МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ НАУКИ І ТЕХНОЛОГІЙ

Т. Ф. Михайлова, Ю. А. Максименкова, І. В. Нечай

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ. РЯДИ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

ЧАСТИНА II

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Дніпро, 2025

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ НАУКИ І ТЕХНОЛОГІЙ

Т. Ф. Михайлова, Ю. А. Максименкова, І. В. Нечай

Математичний аналіз.

Ряди. Диференціальне та інтегральне числення функції кількох змінних.

Частина II

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ДНІПРО
2025

УДК 517.2/3(075.8)
М 69

Авторський колектив:
Михайлова Т. Ф., Максименкова Ю. А., Нечай І. В.

Рекомендовано Радою якості освітньої діяльності УДУНТ
Протокол № 8 від 18.04.2025 р.

М 69 **Михайлова, Т. Ф.** Математичний аналіз. Ряди. Диференціальне та інтегральне числення функції кількох змінних. Частина 2 : навч. посіб. / Т. Ф. Михайлова, Ю. А. Максименкова, І. В. Нечай ; Укр. держ. ун-т науки і технологій. – Електрон. вид. – Дніпро : УДУНТ, 2025. – 116 с.

ISBN 978-617-8314-53-8 (PDF)

У навчальному посібнику викладено розділи математичного аналізу з прикладами розв'язання типових задач. Використано також один з нових підходів до розв'язання типових задач у середовищі MapleSoft.

Посібник створений відповідно до вимог робочої програми з дисципліни Математичний аналіз для спеціальностей А4 Середня освіта (А4.08 Середня освіта (Фізика та астрономія)), освітня програма STEM-навчання.

Може бути використаний студентами та викладачами інших технічних спеціальностей.

Іл. 55, бібліогр. 6 назв.

УДК 517.2/3(075.8)

ISBN 978-617-8314-53-8 (PDF)
DOI 10.15802/978-617-8314-53-8

Зміст

Передмова

Посібник створений відповідно до вимог робочої програми з дисципліни Математичний аналіз для спеціальностей A4 Середня освіта (A4.08 Середня освіта (Фізика та астрономія)), освітня програма STEM-навчання. Мета посібника- дати студентам найдоступніший спосіб здобуття нових знань з розділів математичного аналізу з прикладами розв'язання типових задач. Використано також один з нових підходів до розв'язання типових задач у середовищі MapleSoft.

В посібнику викладено основні поняття математичного аналізу. Його можна безпосередньо використовувати і за прямим призначенням, як навчальний посібник, і для самостійного ознайомлення з курсом приведених розділів математичного аналізу.

Кожний розділ присвячений певній темі курсу математичного аналізу і має таку структуру. Протягом розділу розглянуто теоретичний матеріал, підкріплений прикладами. Останній параграф розділу присвячений розв'язанню типових завдань у програмному середовищі MapleSoft. В кінці розділу, для закріплення основних теоретичних положень і навичок розв'язування задач для самоконтролю, читачеві пропонуються завдання для самостійного розв'язування.

Цей посібник присвячено дослідженню та застосуванню рядів та диференціальному та інтегральному численню функцій кількох змінних.

В першій частині, в розділах 1,2,3 розглянуто відповідно числові, функціональні ряди та ряди Фур'є; їх різновиди дослідження та застосування до розв'язування реальних задач наближеними методами.

Друга частина присвячена наступному рівню математичного аналізу, а саме диференціальному та інтегральному численню функцій декількох змінних на прикладі функцій двох змінних. Розділи 4,5,6,7 визначають такі поняття як диференціальне числення функцій кількох змінних, поняття подвійних та криволінійних інтегралів та методів їх обчислення,практичного застосування,в тому числі вирішенні завдань в системі Maple.

Посібник відображає багаторічний досвід роботи його авторів у закладах вищої освіти і практиковані методичні прийоми подання навчального матеріалу в найбільш компактній і доступній формі. Він підводить підсумок багаторічного досвіду викладання математичного аналізу на кафедрі фізики та прикладної математики в Навчально-науковому інституті "Дніпровський інститут інфраструктури і транспорту".

Нехай він буде корисним новим студентам!

Частина I

Ряди

Тема 1

Числові ряди

1.1. Основні поняття

Означення 1. *Нехай задана числова послідовність* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *Вираз*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \tag{1.1.1}$$

називають *ч и с л о в и м р я д о м.* *Числа* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *називають* *ч л е н а м и р я д у.*

Означення 2. *Суму* n *перших членів ряду*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{1.1.2}$$

називають n*-о ю ч а с т и н н о ю с у м о ю ряду.*

Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = S$, *то її називають* *с у м о ю р я д у* (1.1.1) *і кажуть, що ряд* (1.1.1) *з б і г а є т ь с я. Якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ *або не існує, то кажуть, що ряд* (1.1.1) *р о з б і г а є т ь с я.*

П р и к л а д 1. Найпростішим прикладом ряду є геометрична прогресія

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$$

Якщо знаменник прогресії $q \neq 1$, то сума n її перших членів дорівнює

$$s_n = a\frac{1-q^n}{1-q}.$$

При $|q| < 1$ існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} a\dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{a}{1-q}$, тобто при $|q| < 1$ маємо збіжний ряд — нескінченно спадну геометричну прогресію. При $|q| \geqslant 1$ геометрична прогресія дає приклад розбіжного ряду:

при $|q| > 1$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} a\dfrac{1-q^n}{1-q} = \infty;$

при $q = 1$ $\quad s_n = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ доданків}} = na, \quad \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty;$

при $q = -1$ $\quad s_1 = a,\ s_2 = a - a = 0,\ s_3 = a,\ \ldots,\ s_{2k-1} = a,\ s_{2k} = 0,\ k = 1, 2, \ldots,$
границя $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ не існує.

П р и к л а д 2. Розглянемо ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

Його n-на частинна сума має вигляд

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

Оскільки існує скінченна границя S послідовності частинних сум $\{s_n\}$, то ряд збігається і його сума дорівнює

$$S=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1.$$

Означення 3. *Ряд, утворений з ряду* (1.1.1) *відкиданням перших n членів*

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k, \tag{1.1.3}$$

називають з а л и ш к о м ряду (1.1.1).

