
 &= \frac{\ln(-a+x)}{2a} - \int \frac{1}{u} du && [change, u = a + x, u] \\
 &= \frac{\ln(-a+x)}{2a} - \frac{\ln(u)}{2a} && [power] \\
 &= \frac{\ln(-a+x) - \ln(a+x)}{2a} && [revert] \\
 & \int \frac{1}{-a^2 + x^2} dx = \frac{\ln(-a+x) - \ln(a+x)}{2a}
 \end{aligned}$$

Рис. 42 Результати покрокового інтегрування

Завдання до розділу

Безпосереднім інтегруванням знайти інтеграли:

1. $\int \left(4x^3 - \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx.$
2. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx.$
3. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \right) dx.$
4. $\int \left(x^6 + \frac{2}{x} \right) dx.$
5. $\int \left(\frac{3}{x^2-4} - \frac{2}{x^2+4} \right) dx.$
6. $\int \left(\frac{5}{\cos^2 x} - 3 \cos x \right) dx.$
7. $\int \left(\frac{1}{x^2+1} + 2^x \right) dx.$
8. $\int (5e^x + 2 \sin x) dx.$

Знайти інтеграли, скориставшись відповідною заміною змінної:

9. $\int (2-x)^7 dx.$
10. $\int \frac{1}{5x+2} dx.$
11. $\int \sin(2x + \frac{\pi}{4}) dx.$
12. $\int \frac{x^2}{x+3} dx.$

$$\begin{array}{ll}
13. \int e^{2x-1} dx. & 14. \int \frac{x}{x^4+4} dx. \\
15. \int x^2 (x^3+2)^5 dx. & 16. \int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x} dx. \\
17. \int \frac{\arcsin x + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx. & 18. \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx. \\
19. \int \frac{\sin x - 1}{\cos x + x} dx. & 20. \int 3^{\cos x} \sin x dx.
\end{array}$$

Застосовуючи вказані підстановки, знайти інтеграли:

$$\begin{array}{ll}
21. \int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-1}} dx, \quad x = \frac{1}{t}. & 22. \int \sqrt{4-x^2} dx, \quad x = 2 \sin t. \\
23. \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx, \quad t = \sqrt{x+1}. & 24. \int \frac{\sin x}{\sqrt{4+\cos^2 x}} dx, \quad \cos x = t. \\
25. \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad x = \sin t. & 26. \int \frac{1}{e^x+1} dx, \quad x = -\ln t.
\end{array}$$

Застосовуючи формулу інтегрування частинами, знайти інтеграли:

$$\begin{array}{ll}
27. \int \ln x dx. & 28. \int \ln^2 x dx. \\
29. \int \operatorname{arctg} x dx. & 30. \int \arcsin x dx. \\
31. \int x \sin x dx. & 32. \int x \cos 2x dx. \\
33. \int \frac{x}{e^x} dx. & 34. \int \ln(x + \sqrt{x^2+1}) dx. \\
35. \int (x^2 + 2x + 3) \sin x dx. & 36. \int (x^3 + 2) e^x dx. \\
37. \int \frac{x}{\cos^2 x} dx. & 38. \int x \sin x \cos x dx.
\end{array}$$

Застосовуючи різні методи, знайти інтеграли:

$$\begin{array}{ll}
39. \int x^3 e^{x^2} dx. & 40. \int e^{\sqrt{x}} dx. \\
41. \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx. & 42. \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx. \\
43. \int (\arcsin x)^2 dx. & 44. \int \sin(\ln x) dx. \\
45. \int x^2 \operatorname{arctg} x dx. & 46. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.
\end{array}$$

Знайти інтеграли від дробово-раціональних функцій:

$$47. \int \frac{4x^2 + 5x + 3}{(x+2)(x^2-1)} dx.$$

$$48. \int \frac{x^4}{x^4 - 10x^2 + 9} dx.$$

$$49. \int \frac{x^2 + 5}{(x-2)(x+1)^2} dx.$$

$$50. \int \frac{x^2 + 2x + 2}{x^4 + x^3} dx.$$

$$51. \int \frac{3x^2 + 2x + 4}{(x+1)(x^2+4)} dx.$$

$$52. \int \frac{4x^2 + 5x + 3}{(x-1)(x^2+2x+3)} dx.$$

Знайти інтеграли від тригонометричних функцій:

$$53. \int \frac{\sin^3 x}{4 + \cos^2 x} dx.$$

$$54. \int \frac{dx}{3 \cos^2 x + 4 \sin^2 x}.$$

$$55. \int \frac{\sin^2 x}{\cos x(4 - \sin^2 x)} dx.$$

$$56. \int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}.$$

$$57. \int \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x} dx.$$

$$58. \int \frac{\sin x}{2 + \sin x} dx.$$

$$59. \int \sin^2 x \cos^5 x dx.$$

$$60. \int \sin^2 x \cos^4 x dx.$$

$$61. \int \sin^3 x \cos^4 x dx.$$

$$62. \int \sin 3x \cos 5x dx.$$

$$63. \int \cos 6x \cos 4x dx.$$

$$64. \int \sin x \sin 7x dx.$$

Знайти інтеграли від ірраціональних функцій:

$$65. \int \frac{dx}{2 + \sqrt{x+2}}.$$

$$66. \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x + \sqrt[3]{x} - 2} dx.$$

$$67. \int \frac{\sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx.$$

$$68. \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx.$$

$$69. \int \sqrt{9 - x^2} dx.$$

$$70. \int \sqrt{x^2 - 16} dx.$$

$$71. \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx.$$

$$72. \int \sqrt{x^2+x} dx.$$

$$73. \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

$$74. \int \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}.$$

$$75. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$76. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$77. \int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}} dx.$$

$$78. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[9]{x^4}} dx.$$

Тема 8

Визначений інтеграл

8.1. Побудова визначеного інтеграла

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a, b]$.

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ довільним чином на частини точками

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Позначимо $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. На кожному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ виберемо по довільній точці $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ і утворимо суму

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (8.1.1)$$

Суму σ називають *інтегральною сумою* для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. Геометричний зміст інтегральної суми очевидний — для невід'ємної функції $f(x)$ сума σ дорівнює площі ступінчастої фігури (рис. 1). Очевидно також, що сума σ залежить від способу розбивки відрізка $[a, b]$ на частини та від способу вибору точок ξ_i .

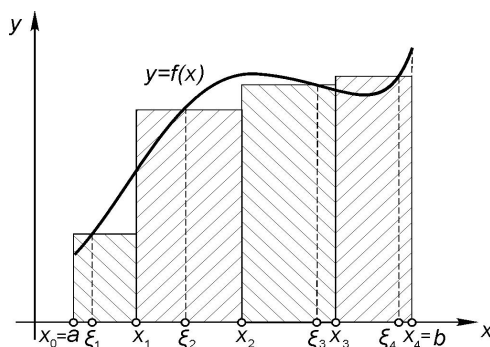


Рис. 43

Позначимо через λ найбільшу з довжин відрізків $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}.$$

Означення 44. Якщо існує скінченна границя I суми σ при $\lambda \rightarrow 0$

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

і ця границя I не залежить ні від способу розбивки відрізка $[a, b]$ на частини, ні від способу вибору точок ξ_i , то її називають **визначеним інтегралом** від функції $f(x)$ по $[a, b]$ і позначають символом

$$I = \int_a^b f(x)dx. \quad (8.1.2)$$

Функцію $f(x)$ при цьому називають *інтегрованою на $[a, b]$ функцією*, числа a і b називають відповідно *нижньою* та *верхньою межею інтегрування*, x — *змінною інтегрування*.

Визначений інтеграл являє собою число, яке однозначно визначається підінтегральною функцією $f(x)$ та межами інтегрування a і b . Звідси випливає, що визначений інтеграл не залежить від вибору позначення аргументу підінтегральної функції, тобто від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\xi)d\xi \text{ та ін.}$$

8.2. Умови існування визначеного інтеграла

8.2.1. Необхідна умова існування

Теорема 15 (Необхідна умова інтегровності функції). *Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a, b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.*

Справді, якби функція $f(x)$ не була обмеженою на $[a, b]$, то за рахунок вибору точки ξ можна було б отримати наскільки завгодно велике за абсолютною величиною значення $f(\xi)$ і зробити інтегральну суму за абсолютною величиною наскільки завгодно великою. А це означає, що інтегральна сума σ при $\lambda \rightarrow 0$ скінченної границі не має, тобто для необмеженої функції визначений інтеграл не існує.