Теорема 1. *Якщо ряд* (1.1.1) *збігається, то збігається і ряд* (1.1.3)*, і навпаки, якщо збігається ряд* (1.1.3)*, то збігається і ряд* (1.1.1).

Із теореми 1 випливає, що *відкидання скінченної кількості членів ряду не впливає на його збіжність.*

Нехай ряд (1.1.1) збігається і має суму S, через s_n позначимо частинну суму ряду (1.1.1), символом r_n позначимо суму ряду (1.1.3). Тоді $S=s_n+r_n$. Перейдемо у цій рівності до границі при $n\to\infty$ (цей перехід є правомірним, оскільки $\{s_n\}$ і $\{r_n\}$ — збіжні послідовності):

$$\lim_{n\to\infty}S=\lim_{n\to\infty}s_n+\lim_{n\to\infty}r_n\Rightarrow S=S+\lim_{n\to\infty}r_n\Rightarrow\lim_{n\to\infty}r_n=0.$$

Тобто справджується твердження:
Теорема 2. *Якщо ряд* (1.1.1) *збігається, то сума ряду* (1.1.3) *прямує до нуля, коли $n\to\infty$.*

1.2. Необхідна умова збіжності ряду

Розглянемо умови, за яких ряд (1.1.1) збігається. Нехай $\{s_n\}$ — послідовність його частинних сум. Тоді загальний член a_n ряду можна можна подати у вигляді $a_n=s_n-s_{n-1}$. Якщо ряд збігається, тобто якщо $s_n\to S$ при $n\to\infty$, де S — деяке фіксоване число, то існує границя

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=S-S=0.$$

Отже, ми отримали твердження:

Твердження 1.2. 1. *Якщо ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *збігається, то*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{1.2.1}$$

Умова $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ є н е о б х і д н о ю умовою збіжності ряду. При невиконанні цієї умови ряд розбігається. Якщо ця умова виконується, то ряд може бути як збіжним, так і розбіжним.

П р и к л а д 1. Очевидно, що для ряду $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$ умова (1.2.1) виконана: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Покажемо, що ряд є розбіжним. Для будь-якого натурального $n > 1$ маємо

$$s_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ доданків}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Звідси випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, тобто даний ряд розбігається.

1.3. Достатні умови збіжності рядів з додатними членами

1.3.1. Ознаки порівняння

Нехай задані два ряди з д о д а т н и м и членами

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_n \tag{A}$$

і

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_n. \tag{B}$$

Теорема 3 (перша ознака порівняння)**.** *Якщо, починаючи з деякого* $n > N$, *виконується нерівність*

$$a_n \leqslant b_n,$$

то із збіжності ряду (B) *випливає збіжність ряду* (A)*, із розбіжності ряду* (A) *випливає розбіжність ряду* (B).

Теорема 4 (друга ознака порівняння)**.** *Якщо існує відмінна від нуля скінченна границя*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K, \quad 0 < K < \infty,$$

то ряди (A) *і* (B) *збігаються або розбігаються одночасно.*

П р и к л а д 1. Ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}+\cdots$$

збігається, оскільки $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}$ для $n > 2$, а ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

є збіжним — його члени, починаючи з другого, утворюють нескінченно спадну геометричну прогресію (її знаменник дорівнює $\frac{1}{2}$).

Приклад 2. Посилаючись на збіжний ряд (див. прикл. 2 на с. 9)

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots,$$

переконуємось у збіжності ряду з меншими членами

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots$$

Отже, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається, а разом із ним збігається і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Приклад 3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{n}$ збігається, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\sin\frac{1}{n}}{n}}{\frac{1}{n^2}}=1$, а ряд $\sum\limits_{i=n}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, як було показано в попередньому прикладі, є збіжним.

1.3.2. Ознака Даламбера

Теорема 5 (ознака Даламбера)**.** *Якщо для ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *з додатними членами* $a_n>0$, $n=1,2,\ldots$ *існує границя*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=p, \tag{1.3.1}$$

то:

1) ряд збігається при $p<1$*;*
2) ряд розбігається при $p>1$.

У випадку $p=1$ ознака Даламбера відповіді не дає.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Розв'язання. Тут $a_n=\frac{1}{n!}$, тоді $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$. Застосуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 2\cdots n\cdot(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

Ряд збігається.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$.

Розв'язання. Знаходимо границю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\,n^2}{(n+1)^2\,2^n}=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=2>1.$$

Ряд розбігається.

1.3.3. Ознака Коші

Теорема 6 (ознака Коші). *Якщо для ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *з додатними членами* $a_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ *існує границя*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p, \tag{1.3.2}$$

то:

1) ряд збігається при $p < 1$*;*

2) ряд розбігається при $p > 1$.

У випадку $p = 1$ ознака Коші відповіді н е д а є.

При використанні ознаки Коші досить часто зустрічається границя виду $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha}$, де α — фіксоване число. Покажемо, що ця границя дорівнює 1. Позначимо $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha}$, тоді

$$\ln y = \ln \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha}{n} \cdot \ln n = \alpha \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

Границю з крайньої правої частини цієї низки рівностей знайдемо за правилом Лопіталя:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Отже, $\ln y = 0$, тобто $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$.

П р и к л а д 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$.

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо границю

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4 \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^4} \cdot \frac{2n}{3n+5} = 1 \cdot \frac{2}{3} < 1.$$

Ряд збігається.

1.3.4. Інтегральна ознака

Нехай члени ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ мають вигляд

$$a_n = f(n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Теорема 7 (інтегральна ознака Коші). *Якщо функція* $f(x)$*, визначена на проміжку* $[1, +\infty)$*, додатна і спадає, то ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

і інтеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

збігаються або розбігаються одночасно.

Застосування інтегральної ознаки значно полегшується, якщо функція $f(x)$ є неперервною. У цьому випадку для функції $f(x)$ існує первісна $F(x)$ і

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(1),$$

тобто ряд є збіжним, якщо границя $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ скінченна.

П р и к л а д 7. Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Цей ряд розбігається: тут $a_n = f(n) = \frac{1}{n}$, первісна $F(x) = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x \to +\infty$, коли $x \to +\infty$.

П р и к л а д 8. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$ збігається, оскільки первісна $F(x)$ для функції $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ має скінченну границю при $x \to +\infty$:

$$F(x) = \int \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \to 0 \text{ при } x \to +\infty, \ \ \text{якщо } \alpha > 1.$$

П р и к л а д 9. Дослідити ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ на збіжність.

Р о з в ' я з а н н я. Тут $a_n = f(n) = \frac{1}{n\ln n}$. Знаходимо первісну для функції $f(x)$:

$$F(x) = \int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln(\ln x).$$

Знаходимо границю

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(\ln x) = +\infty.$$

Ряд розбігається.

1.4. Ряди, знаки членів яких чергуються

Розглянемо ряди, знаки членів яких чергуються. Не порушуючи загальності міркувань, можемо вважати, що перший член такого знакозмінного ряду є додатним. Тоді такий ряд має вигляд

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + (-1)^n c_n + \cdots, \tag{1.4.1}$$

де $c_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Ряди виду (1.4.1) ще називають знакоперемíжними.

Наведемо достатню умову збіжності знакопереміжного ряду:

Теорема 8 (ознака Лейбніца). *Якщо абсолютні величини членів знакозмінного ряду* (1.4.1) *монотонно спадають:* $c_n > c_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *і загальний член ряду прямує до нуля:* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, *то ряд* (1.4.1) *збігається. При цьому абсолютна величина залишку* r_n *ряду не перевищує абсолютної величини першого відкинутого його члена, тобто*

$$|\,r_n| = |\,S - s_n| \leqslant |\,c_{n+1}|.$$

П р и к л а д 1. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Цей ряд збігається, оскільки його члени задовольняють умови теореми Лейбніца.

Зауваження. Ознака Лейбніца є достатньою, але не є необхідною, тобто, якщо члени знакопереміжного ряду не задовольняють умови теореми Лейбніца, то цей знакопереміжний ряд може бути як збіжним, так і розбіжним.

Приклад 2. Розглянемо ряд, утворений з членів двох нескінченно спадних геометричних прогресій

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \cdots$$

Неважко переконатись, що частинні суми цього ряду мають вигляд

$$s_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right), \quad s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Очевидно, що ряд є збіжним: існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{2}$. У той же час порушуються умови теореми Лейбніца: загальний член ряду прямує до нуля немонотонно.

Приклад 3. Обчислити суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3}$ з точністю $\varepsilon = 0,01$.

Розв'язання. Заданий ряд є збіжним — його члени задовольняють умови теореми Лейбніца.

Випишемо кілька перших членів ряду:

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{8 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 27} - \frac{1}{8 \cdot 64} + \cdots$$

Знаходимо перший з членів ряду, абсолютна величина якого не перевищує заданої похибки ε. Таким є член $c_3 = \dfrac{1}{8 \cdot 27} < \varepsilon = \dfrac{1}{100}$. Звідси робимо висновок, що для обчислення суми ряду із заданою точністю $\varepsilon = 0,01$ достатньо взяти два перших члени ряду, при цьому похибка не перевищуватиме абсолютної величини першого відкинутого члена:

$$S = s_2 + r_2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8 \cdot 8} + r_2 = \frac{7}{64} + r_2, \text{ де } |\, r_2| \leqslant c_3 = \frac{1}{8 \cdot 27} = 0,004(629).$$

Отже, $S \approx \dfrac{7}{64} = 0,1109375$. Наведемо значення суми ряду з точністю до десяти знаків:

$$S = 0,1126928347.$$

Пропонуємо порівняти оцінку похибки r_2, яку дає теорема Лейбніца, із значенням $r_2 = S - s_2$.

1.5. Ряди з довільними членами

Перейдемо до розгляду рядів з довільними членами. Нехай членами ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.5.1}$$

є як додатні, так і від'ємні числа.

Поряд із рядом (1.5.1) розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\, a_n|. \tag{1.5.2}$$

Означення 4. *Якщо ряд* (1.5.2) *збігається, то ряд* (1.5.1) *називають абсолютно збіжним рядом.*

Означення 5. *Якщо ряд* (1.5.1) *збігається, а ряд* (1.5.2) *розбігається, то ряд* (1.5.1) *називають* *умовно збіжним рядом.*

Теорема 9. *Якщо ряд* (1.5.2) *збігається, то і ряд* (1.5.1) *збігається.*

Приклад 1. Дослідити збіжність ряду

$$\frac{\sin\alpha}{1^2}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+\cdots,$$

де α — будь-яке число.

Розв'язання. Розглянемо ряд, складений з абсолютних величин членів заданого ряду, —

$$\frac{|\sin\alpha|}{1^2}+\frac{|\sin 2\alpha|}{2^2}+\cdots+\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}+\cdots$$

та ряд з більшими членами

$$1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

Цей, останній ряд збігається (ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha>1$ збігається). Оскільки для будь-якого n виконується нерівність

$$\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}\leqslant\frac{1}{n^2},$$

то за першою ознакою порівняння знаходимо, що і ряд, складений з абсолютних величин членів заданого ряду, збігається. Тобто заданий ряд збігається абсолютно. Оскільки абсолютно збіжний ряд збігається (теорема 9), то заданий ряд збігається.

Приклад 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ є умовно збіжним: він збігається за ознакою Лейбніца (див. с. 13), а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, складений з абсолютних величин його членів, розбігається.

1.6. Дії над збіжними рядами

1.6.1. Множення ряду на число

Твердження 1.6. 1. *Якщо ряд*

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

збігається і його сума дорівнює A, то ряд

$$ca_1+ca_2+\cdots+ca_n+\cdots,$$

де c — будь-яке фіксоване число, також збігається і його сума дорівнює cA.