З а у в а ж е н н я. Обернене твердження не справджується. Не кожна обмежена функція є інтегрованою. Як приклад розглянемо функцію Діріхле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ раціональне число;} \\ 0, & \text{якщо } x \text{ ірраціональне число.} \end{cases}$$

Побудуємо інтегральні суми для функції $D(x)$ на відрізку $[0; 1]$. Якщо за точки ξ_i візьмемо точки раціональні, то

$$\sigma = \sum_{i=1}^n D(\xi_i)\Delta x_i = 1,$$

якщо вибрати ξ_i ірраціональними, то

$$\sigma = \sum_{i=1}^n D(\xi_i)\Delta x_i = 0$$

для будь-якого способу розбиття відрізка $[0; 1]$ на частини. Як бачимо, границя інтегральної суми при $\lambda \rightarrow 0$ залежить від способу вибору точок ξ_i , тобто для функції $D(x)$ визначений інтеграл не існує, функція $D(x)$ не є інтегрованою.

Достатні умови інтегровності функції ґрунтуються на понятті сум Дарбу.

8.2.2. Суми Дарбу та їх властивості

Нехай функція $f(x)$ визначена і обмежена на відрізку $[a, b]$ і нехай $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ — деяке його розбиття. Позначимо через m_i та M_i точну нижню та точну верхню грані значень функції на відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ і складемо суми

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i.$$

Суми S і s називають відповідно *верхньою* та *нижньою інтегральними сумами Дарбу* або *верхньою* і *нижньою сумами Дарбу* для даного розбиття відрізка $[a, b]$. Оскільки $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, то

$$s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = S,$$

тобто для одного й того самого розбиття інтегральні суми задовольняють нерівність

$$s \leq \sigma \leq S. \quad (8.2.1)$$

Суми Дарбу мають простий геометричний зміст. Для невід'ємної неперервної на $[a, b]$ функції $f(x)$ верхня сума Дарбу дорівнює площі ступінчастої фігури, що містить криволінійну трапецію — фігуру, обмежену графіком функції $f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$ та $x = b$ (рис. 44). Нижня сума Дарбу дорівнює площі ступінчастої фігури, що міститься у вказаній криволінійній трапеції (рис. 45). На рис. 43, 44 і 45 зображено графік однієї й тієї самої функції при одному й тому самому способі розбиття відрізка $[a, b]$ на частини. Зв'язок (8.2.1) між інтегральними сумами — очевидний.

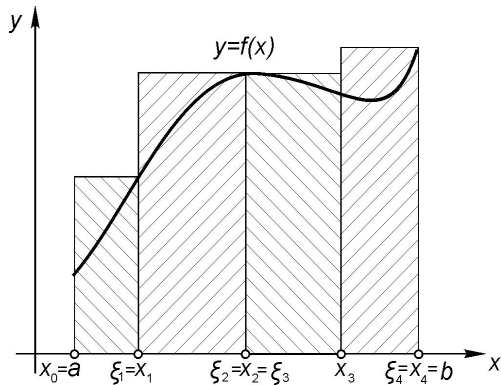


Рис. 44

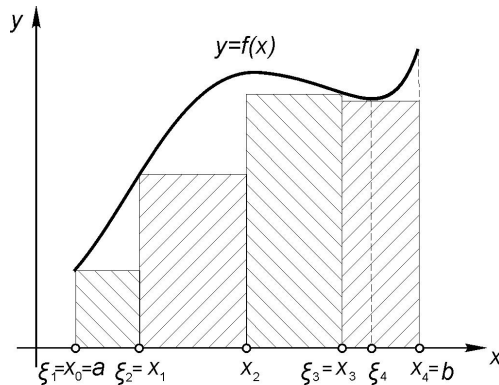


Рис. 45

Суми Дарбу мають такі властивості:

1°. Із збільшенням кількості точок поділу відрізка на частини верхня сума не збільшується, нижня сума не зменшується.

2°. Будь-яка нижня сума Дарбу не перевищує будь-якої верхньої суми Дарбу, навіть якщо вони відповідають різним способам розбиття відрізка на частини.

3°. Множина $\{S\}$ верхніх сум Дарбу для даної функції $f(x)$ обмежена знизу, множина нижніх сум Дарбу обмежена зверху, причому точна верхня грань множини $\{s\}$ не перевищує точну нижню грань множини $\{S\}$.

Теорема 16. Для того, щоб обмежена на відрізку $[a, b]$ функція була інтегровною на цьому відрізку, необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0.$$

Величину $\omega_i = M_i - m_i$ називають коливанням функції $f(x)$ на відрізку $[x_{i-1}, x_i]$. Необхідну і достатню умову інтегровності функції можна записати і у вигляді

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

Геометрична ілюстрація різниці $S - s = \omega_i \Delta x_i$ для невід'ємної неперервної функції $f(x)$ показана на рис. 46. Величина $S - s$ дорівнює сумі площ заштрихованих прямокутників. На рис. 47 можна відслідкувати поведінку різниці $S - s$ із збільшенням кількості точок поділу відрізка на частини (на рис. 46 точок поділу на одну менше, ніж на рис. 47). Неважко бачити, що різниця $S - s$ на рис. 46 більша, ніж на рис. 47.

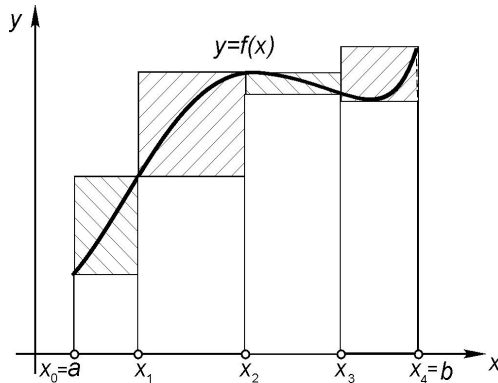


Рис. 46

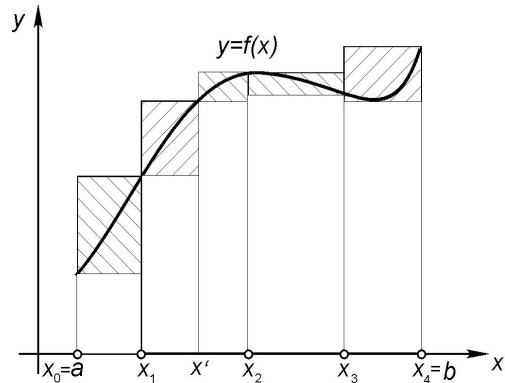


Рис. 47

8.2.3. Основні класи інтегровних функцій

Вкажемо основні класи функцій, для яких існує визначений інтеграл:

1. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку.
2. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ всюди, за винятком скінченно-го числа точок, які є точками розриву першого роду, то вона інтегровна на цьому відрізку.
3. Якщо функція $f(x)$ обмежена і монотонна на відрізку $[a, b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку.

8.3. Властивості визначеного інтеграла

Властивості, що виражаються рівностями:

$$1^\circ. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \text{ Зокрема, } \int_a^a f(x) dx = 0.$$

- 2°. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на кожному з проміжків $[a, c]$, $[c, b]$, то вона інтегровна і на проміжку $[a, b]$ і

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

3°. Сталий множник можна винести за знак інтеграла:

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

4°. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ — інтегровні на $[a, b]$, то інтегровною на $[a, b]$ є і їхня сума $f(x) \pm g(x)$ і

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

З а у в а ж е н н я. Властивість 4° справджується для будь-якого скінченного числа доданків.

Властивості, що виражаються нерівностями.

Тут і далі ми вважаємо, що $a < b$ і що всі інтеграли, про які йтиме мова, існують.

5°. Якщо $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

6°. Якщо $f(x) \geq g(x)$, $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

7°. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a, b]$, то на $[a, b]$ інтегровною є і функція $|f(x)|$ і

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

8°. Якщо m і M — найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на $[a, b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

8.4. Теорема про середнє значення

Теорема 17. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то на цьому відрізку існує точка c така, що

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

Число

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

називають середнім значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то вона на цьому відрізку набуває свого найменшого та найбільшого значення. Позначимо їх через m і M відповідно:

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Із властивості 8° визначеного інтеграла випливає, що середнє значення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ знаходиться між числами m і M :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \mu \leq M.$$

Оскільки функція $f(x)$ неперервна, то за другою теоремою Больцано-Коші вона заповнює проміжок $[m, M]$ суцільним чином, тобто на проміжку $[a, b]$ знайдеться така точка c , що

$$f(c) = \mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}, \text{ або } \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Теорема про середнє значення має такий геометричний зміст:

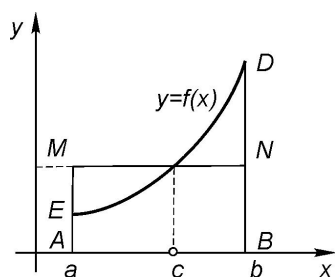


Рис. 48

Для невід'ємної неперервної на відрізку $[a, b]$ функції на цьому відрізку знайдеться точка c така, що площа прямокутника, основою якого є відрізок $[a, b]$ і висота якого дорівнює ординаті $f(c)$, дорівнюватиме площі криволінійної фігури, обмеженої графіком функції, віссю Ox , прямими $x = a$ і $x = b$ (на рис. 48 площа прямокутника $AMNB$ дорівнює площі фігури $AEDB$).