1.6.2. Додавання рядів

Твердження 1.6. 2. *Якщо ряди*

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

і

$$b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots$$

збігаються і їхні суми дорівнюють відповідно A і B, то ряди

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) + \cdots$$

і

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots + (a_n - b_n) + \cdots$$

також збігаються і їхні суми дорівнюють відповідно $A + B$ і $A - B$.

1.6.3. Групування членів ряду

Твердження 1.6. 3. *Якщо ряд*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

збігається і його сума дорівнює A, то ряд

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + (a_{n_k+1} + \cdots + a_{n_{k+1}}) + \cdots$$

збігається і його сума дорівнює A.

Тобто члени збіжного ряду можна довільним чином групувати: сума ряду від цього не зміниться.

1.6.4. Перестановка членів ряду

Із курсу елементарної математики ми знаємо, що операція додавання є комутативною: $a + b = b + a$ і що від зміни місць доданків сума не змінюється.

Ми наводимо дві відомі теореми про правило «від зміни місць доданків сума не змінюється», справедливе для будь-якої скінченної кількості доданків і яке може порушуватись у випадку н е с к і н ч е н н о г о числа доданків.

Перестановка членів абсолютно збіжного ряду.

Теорема 10 (теорема Діріхле)**.** *Якщо ряд абсолютно збігається і його сума дорівнює A, то ряд, отриманий перестановкою його членів, також абсолютно збігається і має ту саму суму A.*

Тобто у випадку абсолютно збіжного ряду перестановка доданків не впливає на суму.

Перестановка членів умовно збіжного ряду.

Теорема 11 (теорема Рімана)**.** *Якщо ряд збігається умовно, то, яке б не було наперед задане число A, можна так переставити члени ряду, що сума отриманого ряду дорівнюватиме A.*

Тобто у випадку умовно збіжного ряду перестановка його членів викликає зміну суми ряду. Наведемо з цього приводу приклад.

П р и к л а д 1. Знакозмінний ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \tag{A}$$

збігається умовно. Позначимо його суму через S. Переставимо члени ряду так, щоб за одним додатним членом йшли два від'ємні члени:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \cdots \tag{A$'$}$$

Покажемо, що цей ряд збігається. Позначимо через s_n і s'_n частинні суми рядів (A) та (A$'$) відповідно. Розглянемо суму $3k$ членів ряду (A$'$):

$$s'_{3k} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2}\, s_k.$$

Отже,

$$\lim_{k\to\infty} s'_{3k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\, s_k = \frac{1}{2}\, S.$$

Знаходимо границі

$$\lim_{k\to\infty} s'_{3k+1} = \lim_{k\to\infty} \left(s'_{3k} + \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\, S,$$
$$\lim_{k\to\infty} s'_{3k+2} = \lim_{k\to\infty} \left(s'_{3k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2}\right) = \frac{1}{2}\, S.$$

Таким чином, ми встановили, що існує скінченна границя частинних сум ряду (A$'$):

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \frac{1}{2}\, S.$$

Тобто ряд (A$'$) збігається і його сума S' вдвічі менша суми S ряду (A):

$$S' = \lim_{k\to\infty} s_k = \frac{1}{2}\, S.$$

Як бачимо, перестановка членів умовно збіжного ряду викликала зміну суми ряду.

1.7. Розв'язання задач засобами Maple

Приклад 1. Для ряду

$$\frac{1}{1\cdot 7} + \frac{1}{3\cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+5)} + \cdots$$

1. знайти суму n перших членів ряду (S_n),
2. довести збіжність ряду, користуючись безпосередньо означенням збіжності,
3. знайти суму ряду S.

Розв'язання.

```
> restart;
```

Задаємо загальний член ряду:

```
> a_n:=1/((2*n-1)*(2*n+5));
```

$$a\_n := \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}.$$

Знаходимо частинну суму ряду S_k:

```
> S_k:=sum(a_n,n=1..k);
```

$$S\_k := -\frac{1}{12(k+\frac{1}{2})} - \frac{1}{12(k+\frac{3}{2})} - \frac{1}{12(k+\frac{5}{2})} + \frac{23}{90}$$

Послідовність частинних сум ряду є монотонно зростаючою і, як виявилося, обмеженою зверху, а, значить, збіжною. Ряд збігається і має суму

$$S = \lim_{k\to\infty} S_k = \frac{23}{90}.$$

П р и к л а д 2. Для ряду

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \cdots$$

1. знайти суму n перших членів ряду (S_n),
2. довести збіжність ряду, користуючись безпосередньо означенням збіжності,
3. знайти суму ряду S.

Р о з в ' я з а н н я.
Знаходимо частинну суму ряду:

```
> S_k:=sum(1/(n*(n+1)*(n+2)),n=1...k);
```

$$S_k := -\frac{1}{(2(k+1))} + \frac{1}{(2(2+k))} + \frac{1}{4}$$

Послідовність S_k є збіжною:

```
> limit(S_k,k=infinity);
```

$$\frac{1}{4}$$

Ряд збігається і має суму $S = \dfrac{1}{4}$.

П р и к л а д 3. Для ряду

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \cdots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} + \cdots$$

1. знайти суму n перших членів ряду (S_n),
2. довести збіжність ряду, користуючись безпосередньо означенням збіжності,
3. знайти суму ряду S.