8.5. Інтеграл зі змінною верхньою межею

Нехай функція $f(x)$ інтегровна на проміжку $[a, b]$. Розглянемо інтеграл виду

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

де верхня межа x є змінною величиною. Функція $\Phi(x)$ є визначеною на відрізку $[a, b]$. Вона має такі властивості:

Твердження 8.5.1. Функція $\Phi(x)$ неперервна.

Приріст функції $\Phi(x)$ має вигляд

$$\Delta\Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \mu \cdot \Delta x,$$

де μ — середнє значення функції $f(x)$ на проміжку $[x, x+\Delta x]$. Оскільки $f(x)$ — інтегровна, то вона обмежена і $m \leq \mu \leq M$. Якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то $\Delta\Phi(x) = \mu \cdot \Delta x \rightarrow 0$ як добуток обмеженої і нескінченно малої величин. А це означає, що функція $\Phi(x)$ неперервна.

Твердження 8.5. 2. Якщо функція $f(x)$ неперервна, то функція $\Phi(x)$ диференційовна і

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна, то

$$\Delta\Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(c) \cdot \Delta x,$$

де c — точка з проміжку $[x, x + \Delta x]$. Знайдемо границю

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(x).$$

Тобто існує похідна $\Phi'(x)$ і вона дорівнює $f(x)$.

Таким чином, ми встановили, що будь-яка неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $f(x)$ має на цьому відрізку первісну. Функція

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

є однією з них.

8.6. Формула Ньютона - Лейбніца

Усі первісні функції $f(x)$ відрізняються на сталу: якщо $F(x)$ — деяка первісна функції $f(x)$, то

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x) + C.$$

Сталу C знайдемо з умови

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t) dt = 0 = F(a) + C, \text{ тобто } C = -F(a).$$

Отже, ми встановили, що $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$. Покладемо в останній рівності $x = b$ і отримаємо формулу для обчислення визначеного інтеграла

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (8.6.1)$$

де $F(x)$ — яка-небудь первісна функції $f(x)$. Формулу (8.6.1) називають *формулою Ньютона - Лейбніца*.

Різницю $F(b) - F(a)$ прийнято позначати символом $F(x)\Big|_a^b$. У цих позначеннях формула (8.6.1) набуває вигляду

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

П р и к л а д 1. $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2.$

П р и к л а д 2. $\int_0^1 (3x^2 + 2) \, dx = (x^3 + 2x) \Big|_0^1 = 3 - 0 = 3.$

П р и к л а д 3. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$

З а у в а ж е н н я. Формула Ньютона - Лейбніца була отримана за умови, що підінтегральна функція є неперервною. Нижче ми покажемо, що її можна використовувати і для деяких розривних функцій (див. параграф 8.9, с. 127).

8.7. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Нехай потрібно обчислити інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ — неперервна на проміжку $[a, b]$ функція. Покладемо $x = \varphi(t)$, підпорядкувавши функцію $\varphi(t)$ таким вимогам:

- 1) $\varphi(t)$ визначена і неперервна на проміжку $[\alpha, \beta]$ і її значення не виходять за межі проміжку $[a, b]$, коли t змінюється на проміжку $[\alpha, \beta]$;
- 2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;
- 3) на $[\alpha, \beta]$ існує неперервна похідна $\varphi'(t)$.

Тоді справджується формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t)dt. \quad (8.7.1)$$

З а у в а ж е н н я 1. Для знаходження невизначеного інтеграла заміною змінної треба було повертатися до старої змінної. Для обчислення визначеного інтеграла потреба в цьому відпадає — обчисливши інтеграл із правої частини рівності (8.7.1), ми тим самим обчислили і інтеграл із лівої частини цієї рівності.

П р и к л а д 1. Обчислити $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx.$

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо підстановку $x = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Ця підстанова задовольняє усі три висунуті вище вимоги: функція $\varphi(t) = \sin t$ неперервна на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, її

значення не виходять за межі проміжку $[-1; 1]$, коли t перебігає значення від $t = -\frac{\pi}{2}$ до $t = \frac{\pi}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$; на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ вона має неперервну похідну $\varphi'(t) = \cos t$.
Тоді

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Зауваження 2. Використовуючи формули (8.7.1), треба перевіряти виконання вимог **1 – 3**, що висуваються до функції $x = \varphi(t)$. У разі їх порушення може бути отриманий неправильний результат.

Наведемо з цього приводу приклад, запозичений нами у [?] (див. [?], с. 195):

Приклад 2. Обчислити $\int_0^{\pi} dx$.

Розв'язання. Маємо

$$\int_0^{\pi} dx = x \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

З іншого боку,

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{\cos^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)} dx.$$

Підстановка $\operatorname{tg} x = t$ формально приводить до такого результату:

$$\int_0^{\pi} dx = \int_0^{\pi} \frac{d(\operatorname{tg} x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \int_0^0 \frac{dt}{1 + t^2} = 0.$$

Отримано неправильний результат, оскільки $\pi \neq 0$. Це сталося тому, що функція $t = \operatorname{tg} x$ розривна в точці $x = \frac{\pi}{2}$, тобто не виконуються вищевказані умови **1 – 3**.

Для обчислення визначених інтегралів у симетричних відносно нуля межах, тобто інтегралів виду $\int_{-a}^a f(x) dx$, доцільно використовувати такі правила:

$$1) \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \text{ якщо } f(-x) = f(x);$$

$$2) \int_{-a}^a f(x) dx = 0, \text{ якщо } f(-x) = -f(x).$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx$.

Розв'язання. Результат очевидний: оскільки підінтегральна функція непарна, то

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx = 0.$$

8.8. Формула інтегрування частинами

Якщо функції u і v мають неперервні похідні на проміжку $[a, b]$, то справджується формула

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (8.8.1)$$

Формулу (8.8.1) називають формулою *інтегрування частинами у визначеному інтегралі*.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \arctg x dx$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctg x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \arctg x, \quad dv = dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x \end{array} \right\} = x \arctg x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{x^2+1} = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(x^2+1)}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int_0^\pi x \sin x dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^\pi x \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \sin x dx \\ du = dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = -x \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi.$$

8.9. Поняття невластного інтеграла

При побудові визначеного інтеграла як границі інтегральних сум передбачається, що підінтегральна функція є обмеженою, а проміжок інтегрування є скінченним. При порушенні хоча б однієї із цих умов означення визначеного інтеграла втрачає сенс. Проте, поняття визначеного інтеграла можна узагальнити і на ці випадки. Такі узагальнення називають *невласними інтегралами*.

8.9.1. Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування

Означення 45. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a, +\infty)$ і є інтегрованою на проміжку $[a, R]$ для будь-якого $R > a$. Скінченну або нескінченну границю

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) dx \quad (8.9.1)$$

називають **невласним інтегралом першого роду** і позначають символом

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx. \quad (8.9.2)$$

Тобто за означенням

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) dx.$$

Якщо границя (8.9.1) існує і скінченна, то кажуть, що інтеграл (8.9.2) *збігається*; якщо границя (8.9.1) не існує або нескінченна, то кажуть, що інтеграл (8.9.2) *розбігається*.

Аналогічно вводиться поняття інтеграла з нижньою нескінченною межею:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^a f(x) dx.$$

Інтеграл з обома нескінченними границями розуміють як суму

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad (8.9.3)$$

де a — будь-яке число. Кажуть, що інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ збігається, якщо збігається кожен із інтегралів-доданків з правої частини рівності (8.9.3).

П р и к л а д 1. Інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ збігається, оскільки границя

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^R = \lim_{R \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} R = \frac{\pi}{2}$$

існує і скінченна, тобто

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Приклад 2. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ розбігається, оскільки

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^R = +\infty.$$

Приклад 3. Інтеграл $\int_0^{+\infty} \cos x \, dx$ розбігається: границя $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \cos x \, dx =$
 $= \lim_{R \rightarrow +\infty} \sin R$ не існує.