Р о з в ' я з а н н я. :

```
> restart;
```

Спроба знайти частинну суму ряду безпосереднім її обчисленням виявилася безрезультатною:

```
> sum(arctan(1/(2*n^2)),n=1..k);
```

$$\sum_{n=1}^{k} \arctan\frac{1}{2n^2}$$

Будуємо частинну суму ряду. Обчислимо S_2:

```
> expand(tan(arctan(1/2)+arctan(1/8)));
```

$$\frac{2}{3}$$

```
> S_2:=arctan(%);
```

$$S_2 := \arctan\left(\frac{2}{3}\right)$$

На підставі отриманого результату $S_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$, $S_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}$ робимо припущення, що $S_n = \operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+1}$. Перевіряємо справедливість припущення, обчислимо S_{n+1}:

```
> expand(tan(arctan(n/(n+1))+arctan(1/(2*(n+1)^2)))):simplify(%);
```

$$\frac{n+1}{n+2}$$

Як бачимо, припущення виявилося вірним.

```
> S_n:=arctan(n/(n+1));
```

$$S_n := \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

Знаходимо суму ряду;

```
> limit(S_n,n=infinity);
```

$$\frac{\pi}{4}$$

П р и к л а д 4. Дослідити ряд на збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}.$$

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо ознаку Даламбера.

```
> restart;
```

Задаємо загальний член ряду:

```
> a:=n->(product((3*k-1),k=1..n)/product((4*k-3),k=1..n));
```

$$a := n \mapsto \frac{\prod_{k=1}^{n}(3\cdot k-1)}{\prod_{k=1}^{n}(4\cdot k-3)}$$

```
> limit(a(n+1)/a(n),n=infinity);
```

$$\frac{3}{4}$$

Ряд збігається.

П р и к л а д 5. Дослідити ряд на збіжність

$$\frac{2}{3}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9}+\cdots+\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}+\cdots$$

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо радикальну ознаку Коші.
Задаємо загальний член ряду:

```
> a:=n->((n+1)/n)^(n^2)/3^n;
```

$$a := n \mapsto \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$$

```
> limit(surd(a(n),n),n=infinity);
```

$$\frac{e}{3}$$

Ряд збігається.

П р и к л а д 6. Дослідити ряд на збіжність

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}.$$

Р о з в ' я з а н н я. Застосуємо інтегральну ознаку Коші.
Задаємо загальний член ряду:

```
> f:=1/sqrt(n)*ln((n+1)/(n-1));
```

$$f := \frac{\ln \dfrac{n+1}{n-1}}{\sqrt{n}}$$

Функція f на проміжку $[2, +\infty]$ задовольняє умови інтегральної ознаки Коші: є неперервною, монотонно спадає і прямує до нуля, коли $n \to +\infty$. Наведемо графік функції f:

```
> plot(f,n=2..infinity);
```

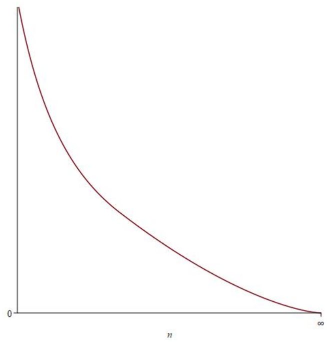


Рис. 1

Знайдемо первісну F функції f і обчислимо $\lim\limits_{n\to\infty} F$:

```
> F:=int(f,n):limit(F,n=infinity);
```

$$2\pi$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} F < \infty$, то ряд збігається.

П р и к л а д 7. Дослідити ряд на збіжність

$$\frac{1}{2} - \frac{8}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n} + \cdots$$

Р о з в ' я з а н н я. Дослідимо ряд на абсолютну збіжність. Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}.$$

Скористаємося радикальною ознакою Коші:

```
> limit(surd(n^3/2^n,n),n=infinity);
```

$$\frac{1}{2}$$

Ряд збігається абсолютно.

П р и к л а д 8. Дослідити ряд на збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}.$$

Р о з в ' я з а н н я. Ряд не є абсолютно збіжним, оскільки $\dfrac{1}{n-\ln n} \sim \dfrac{1}{n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ розбігається.

```
> limit((1/(n-ln(n)))/(1/n),n=infinity);
```

$$1$$

Члени заданого знакопереміжного ряду за абсолютною величиною утворюють монотонно спадну до нуля послідовність:

```
> assume(n>1);is(1/(n-ln(n))>1/(n+1-ln(n+1)));
```

$$true$$

За ознакою Лейбниця ряд збігається.
Ряд збігається умовно.

П р и к л а д 9. Дослідити ряд на збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}.$$

Р о з в ' я з а н н я. Ряд розбігається, оскільки не виконується необхідна умова збіжності;

```
> limit(2^(n^2)/n!,n=infinity);
```

$$\infty$$

Ряд розбігається.

Завдання до розділу

Дослідити збіжність рядів:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2 \dfrac{\pi n}{3}}{3^n+2}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\cos^2 n}{n^3+5}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n+2^n}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 2^n}{n^2}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3+(-1)^n}{2^{n+2}}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$.

7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n+1}{2^n\,(n-1)!}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n 2n!}{(2n)!}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+5}{n!} \sin \dfrac{2}{3^n}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{(n+2)!}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5 ... (2n-1)}{3^n\,(n+1)}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3\cdot 5\cdot 7 ...\,(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8 ...\,(3n-1)}$.

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n+1}}{n^n}$.

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$.

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}.$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{n+2}}{5^n}.$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{2^n}.$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^3}.$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^4\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^{n}.$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}e^{-n}.$

Дослідити абсолютну збіжність рядів:

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2n+1}{n\,(n+1)}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{n}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{3n+1}}$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \dfrac{\pi}{6n}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n}{n^2}$.

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2n-1}{3n}$.

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\,2^{2n}}$.

Обчислити суму ряду з точністю ε.

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{3n^2} \quad \varepsilon = 0,01.$

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}, \quad \varepsilon = 0,001.$

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!!}, \quad \varepsilon = 0,001.$

32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \quad \varepsilon = 0,0001.$

33. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+n^2}, \quad \varepsilon = 0,01.$

34. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+n^2}, \quad \varepsilon = 0,01.$

35. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 2^n}{(n+1)^n}, \quad \varepsilon = 0,001.$

36. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^n}, \quad \varepsilon = 0,001.$

Тема 2

Функціональні ряди

2.1. Границя послідовності функцій

Нехай задана послідовність, членами якої є функції

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots, \tag{2.1.1}$$

визначені на деякій множині X.

Означення 6. *Кажуть, що послідовність* (2.1.1) *збігається в точці* $x_0 \in X$, *якщо числова послідовність* $\{f_n(x_0)\}$ *збігається.*

Послідовність (2.1.1) *називають збіжною на множині* X, *якщо вона збігається в кожній точці множини* X.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in X$, *то кажуть, що послідовність* (2.1.1) *збігається до функції* $f(x)$, $x \in X$.

За означенням границі послідовності збіжність послідовності $f_n(x)$ до функції $f(x)$ в точці x означає, що для будь-якого додатного числа ε існує такий номер N, що для всіх $n > N$ виконується нерівність

$$| f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{2.1.2}$$

Номер N залежить від ε і, взагалі кажучи, від x.
Приклад 1. Розглянемо послідовність функцій

$$f_n(x) = x^n,\ n = 1, 2, \ldots \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

Очевидно, що $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ при $x < 1$ і $f(1) = 1$. Графіки функцій $f_n(x)$ для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 10$ зображені на рис.2 .

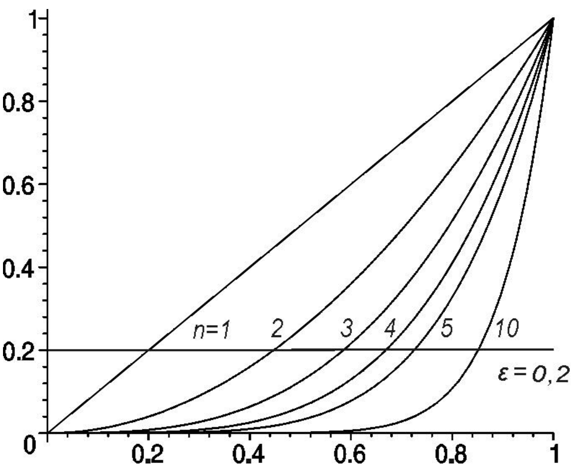


Рис. 2

Якщо ми візьмемо, наприклад, $\varepsilon = 0,2$, то побачимо, що нерівність (2.1.2), скажімо, в точці $x = 0,2$ виконується для $n > N = 1$, а, наприклад, в точці $x = 0,7$ нерівність (2.1.2) справджується, починаючи з 5-го номера, тобто для $n > N = 4$. Як бачимо, N залежить як від ε, так і від x: $N = N(\varepsilon, x)$.

Означення 7. *Якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий незалежний від x номер $N = N(\varepsilon)$, що при $n > N$ нерівність* (2.1.2) *виконується одночасно для всіх $x \in X$, то кажуть, що послідовність* (2.1.1) *збігається на множині X до функції $f(x)$ рівномірно відносно x.*

Геометрично рівномірна збіжність послідовності функцій $f_n(x)$ до функції $f(x)$ означає, що, починаючи з деякого номера $n > N$, графіки функцій $f_n(x)$ потрапляють в ε-окіл графіка функції $f(x)$ і більше з нього не виходять (рис. 3).

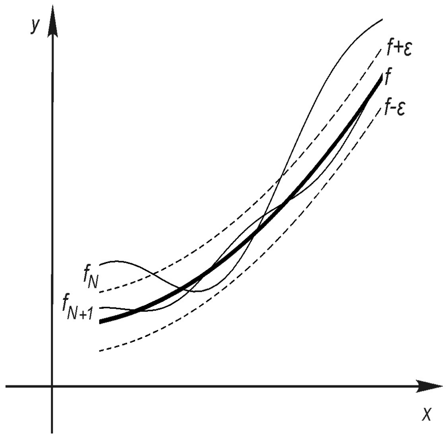


Рис. 3

На рис. 3 зображені: графіки функцій послідовності $f_n(x)$ — тонкі суцільні лінії, графік граничної функції $f(x)$ — товста суцільна лінія, ε-окіл графіка функції $f(x)$ — смужка, обмежена пунктирними лініями.

Позначають рівномірну збіжність послідовності $f_n(x)$ до функції $f(x)$ символом

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$$

на відміну від звичайної збіжності $f_n(x) \to f(x)$.

Приклад 2. Послідовність $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \dots$ на проміжку $[0, a]$, де $0 < a < 1$, збігається рівномірно, оскільки при $n > N = [\log_a \varepsilon]$ нерівність

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| < \varepsilon$$

виконується одночасно для всіх $x \in [0, a]$. Зокрема, при $a = 0,7$ усі члени послідовності x^n потрапляють в ε-окіл граничної функції $f(x) = 0$, починаючи з 5-го номера (див. рис. 2).

Зауважимо, що на проміжку $[0, 1)$ послідовність x^n не є рівномірно збіжною: такого номера N, починаючи з якого для всіх $x \in [0, 1)$ виконувалася б нерівність

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n < \varepsilon, \ n > N$$

не існує. Справді, при $0 < \varepsilon < 1$ для будь-якого n на проміжку $[0, 1)$ графіки функцій $f_n(x) = x^n$ перетинають графік функції $f(x) + \varepsilon = \varepsilon$ в точці $x_{n,\varepsilon} = \sqrt[n]{\varepsilon}$, а при $x > \sqrt[n]{\varepsilon}$ вони покидають ε-окіл граничної функції $f(x) = 0$ (див. рис. 2).

Вкажемо на одну важливу властивість рівномірно збіжних послідовностей:

Теорема 12. *Якщо послідовність функцій*

$$f_1(x), f_(x), \dots, f_n(x), \dots,$$

визначених і неперервних на проміжку $[a, b]$, збігається до функції $f(x)$ р і в н о м і р н о н а $[a, b]$, то і функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$.

2.2. Функціональні ряди

Означення 8. *Нехай задана послідовність функцій $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, ..., визначених на деякій множині X. Вираз*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \qquad (2.2.3)$$

називають функціональним рядом.

Означення 9. *Кажуть, що ряд (2.2.3) збігається в точці $x = x_0$, якщо відповідний числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ збігається.*

Множину значень x, для яких ряд (2.2.3) збігається, називають областю збіжності ряду (2.2.3).