Приклад 4. Інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x \, dx$ розбігається:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x \, dx = \int_{-\infty}^a e^x \, dx + \int_a^{+\infty} e^x \, dx,$$

а інтеграл $\int_a^{+\infty} e^x \, dx$, як це неважко показати, є розбіжним.

Твердження 8.9.1. Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ збігається, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Ця умова є необхідною, але не достатньою. При невиконанні цієї умови інтеграл розбігається. Звертаємо увагу на приклади 1 і 2 цього параграфа: ця умова виконана в обох прикладах, але збіжним є інтеграл лише у прикладі 1. У прикладах 3 і 4 ця умова не виконана. Інтеграли в цих прикладах є розбіжними.

Приклад 5. Інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}} \, dx$ розбігається, оскільки

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}} = 1 \neq 0.$$

8.9.2. Невласні інтеграли від необмежених функцій

Означення 46. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a, b)$ і є інтегрованою на будь-якому з проміжків $[a, b - \delta]$, де δ — додатне число: $0 < \delta < b - a$, і нехай функція $f(x)$ необмежена на проміжку $[b - \delta, b]$. Точку b називають **особливою точкою**.

Скінченну або нескінченну границю

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_a^{b-\delta} f(x) \, dx \tag{8.9.4}$$

називають **невласним інтегралом другого роду** і позначають символом

$$\int_a^b f(x) \, dx. \tag{8.9.5}$$

Тобто для необмеженої функції $f(x)$ за означенням маємо

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx.$$

Якщо границя (8.9.4) існує і скінченна, то кажуть, що інтеграл (8.9.5) *збігається*; якщо границя (8.9.4) не існує або нескінченна, то кажуть, що інтеграл (8.9.5) *розбігається*.

Аналогічно вводиться поняття невласного інтеграла, коли особливою точкою є нижня межа інтегрування — точка a :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{a+\delta}^b f(x)dx.$$

Якщо особливими є обидві межі інтегрування, то інтеграл подають у вигляді суми

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad (8.9.6)$$

де $c \in (a, b)$. При цьому кажуть, що інтеграл по проміжку $[a, b]$ збігається, якщо збігається кожний з інтегралів у правій частині рівності (8.9.6). Якщо хоча б один із них розбігається, то інтеграл по проміжку $[a, b]$ розбігається.

Якщо особлива точка c є внутрішньою точкою проміжку $[a, b]$, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ подають у вигляді суми (8.9.6); його називають збіжним, якщо є збіжними інтеграли $\int_a^c f(x)dx$ і $\int_c^b f(x)dx$.

П р и к л а д 6. Інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ є невласним: $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$, особливою точкою є точка $x = 1$. Знаходимо границю:

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_0^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\delta \rightarrow +0} \arcsin(1-\delta) = \frac{\pi}{2}.$$

П р и к л а д 7. Розглянемо інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x}$. Особливою точкою є $x = 0$. Інтеграл розбігається, оскільки

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\delta}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\delta \rightarrow +0} \ln x \Big|_{\delta}^1 = +\infty.$$

П р и к л а д 8. Дослідимо на збіжність інтеграл $\int_0^a \frac{dx}{x^{\alpha}}$.

Зауважимо, що при $\alpha \leq 0$ інтеграл існує, оскільки у цьому випадку він є звичайним визначеним інтегралом.

Перейдемо до розгляду випадку $\alpha > 0$.

У попередньому прикладі ми встановили, що при $\alpha = 1$ інтеграл розбігається.

Нехай тепер $\alpha \neq 1$. Знаходимо границю

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\delta}^a \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{\delta \rightarrow +0} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_0^a = \begin{cases} \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{якщо } \alpha < 1; \\ +\infty, & \text{якщо } \alpha > 1. \end{cases}$$

Отже, маємо такий висновок: інтеграл $\int_0^a \frac{dx}{x^{\alpha}}$ збігається при $\alpha < 1$ і розбігається при $\alpha \geq 1$.

8.9.3. Ознаки збіжності невластних інтегралів

Тут ми обмежимося розглядом інтегралів від невід'ємних функцій¹. При цьому, безумовно, передбачається, що функції мають властивості, вказані в означеннях 45 та 46 невластного інтеграла.

Невластні інтеграли першого роду.

Теорема 18. *Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ задовольняють умову*

$$0 \leq f(x) \leq g(x).$$

Якщо інтеграл

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx \tag{B}$$

збігається, то збігається й інтеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx; \tag{A}$$

якщо інтеграл (A) розбігається, то інтеграл (B) також розбігається.

Теорема 19. *Якщо існує відмінна від нуля скінченна границя*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K, \quad (0 < K < +\infty),$$

то інтеграли (A) і (B) збігаються або розбігаються одночасно.

Покладемо в теоремі 19 $g(x) = \frac{1}{x^{\lambda}}$. Неважко переконатись, що тоді інтеграл (B) при $\lambda > 1$ збігається, при $\lambda \leq 1$ інтеграл (B) розбігається. Звідси отримуємо:

Наслідок. *Якщо при $x \rightarrow +\infty$ функція $f(x)$ задовольняє умову*

$$f(x) \sim \frac{K}{x^{\lambda}},$$

то при $\lambda > 1$ інтеграл (A) збігається, при $\lambda \leq 1$ інтеграл (A) розбігається.

¹Ознаки збіжності інтегралів для ширшого класу функцій див., наприклад, у [?], с. 115 – 122, [?], с. 522 – 539.

Приклад 9. Інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x\sqrt{x}}{1+x^2} dx$ розбігається, оскільки при $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{x\sqrt{x}}{1+x^2} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}.$$

Приклад 10. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$ є збіжним, оскільки

$$\frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} < \frac{x^2}{(1+x^2)^2}, \text{ а } \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \sim \frac{1}{x^2} \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

Невласні інтеграли другого роду.

Ми розглянемо невластні інтеграли $\int_a^b f(x)dx$, у яких особливою точкою є верхня межа інтегрування — точка b . Для цих інтегралів справджуються аналогі теорем 18 та 19, тільки у вказаних теоремах в інтегралах треба замінити верхню межу $+\infty$ межею b .

Враховуючи, що інтеграл

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$$

збігається при $\alpha < 1$ і розбігається при $\alpha \geq 1$, можна отримати ознаку, зручну на практиці.

Якщо при $x \rightarrow b - 0$ функція $f(x)$ задовольняє умову

$$f(x) \sim \frac{K}{(b-x)^\alpha},$$

то при $\alpha < 1$ інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ збігається; при $\alpha \geq 1$ цей інтеграл розбігається.

Приклад 11. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$.

Розв'язання. У даному інтегралі особливими точками є $x = 0$ і $x = \frac{\pi}{2}$. Подано інтеграл у вигляді, наприклад, такої суми інтегралів:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$$

і дослідимо збіжність інтегралів із правої частини рівності.

При $x \rightarrow 0$ $\sin x \sim x$, $\cos x \rightarrow 1$ і $\frac{1}{\sin^p x \cos^q x} \sim \frac{1}{x^p}$.

При $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ $\sin x \rightarrow 1$, $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sim \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ і $\frac{1}{\sin^p x \cos^q x} \sim \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^q}$.

На підставі отриманих результатів робимо висновок, що інтеграл збігається за умови $p < 1$, $q < 1$. При $p \geq 1$ або $q \geq 1$ інтеграл розбігається.

8.10. Застосування визначеного інтеграла

8.10.1. Обчислення площі

1°. Площа в прямокутних координатах. Площа S фігури $A_1A_2B_2B_1$ (рис. 7), обмеженої двома неперервними кривими $y_1(x)$ і $y_2(x)$ ($y_2(x) \geq y_1(x)$) і двома прямими $x = a$ і $x = b$ ($a < b$), дорівнює:

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx. \quad (8.10.1)$$

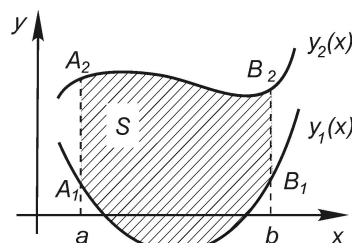


Рис. 49

2°. Площа, обмежена кривою, заданою в параметричному вигляді. Якщо $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($0 \leq t \leq T$) — параметричні рівняння замкненої кусочно-гладкої простої кривої C , яка точкою $(x(t), y(t))$ із збільшенням параметра t пробігається в напрямку «проти ходу годинникової стрілки» (рис. 50), то площа, обмежена кривою C , обчислюється за формулами:

$$S = - \int_0^T y(t)x'(t)dt = \int_0^T x(t)y'(t)dt, \quad (8.10.2)$$

або

$$S = \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt. \quad (8.10.3)$$

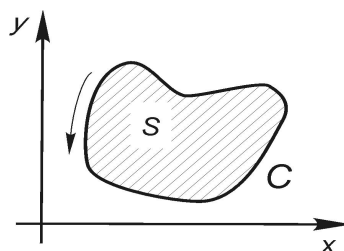


Рис. 50

3°. Площа в полярних координатах.