Кажуть, що ряд (2.2.3) збігається в X абсолютно, якщо в X збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\, u_n(x)|$.

Для знаходження області збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ застосовують до ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\, u_n(x)|$ яку-небудь достатню ознаку, наприклад, ознаку Даламбера або Коші, знаходять границю $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|\, u_{n+1}(x)}{|\, u_n(x)|} = p(x)$ чи $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\, u_n(x)|} = p(x)$ і розв'язують нерівність $p(x) < 1$. Потім досліджують ряд на збіжність у межових точках множини $p(x) < 1$.

П р и к л а д 1. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1} \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$.

Р о з в ' я з а н н я. Розглянемо ряд, складений з абсолютних величин членів заданого ряду, і застосуємо до нього ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\, u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2n-1} \left| \frac{1-x}{1+x} \right|^n} = \left| \frac{1-x}{1+x} \right| = p(x).$$

Розв'язуємо нерівність $p(x) < 1$:

$$\left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1 \Leftrightarrow |\, x-1| < |\, x+1|.$$

Побудуємо графіки функцій $y = |\, x+1|$ і $y = |\, x-1|$ (рис. 4).

Як бачимо, нерівність $|x-1|<|x+1|$ виконується при всіх $x>0$. Тобто на множині $x>0$ заданий ряд збігається абсолютно.

Межовою точкою області збіжності ряду є точка $x=0$. Досліджуємо ряд на збіжність при $x=0$. При $x=0$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

Цей ряд умовно збігається. Отже, область збіжності заданого ряду $X=[0,\infty)$.

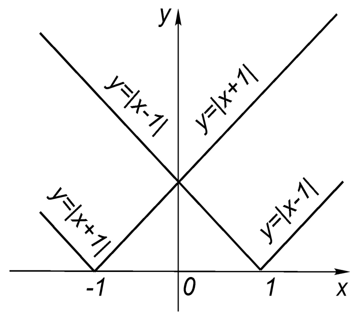


Рис. 4

Означення 10. *Кажуть, що ряд* (2.2.3) *рівномірно збігається на множині* X*, якщо послідовність його частинних сум збігається на* X *рівномірно.*

Наведемо одну з ознак рівномірної збіжності функціонального ряду:

Теорема 13 (ознака Вейєрштрасса)**.** *Якщо члени функціонального ряду* (2.2.3) *задовольняють в області* X *нерівності*

$$|\,u_n(x)|\leqslant c_n \quad (n=1,2,\ldots),$$

де c_n *— члени деякого з б і ж н о г о числового ряду*

$$c_1+c_2+\cdots+c_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}c_n, \tag{C}$$

то ряд (2.2.3) *збігається в* X *р і в н о м і р н о.*

Числовий ряд (C) називають *мажорантою* функціонального ряду (2.2.3). Ознаку Вейєрштрасса можна перефразувати так:

Якщо для функціонального ряду існує збіжна мажоранта, то він збігається рівномірно.

Зауважимо, що ознака Вейєрштрасса є д о с т а т н ь о ю ознакою рівномірної збіжності і н е є н е о б х і д н о ю. Можна навести приклади функціональних рядів, які збігаються рівномірно і для яких не існує збіжний мажоруючий ряд (докладніше див. [?], с. 604–605).

2.3. Дії над рівномірно збіжними рядами

Почленний перехід до границі. Нехай X — довільна нескінченна множина і нехай точка a така, що в будь-якому її околі містяться точки множини X, сама точка a може і не належати множині X.

Теорема 14. *Нехай кожна з функцій* $u_n(x)$ *визначена на множині* X *і при* $x\to a$ *має скінченну границю*

$$\lim_{x\to a}u_n(x)=c_n.$$

Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *збігається на множині* X *р і в н о м і р н о, тоді*

1) збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=C;$$

2) сума ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x)$ *має при* $x \to a$ *границю, рівну* C

$$\lim_{x \to a} f(x) = C.$$

Тобто, якщо виконуються умови, наведені в теоремі 14, то можна переходити до границі під знаком суми:

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to a} u_n(x).$$

Почленне інтегрування рядів.

Теорема 15. *Якщо функції* $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *неперервні на проміжку* $[a, b]$ *і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *збігається на* $[a, b]$ *р і в н о м і р н о, то ряд можна почленно інтегрувати:*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx.$$

Почленне диференціювання рядів.

Теорема 16. *Якщо функції* $u_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *неперервні на проміжку* $[a, b]$ *і мають на цьому проміжку неперервні похідні* $u_n'(x)$ *і якщо ряди*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \ \ i \ \ \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

збігаються на $[a, b]$ *р і в н о м і р н о, то*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

2.4. Степеневі ряди

Означення 11. *Степеневими рядами називають ряди виду*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{2.4.4}$$

та

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \tag{2.4.5}$$

Числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *називають коефіцієнтами степеневого ряду.*

Розглянемо властивості ряду (2.4.4), оскільки ряд (2.4.5) заміною змінної $x - x_0 = t$ зводиться до виду (2.4.4).

Теорема 17 (теорема Абеля). *Якщо степеневий ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

збігається при $x = x_0 \neq 0$*, то він збігається, і притому* *а б с о л ю т н о*, *при будь-якому* x*, для якого* $|\,x| < |\,x_0|$.

Наслідок. *Якщо степеневий ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *розбігається при* $x = x_0$*, то він розбігається і при всіх* x*, для яких* $|\,x| > |\,x_0|$.

Означення 12. *Невід'ємне число* R *(або* $R = +\infty$*) таке, що при всіх* x*, для яких* $|\,x| < R$*, ряд* (2.4.4) *збігається, а при всіх* x*, для яких* $|\,x| > R$ *(якщо* $R < +\infty$*), ряд* (2.4.4) *розбігається, називають* *р а д і у с о м з б і ж н о с т і* *ряду* (2.4.4).

Проміжок $(-R, R)$ *називають* *п р о м і ж к о м з б і ж н о с т і* *ряду* (2.4.4).