Площа, обмежена неперервною кривою $\rho = \rho(\varphi)$ і двома променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\alpha < \beta$ (рис. 51), дорівнює

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi. \quad (8.10.4)$$

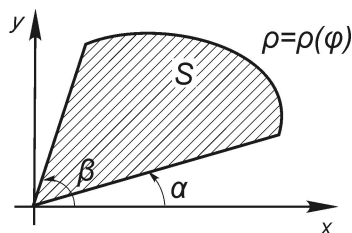


Рис. 51

Приклад 1. Обчислити площу, обмежену лініями $y = x^2$ і $x + y = 2$.

Розв'язання. Будуємо графіки вказаних ліній (рис. 52)

Знаходимо координати точок перетину ліній:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x + y = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, y = 1; \\ x = -2, y = 4. \end{cases}$$

Обчислюємо площу:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 ((2-x) - x^2) dx = \\ &= \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 = \\ &= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3} \right) = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

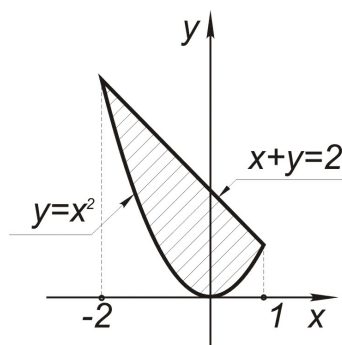


Рис. 52

Приклад 2. Обчислити площу, обмежену лініями:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 6 \sin t, \end{cases} \quad y = 3, \quad (y \geq 3).$$

Розв'язання. Маємо випадок параметричного задання функції. Неважко бачити, що крива $x = 2 \cos t$, $y = 6 \sin t$ — це еліпс, справді:

$$\frac{x}{2} = \cos t, \quad \frac{y}{6} = \sin t \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Графіки заданих функцій зображені на рис. 53. Знаходимо точки перетину графіків заданих функцій.

Розв'язуємо систему

$$\begin{cases} y = 3, \\ y = 6 \sin t, \end{cases} \Leftrightarrow 6 \sin t = 3 \Leftrightarrow \sin t = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Задані функції $x(t)$ і $y(t)$ періодичні, їхній основний період — $T = 2\pi$. Коли параметр t змінюється в межах $0 \leq t \leq T$, точка $(x(t), y(t))$ пробігає еліпс «проти годинникової стрілки» (напрямок руху вказано на рисунку стрілкою).

Неважко бачити, що точці A (див. рис. 53) відповідає значення $t = \frac{\pi}{6}$, точці B — значення $t = \frac{5\pi}{6}$.

Площу області знайдемо, виходячи з таких міркувань: область є симетричною відносно осі Oy , тому достатньо обчислити площу S_1 тієї її частини, у якій $x > 0$. Обчислимо площу області, обмеженої віссю Oy , дугою AC еліпса і прямою $y = 3$. Оскільки x і y рівноправні змінні, то

$$S_1 = \int_3^6 x(y) dy.$$

Параметричне задання рівняння кривої відповідає заміні змінної у визначеному інтегралі: якщо покласти $y = 6 \sin t$, то отримаємо, що $x(y(t)) = 2 \cos t$. Обчислимо площу S_1 :

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos t \cdot 6 \cos t dt = 12 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 6 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= 6 \left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\sin 2t}{2} \right] = 2\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

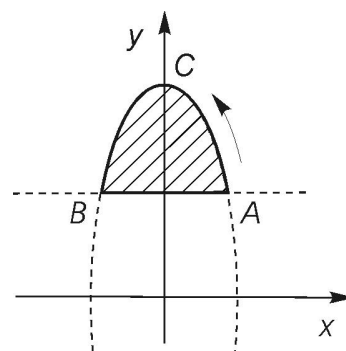


Рис. 53

Оскільки $S = 2S_1$, то $S = 4\pi - 3\sqrt{3}$.

Приклад 3. Обчислити площу, обмежену еліпсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Розв'язання. Перейдемо до параметричного задання кривої, покладемо $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. При цьому точка пробігає еліпс проти годинникової стрілки. Скористаємося формулою

$$S = \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)y'(t) - y(t)x'(t)) dt.$$

Знаходимо $xdy - ydx = ab(\cos^2 t + \sin^2 t)dt = ab \cdot dt$,

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab.$$

Приклад 4. Обчислити площу, обмежену кардіоїдою $\rho = 1 + \cos \varphi$.

Розв'язання. Для того, щоб скористатися формулою (8.10.4), нам потрібно знати межі інтегрування. Якщо межі не вказуються явно, то їх знаходять з умови $\rho(\varphi) \geq 0$, при цьому вибирають розв'язки нерівності з проміжку $[0, 2\pi]$.

Знаходимо, що нерівність $1 + \cos \varphi \geq 0$ справджується для будь-яких значень φ , тобто кут φ змінюється в межах $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Крива зображена на рис. 54.

Обчислюємо площу, обмежену кривою:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \left(2\pi + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi \right) = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

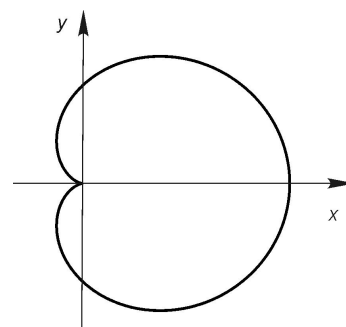


Рис. 54

8.10.2. Обчислення довжини дуги

1°. Довжина дуги в прямокутних координатах. Довжина дуги гладкої кривої

$$y = y(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

дорівнює

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (8.10.5)$$

2°. Довжина дуги кривої, заданої параметрично. Якщо рівняння кривої C мають вигляд

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t_1 \leq t \leq t_2),$$

де функції $x(t)$, $y(t)$ мають неперервні похідні, то довжина кривої C дорівнює

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (8.10.6)$$

3°. Довжина дуги в полярних координатах. Якщо

$$\rho = \rho(\varphi) \quad (\alpha \leq \varphi \leq \beta),$$

де функція $\rho(\varphi)$ має неперервну похідну, то довжина дуги відповідного відрізка кривої дорівнює

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi. \quad (8.10.7)$$

Приклад 5. Обчислити довжину дуги кривої $y = x^{\frac{3}{2}}$ ($0 \leq x \leq 4$).

Розв'язання. Знаходимо

$$y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}, \quad 1 + y'^2 = 1 + \frac{9}{4} x.$$

Тоді

$$\begin{aligned} s &= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{4 + 9x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot (4 + 9x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \\ &= \frac{1}{27} \left((\sqrt{40})^3 - (\sqrt{4})^3 \right) = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1). \end{aligned}$$

Приклад 6. Обчислити довжину дуги астроїди $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

Розв'язання. Функції $x(t)$ і $y(t)$ періодичні з періодом 2π . Крива є симетричною відносно осей координат, вона має вигляд, зображений на рис. 55.

Знайдемо довжину дуги кривої, що відповідає зміні параметра в межах $[0, \frac{\pi}{2}]$. Вона становить четверту частину довжини дуги усієї кривої, тобто

$$\begin{aligned} s &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a \cos^3 t)^2 + (a \sin^3 t)^2} dt = \\ &= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} dt = \\ &= 12a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = 6a \sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a. \end{aligned}$$

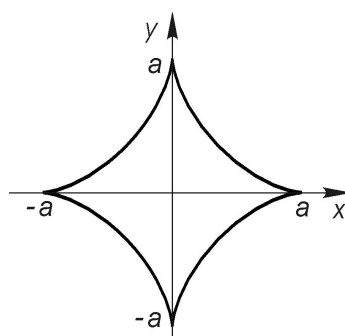


Рис. 55

Приклад 7. Знайти довжину дуги кардіоїди $\rho = 1 + \cos \varphi$.

Розв'язання. Крива симетрична відносно осі Ox (див. рис. 54). Тому

$$s = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + (1 + \cos \varphi)^2} d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} d\varphi =$$

$$= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi = 4 \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8 \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 8.$$

8.10.3. Площа поверхні обертання

1°. Площа поверхні обертання в прямокутних координатах. Нехай крива C задана рівнянням $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, і нехай функція $y(x)$ невід'ємна і неперервна разом зі своєю похідною на проміжку $[a, b]$. Тоді поверхня, утворена обертанням кривої C навколо осі Ox має площу S , яка може бути обчислена за формулою

$$S = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (8.10.8)$$

2°. Площа поверхні обертання дуги кривої, заданої параметрично. Якщо рівняння кривої C мають вигляд

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t_1 \leq t \leq t_2),$$

де функції $x(t)$, $y(t)$ мають неперервні похідні, $y(t) \geq 0$, то площа поверхні, утвореної обертанням кривої C навколо осі Ox дорівнює

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (8.10.9)$$

3°. Площа поверхні, утвореної обертанням гладкої кривої C , заданої в полярних координатах. Якщо крива C , задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, обертається навколо полярної осі, то площа утвореної поверхні обчислюється за формулою

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi) \sin(\varphi) \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi. \quad (8.10.10)$$

Приклад 8. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої $y = e^{-x}$ від $x = 0$ до $x = +\infty$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-x} \sqrt{1 + e^{-2x}} dx = \left\{ \begin{array}{ll} e^{-x} = t, & dt = -e^{-x} dx \\ x = 0, & t = 1, \\ x = +\infty, & t = 0. \end{array} \right\} = 2\pi \int_1^0 \sqrt{1 + t^2} (-dt) = \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + t^2} dt = 2\pi \int_0^1 \frac{1 + t^2}{\sqrt{1 + t^2}} dt = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} dt + 2\pi \int_0^1 t \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}} dt \end{aligned}$$

Перший з двох останніх інтегралів — табличний:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} dt = \ln \left(t + \sqrt{1 + t^2} \right) \Big|_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}),$$

а другий візьмемо частинами:

$$\int_0^1 t \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt = t \cdot \sqrt{1+t^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1+t^2} = \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt.$$

Тобто ми отримали таку рівність:

$$\int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt = \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt,$$

або

$$\int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Остаточно знаходимо, що

$$S = \pi \left[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) \right].$$

П р и к л а д 9. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox астроїди

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я. Астроїда зображена на рис. 55 (див. с. 136). Оскільки крива симетрична відносно координатних осей, обчислимо площу, утворену обертанням дуги кривої, розташованої у першому квадранті, і подвоїмо її.

$$S = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} a \sin^3 t \sqrt{(a \cos^3 t)' + (a \sin^3 t)' } dt = 12a^2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t dt = \frac{12a^2\pi}{5}.$$

П р и к л а д 10. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кардіоїди $\rho = 2a(1 + \cos \varphi)$.

Р о з в ' я з а н н я. Кардіоїда зображена на рис. 54 (див. с. 135). Крива симетрична відносно осі Ox , для верхньої половини кривої полярний кут φ змінюється в межах $0 \leq \varphi \leq \pi$

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^\pi 2a(1 + \cos \varphi) \cdot \sin \varphi \cdot 2a \sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + (1 + \cos \varphi)' } d\varphi = \\ &= 8a^2\pi \int_0^\pi (1 + \cos \varphi) \sin \varphi \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} d\varphi = 8a^2\pi \int_0^\pi 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot 2 \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\ &= 64a^2\pi \int_0^\pi \cos^4 \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = 64a^2\pi \left(-2 \frac{\cos^5 \frac{\varphi}{2}}{5} \right) \Big|_0^\pi = \frac{128a^2\pi}{5} \end{aligned}$$

8.10.4. Обчислення об'ємів

1°. Об'єм тіла з відомими поперечними перетинами.

Якщо об'єм V тіла існує і $S = S(x)$ ($a \leq x \leq b$) — площа перетину тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox в точці x (рис. 56), то

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (8.10.11)$$

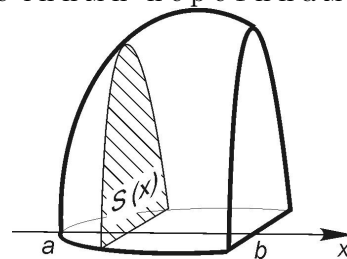


Рис. 56

2°. Об'єм тіла обертання.

Об'єм V_{Ox} тіла, отриманого обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої графіком невід'ємної інтегровної функції $y(x)$ ($a \leq x \leq b$), віссю Ox , прямими $x = a$ і $x = b$ (рис. 57), дорівнює

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b y^2(x) dx. \quad (8.10.12)$$

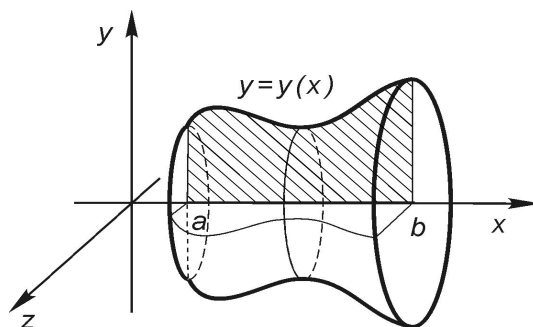


Рис. 57

Об'єм V_{Oy} тіла, отриманого обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої графіком невід'ємної інтегровної функції $y(x)$ ($a \leq x \leq b$), віссю Ox , прямими $x = a$ і $x = b$ (осьовий перетин тіла зображено на рис. 58), дорівнює

$$V_{Oy} = 2\pi \int_a^b xy(x) dx. \quad (8.10.13)$$

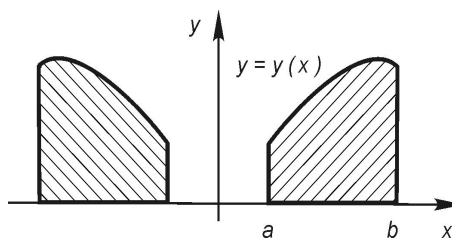


Рис. 58

Приклад 11. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2 + 4y^2$, $z = 2$.

Розв'язання. Тіло розташоване між площинами $z = 0$ і $z = 2$. Переріз тіла площиною, що проходить через точку з аплікатою $z > 0$ і перпендикулярною до осі Oz (рис. 59), це крива $z = x^2 + 4y^2$ (тут z — стала величина). Ця крива являє собою еліпс. Зведемо його рівняння до канонічного вигляду:

$$z = x^2 + 4y^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{z/4} = 1.$$

Як бачимо, велика піввісь еліпса дорівнює $\sqrt{z}$, його мала піввісь має довжину $\frac{\sqrt{z}}{2}$.

Як відомо (див. приклад 3 на сторінці 135), площа S , обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, дорівнює $S = \pi ab$. Отже, площа $S(z)$ перетину тіла площиною, перпендикулярною до осі Oz , дорівнює

$$S(z) = \pi \sqrt{z} \frac{\sqrt{z}}{2} = \frac{\pi z}{2}, \quad z > 0.$$

Знаходимо об'єм тіла за відомою площею перетину:

$$V = \int_0^2 S(z) dz = \int_0^2 \frac{\pi z}{2} dz = \frac{\pi z^2}{4} \Big|_0^2 = \pi.$$

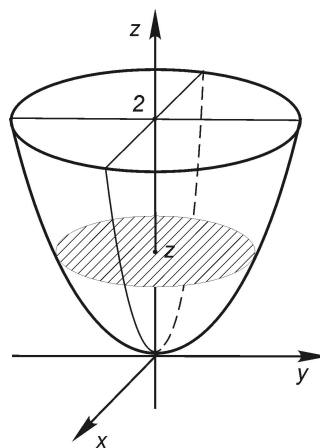


Рис. 59

Приклад 12. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої графіками функцій $y = 2 \sin x$ і $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$).

Розв'язання. Осьовий перетин тіла показано на рис. 60. Для обчислення об'єму скористаємося формулою (8.10.12). Якщо фігура обмежена графіками двох функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ ($y_2 \geq y_1 \geq 0$), прямими $x = a$ і $x = b$, то формула обчислення об'єму тіла обертання навколо осі Ox набуває вигляду

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x)) dx.$$

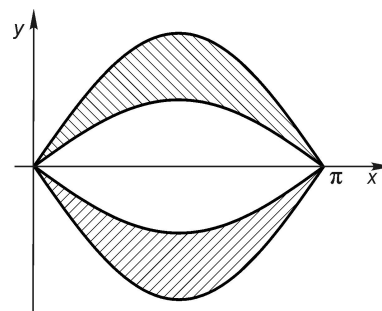


Рис. 60

Знаходимо об'єм:

$$V_{Ox} = \pi \int_0^\pi (4 \sin^2 x - \sin^2 x) dx = \frac{3\pi}{2} \int_0^\pi (1 + \cos 2x) dx = \frac{3\pi^2}{2}.$$

Приклад 13. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2$, $y = 0$ і прямою $x = 1$.

Розв'язання. Осьовий перетин тіла зображено на рис. 61. Для обчислення об'єму скористаємося формулою (8.10.13):

$$V_{Oy} = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^2 dx = 2\pi \int_0^1 x^3 dx = 2\pi \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

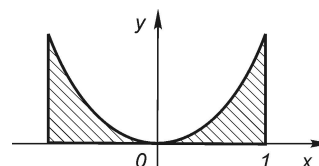


Рис. 61

8.11. Визначений інтеграл в Maple

8.11.1. Обчислення визначеного інтеграла

Обчислення визначених інтегралів здійснюється тими ж функціями **int** та **Int**, в яких треба вказати межі інтегрування, наприклад, **x=a..b**, якщо інтеграл береться за змінною **x**.

Приклад 1.

```
> Int(sin(x), x=0..Pi)=int(sin(x), x=0..Pi);
```

$$\int_0^\pi \sin(x) dx = 2$$

Приклад 2.

```
> Int(1/(x^2+1), x=-1..1)=int(1/(x^2+1), x=-1..1);
```

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2}$$

8.11.2. Заміна змінних та інтегрування частинами визначеного інтеграла

Заміна змінної у визначеному інтегралі та інтегрування частинами визначеного інтеграла здійснюються функціями **Change** і **Parts** з пакету **IntegrationTools**.

П р и к л а д 3.

```
> restart;
> with(IntegrationTools):
> V:=Int(sqrt(1-x^2),x=-1..1);
```

$$V := \int_{-1}^1 \sqrt{-x^2 + 1} dx$$

```
> Change(V,x=sin(t));value(%);
```

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{-\sin(t)^2 + 1} \cos(t) dt$$

$$\frac{\pi}{2}$$

```
> V:=Int(arctan(x),x=0..1);
```

$$V := \int_0^1 \arctan(x) dx$$

```
> Parts(V,arctan(x));value(%);
```

$$\frac{\pi}{4} - \left(\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx \right)$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$$

8.11.3. Невласні інтеграли

Інтеграли з нескінченними межами інтегрування

П р и к л а д 4.

```
> Int(1/(x^2+1),x=0..infinity)=int(1/(x^2+1),x=0..infinity);
```

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2}$$

П р и к л а д 5.

```
> Int(1/x,x=1..infinity)=int(1/x,x=1..infinity);
```

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty$$

П р и к л а д 6.

```
> Int(cos(x),x=0..infinity)=int(cos(x),x=1..infinity);
```

$$\int_0^{\infty} \cos(x) dx = \text{undefined}$$

Інтеграли від необмежених функцій

Приклад 7.

```
> Int(1/sqrt(1-x^2),x=0..1)=int(1/sqrt(1-x^2),x=0..1);
```

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{-x^2+1}} dx = \frac{\pi}{2}$$

Приклад 8. Дослідити інтеграл $\int_0^1 \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx$ на збіжність.

Розв'язання. Застосуємо до інтеграла формулу інтегрування частинами, вибравши $u = \ln \sin x$:

```
> V:=Int(ln(sin(x))/sqrt(x),x=0..1);
```

$$V := \int_0^1 \frac{\ln(\sin(x))}{\sqrt{x}} dx$$

```
> Parts(V,ln(sin(x)));
```

$$2 \ln(\sin(1)) - \int_0^1 \frac{2\sqrt{x} \cos(x)}{\sin(x)} dx$$

Неважко бачити, що

$$\frac{2\sqrt{x} \cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x \cos x}{\sin x} \sim \frac{2}{\sqrt{x}} \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Скориставшись ознакою порівняння (див. с. 132), дійдемо висновку, що $\int_0^1 \frac{2\sqrt{x} \cos(x)}{\sin(x)} dx$ збіга-

ється, оскільки інтеграл $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}} dx$ є збіжним.

8.11.4. Застосування визначеного інтеграла

Обчислення площі плоскої фігури

Приклад 9. Обчислити площу, обмежену лініями $y = 2x - x^2$ і $x + y = 0$.

Розв'язання. Будуємо малюнок:

```
> restart;
> with(plots):
> implicitplot([y=2*x-x^2,x+y=0],x=-1..4,y=1..-4);
```

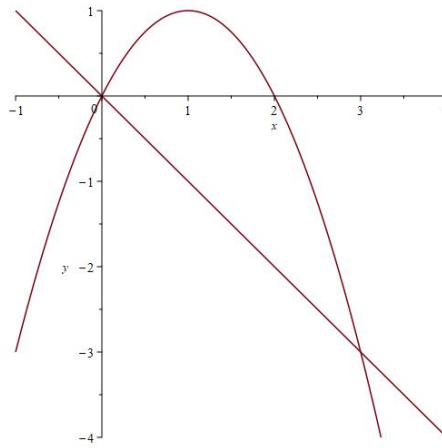


Рис. 62

Знаходимо точки перетину ліній:

```
> solve({y=2*x-x^2,x+y=0});
```

$$\{x = 0, y = 0\}, \{x = 3, y = -3\}$$

Обчислюємо площу, обмежену лініями:

```
> S:=int((2*x-x^2)-(-x),x=0..3);
```

$$S := \frac{9}{2}$$

Приклад 10. Знайти площу, обмежену віссю OX і однією аркою циклоїди:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

Розв'язання. Будуємо фігуру. Для побудови графіка параметру a треба надати якесь числове значення. Покладемо, наприклад, $a = 2$.

```
> a:=2:plot([a*(t-sin(t)),a*(1-cos(t)),t=0..2*Pi],[a*t,0,t=0..2*Pi]),
x=-0.5..2*Pi*a,y=0..2*a,color=[red,green],scaling=constrained);a:='a':
```

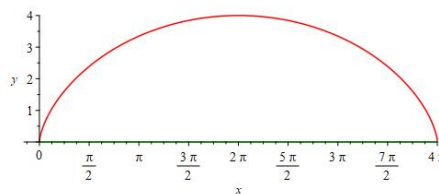


Рис. 63

Обчислюємо площу. Звертаємо увагу, що із збільшенням параметра t $x(t)$ зростає. Тому у даному прикладі маємо $S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$:

```
> S:=int(a*(1-cos(t))*diff(a*(t-sin(t)),t),t=0..2*Pi);
```

$$S := 3\pi a^2$$

Приклад 11. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (лемніската).

Розв'язання. Маємо полярну систему координат. Для побудови кривої знаходимо межі зміни кута φ з умови $\rho(\varphi) \geq 0$. Неважко бачити, що $\cos 2\varphi \geq 0$ при $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

Будуємо криву:

```
> a:=1:plot([[a*\sqrt{\cos2t},t,t=-Pi/4..Pi/4],
[a*\sqrt{\cos2t},t,t=3*Pi/4..5*Pi/4]],coords=polar,scaling=constrained);a:='a':
```

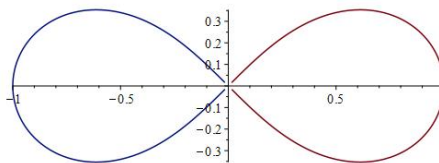


Рис. 64

Оскільки крива є симетричною відносно координатних осей, обчислимо площу, що лежить у першому квадранті і помножимо її на 4:

```
> S:=4*int(1/2*a^2*cos(2*t),t=0..Pi/4);
```

$$S := a^2$$

Обчислення довжини дуги кривої

Приклад 12. Обчислити довжину дуги параболи $y = 2\sqrt{x}$ від $x = 0$ до $x = 1$.

Розв'язання.

```
> s:=int(sqrt(1+(diff(2*sqrt(x),x))^2),x=0..1);
```

$$s := \sqrt{2} + \frac{\ln(3 + 2\sqrt{2})}{2}$$

Приклад 13. Знайти довжину кривої

$$\begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = a(2 \sin t - \sin 2t). \end{cases}$$

Розв'язання.

```
> s:=int(a*sqrt((diff(2*cos(t)-cos(2*t),t))^2+(diff(2*sin(t)-sin(2*t),t))^2),
t=0..2*Pi);
```

$$s := 16a$$

Приклад 14. Знайти довжину кардіоїди $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

Розв'язання.

```
> s:=a*int(sqrt((1+cos(t))^2+(diff(1+cos(t),t))^2),t=0..2*Pi);
```

$$8a$$

Обчислення об'ємів

Приклад 15. Обчислити об'єм тора, утвореного обертанням круга $x^2 + (y - b)^2 \leq a^2$, $b > a$ навколо осі Ox .

Розв'язання. Об'єм тора знайдемо як різницю об'ємів, утворених обертанням навколо осі Ox фігур $ABCDE$ та $ABKDE$ (рис 65).

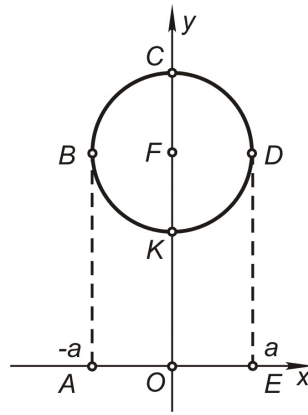


Рис. 65

Дуга BCD описується рівнянням $y = b + \sqrt{a^2 - x^2}$, дуга BKD — рівнянням $y = b - \sqrt{a^2 - x^2}$. Обчислюємо об'єм:

```
> assume(a>0):y1:=b+sqrt(a^2-x^2):y2:=b-sqrt(a^2-x^2):
  V:=Pi*int(y1^2-y2^2,x=-a..a);
  V := 2π²ba²
```

Приклад 16. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням кривої $r = \cos^2 \varphi$ навколо полярної осі.

Розв'язання. Побудуємо криву

```
> plot([r(t),t,t=0..2*Pi],coords=polar);
```

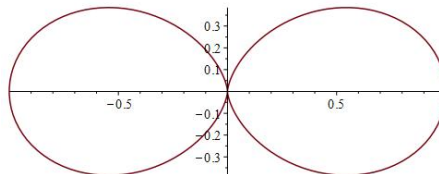


Рис. 66

Обчислимо об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox частини фігури, обмеженої кривою і віссю Ox , що лежить у першому квадранті. Отриманий об'єм помножимо на 2.

Перейдемо до параметричного задання кривої:

$$\begin{cases} x = r(t) \cos t \\ y = r(t) \sin t \end{cases}$$

Дузі кривої, що лежить у першому квадранті, відповідають значення $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Обчислимо об'єм:

```
> r:=t->cos(t)^2: V:=2*Pi*int(r(t)^2*sin(t)^2*diff(r(t)*cos(t),t),t=Pi/2..0);
  V := 4π/21
```

Зауваження. Об'єм тіла, утвореного обертанням лінії $r = r(\varphi)$ навколо полярної осі, можна обчислити за формулою

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin \varphi d\varphi.$$

```
> V:=2/3*Pi*int(r(t)^3*sin(t),t=0..Pi);
```

$$V := \frac{4\pi}{21}$$

Завдання до розділу

Обчислити інтеграли:

$$1. \int_{-2}^0 (x+2)^2 \cos 3x dx.$$

$$3. \int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$$

$$5. \int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx.$$

$$7. \int_0^1 \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1+x^2} dx.$$

$$9. \int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$11. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx.$$

$$13. \int_0^{\pi} \frac{6 \sin^2 x}{3 \cos 2x - 4} dx.$$

$$2. \int_0^1 (x+1) \ln^2(x+1) dx.$$

$$4. \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx.$$

$$6. \int_0^1 \frac{(x^2+1) dx}{(x^3+3x+1)^2}.$$

$$8. \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx.$$

$$10. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$$

$$12. \int_2^9 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

$$14. \int_0^{\pi/4} \frac{7+3 \operatorname{tg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx.$$

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$15. y = (x-2)^3, y = 4x-8.$$

$$16. y = x^2 \sqrt{4-x^2}, y = 0, (0 \leq x \leq 2).$$

$$17. y = \cos x \sin^2 x, y = 0, (0 \leq x \leq \pi/2). \quad 18. y = \frac{x}{1+\sqrt{x}}, y = 0, x = 1.$$

$$19. \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \quad y = 2 \quad (y \geq 2). \quad 20. \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad y = 1, \quad (0 < x < 2\pi, y \geq 1).$$

$$21. \rho = 4 \cos 3\varphi, r = 2 \quad (r \geq 2).$$

$$22. \rho = \cos \varphi - \sin \varphi.$$

Обчислити довжину дуги кривої:

$$23. y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}.$$

$$24. y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq \frac{7}{9}.$$

$$25. \begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

$$26. \begin{cases} x = 10 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$27. \rho = \sqrt{2} e^\varphi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$28. \rho = 2(1 - \cos \varphi), -\pi \leq \varphi \leq -\pi/2.$$

Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$29. z = x^2 + 9y^2, z = 3. \quad 30. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{100} = 1, z = 5, z = 0.$$

Обчислити об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями:

$$31. y = 2x - x^2, y = -x + 2. \quad 32. y = x^2, y^2 - x = 0.$$

$$33. x^2 + (y-2)^2 = 1. \quad 34. y = x^3, y = \sqrt{x}.$$

Обчислити об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями:

- 35.** $y = \ln x$, $x = 2$, $y = 0$. **36.** $y = \sqrt{x-1}$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0, 5$.
37. $y = (x-1)^2$, $y = 1$. **38.** $y = \arccos x$, $y = \arcsin x$, $x = 0$.

Бібліографічний список

1. Каленюк П. І., Дрогомирецька Х. Т. Математичний аналіз функцій дійсної змінної. Львів : Львівська політехніка, 2016. 592 с.
2. Славко Г. В. Математика програмістам : навч. підруч. Кременчук : ПП Щербатих О. В., 2018. 184 с.
3. Зайцев Є. П. Вища математика : навч. посіб. Київ : Алерта, 2018. 608 с.
4. Clark J., Kapadia D. Introduction to Calculus: A Computational Approach. Wolfram Media, Inc., 2024. 538 с.
5. Stewart J., Clegg D., Watson S. Calculus. 9th ed. Brooks Cole, 2020. 1252 с.
6. Thompson I. Understanding Maple. Cambridge University Press, 2016. 235 с.

Навчальне видання

Михайлова Тетяна Федорівна, Максименкова Юлія Анатоліївна,

Нечай Ігор Вікторович

**МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ.
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ
ФУНКЦІЇ
ЧАСТИНА І**

Навчальний посібник

Електронне видання

Відповідальний редактор Ю. А. Максименкова
Комп'ютерна верстка Ю. А. Максименкова
Дизайн обкладинки Ю. А. Максименкова

Експертний висновок склав канд. фіз.-мат. наук, доц. О. Гулівець

Зареєстровано НМВ УДУНТ (№ 1.828 від 18.06.2025)

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк.8,66. Обл.-вид. арк.8,76.
Зам. № 74

Видавець: Український державний університет науки і технологій.
вул. Лазаряна, 2, ауд. 2216, ауд. 263 (наукова бібліотека)
м. Дніпро, 49010.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 7709 від 14.12.2022

$$\begin{aligned} \text{and } \langle \mathbf{r}_i | \mathbf{r}_j \rangle &= \delta_{ij} \text{ then } \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_j = \delta_{ij} \\ \text{then } \mathbf{r} &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2n-1}}} \mathbf{R}(\mathbf{r}, \mathbf{r} - \mathbf{1}) = r_{yx}^* \frac{\sum y}{\sum x}, (4) \end{aligned}$$

$$r_i = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i) \cdot (x_i - \bar{x}_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2}}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}^2(\epsilon) &= \tilde{S}^2(\epsilon) = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n-2n'} \cdot (1) \quad yx^* \frac{\sum y}{\sum x} \times \\ \bar{y}_1 &= \frac{\sum_{t=2}^n y_t}{n-1}; \quad \bar{y}_2 = \frac{\sum_{t=2}^n y_{t-1}}{n-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ex} &= \frac{dQ_{ex}}{de} \cdot \frac{e}{Q_{ex}}; \quad \epsilon_{in} = \frac{dQ_{in}}{de} \cdot \frac{e}{Q_{in}} \cdot \sqrt{\frac{4-3}{8/5}} \\ NE(e) &= Q_{ex}(e) - e Q_{in}(e), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta NE &= \frac{dQ_{ex}}{de} \Delta e - e \frac{dQ_{in}}{de} \Delta e \\ B(a, b) &= \int_0^1 (1-x)^{b-1} dx \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{b-1}{2}\right) \int_0^1 x^{\frac{b-1}{2}} (1-x)^{b-1} dx = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx + b_n \sin n$$

$$\begin{aligned} &= \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^{a-1} \\ &= \frac{b-1}{a} B(a, b) \\ B(a, b) &= \frac{b}{a+b} \end{aligned}$$