Теорема 18. *Для кожного степеневого ряду* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *існує радіус збіжності* R*. На проміжку збіжності, тобто при* $|\,x| < R$*, ряд збігається* *а б с о л ю т н о*. *На будь-якому проміжку* $|\,x| \leqslant r$*, де* r *— фіксоване і* $r < R$*, ряд збігається* *р і в н о м і р н о*.

Про збіжність ряду на кінцях проміжку збіжності $(-R, R)$ нічого певного сказати не можна. Її досліджують для кожного ряду окремо. Але якщо ряд збігається при $x = R$ $(x = -R)$, то справджується твердження:

Теорема 19 (друга теорема Абеля). *Якщо степеневий ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *збігається, хоча б умовно, при* $x = R$*, то його сума* $f(x)$ *в точці* $x = R$ *неперервна зліва, тобто*

$$f(R-0) = \lim_{x \to R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Аналогічний результат має місце, якщо степеневий ряд збігається на лівому кінці проміжку збіжності $x = -R$, при цьому сума ряду є неперервною в точці $x = -R$ із правого боку:

$$f(-R+0) = \lim_{x \to -R+0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n.$$

Радіус збіжності степеневого ряду можна знайти, скориставшись відомим прийомом пошуку області збіжності функціонального ряду.

Якщо до ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ застосуємо ознаку Даламбера, то отримаємо формулу

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{|\,a_n|}{|\,a_{n+1}|}; \tag{2.4.6}$$

застосування ознаки Коші дасть формулу

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|\,a_n|}}. \tag{2.4.7}$$

І в (2.4.6), і в (2.4.7) припускається, що вказані в них границі і с н у ю т ь. Якщо формули (2.4.6) і (2.4.7) виявляться незастосовними (якщо, наприклад, ряд містить лише парні або непарні степені змінної x), то можна скористатися формулою Адамара-Коші (див. [?], с. 628-630)

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\, a_n|}}, \tag{2.4.8}$$

або ж знайти область збіжності степеневого ряду, розглядаючи його як функціональний ряд загального вигляду.

П р и к л а д 1. Радіус збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$ дорівнює нулю, тобто цей ряд збігається лише при $x = 0$:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|\, a_{n+1}|}{|\, a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

П р и к л а д 2. Радіус збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ дорівнює $+\infty$:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|\, a_{n+1}|}{|\, a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$

Ряд збігається при $x \in (-\infty, +\infty)$.

П р и к л а д 3. Радіус збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ дорівнює 2:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\, a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}} = 2.$$

Ряд збігається при $x \in (-2, 2)$, при $x = 2$ і при $x = -2$ ряд розбігається, оскільки в цих точках не виконується необхідна умова збіжності ряду.

П р и к л а д 4. Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n^2 2^n}$. Застосовувати до цього ряду формули (2.4.6) і (2.4.7) не можна: коефіцієнти цього степеневого ряду при парних степенях змінної x дорівнюють нулю; границі, вказані в (2.4.6) і (2.4.7), не існують. Розглянемо цей ряд як функціональний ряд із загальним членом $u_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{n^2 2^n}$ і застосуємо до нього ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\, u_{n+1}(x)|}{|\, u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\, x^{2n+3}|}{(n+1)^2 2^{n+1}} \frac{n^2 2^n}{|\, x^{2n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\, x^2|n^2}{2(n+1)^2} = \frac{x^2}{2} < 1.$$

Звідси випливає, що при $|\, x| < \sqrt{2}$ ряд збігається, при $|\, x| > \sqrt{2}$ ряд розбігається. Радіус збіжності ряду дорівнює $R = \sqrt{2}$. При $x = \sqrt{2}$ і $x = -\sqrt{2}$ отримуємо збіжні числові ряди $\pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Ряд збігається при $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$.

П р и к л а д 5. Розглянемо ряд

$$\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{2^2} + \frac{x^4}{3^2} + \cdots + \frac{x^{2k-1}}{2^k} + \frac{x^{2k}}{3^k} + \cdots$$

У даному випадку ознаки Даламбера і Коші непридатні: границі $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\, u_{n+1}(x)|}{|\, u_n(x)|}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\, u_n(x)|}$ не існують.

Скористаємось ознакою Адамара-Коші (2.4.8). Послідовність $\sqrt[n]{|\,a_n|}$ має дві граничні точки:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k-1]{|\,a_{2k-1}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2k-1]{\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{|\,a_{2k}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2k]{\frac{1}{3^k}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Верхня границя послідовності — це найбільша її гранична точка. Тобто $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\,a_n|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. За формулою (2.4.8) знаходимо, що радіус збіжності заданого ряду дорівнює $R = \sqrt{2}$. Неважко бачити, що на кінцях інтервалу збіжності ряд розбігається — його члени з непарними номерами не прямують до нуля. Область збіжності ряду: $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

Почленне диференціювання та інтегрування степеневих рядів.

Теорема 20. *Якщо $R > 0$ — радіус збіжності ряду*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{2.4.9}$$

то

1) *функція $f(x)$ має в інтервалі $(x_0 - R, x_0 + R)$ похідні всіх порядків, їх знаходять почленним диференціюванням ряду* (2.4.9)*;*

2) *для будь-якого $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$*

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1},$$

тобто всередині інтервалу збіжності степеневий ряд можна почленно інтегрувати;

3) *степеневі ряди, отримані з ряду* (2.4.9) *почленним диференціюванням або інтегруванням, мають той самий радіус збіжності, що і ряд* (2.4.9).

2.5. Ряд Тейлора

Означення 13. *Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 і має в цій точці похідні всіх порядків. Тоді ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{2.5.10}$$

називають рядом Тейлора функції $f(x)$ в точці x_0.

При $x_0 = 0$ ряд Тейлора називають також рядом Маклорена.

Теорема 21. *Нехай функція $f(x)$ і всі її похідні обмежені в с у к у пності на інтервалі $(x_0 - h, x_0 + h)$, тобто існує така стала $M > 0$, що для всіх $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ і всіх $n = 0, 1, 2, \ldots$ виконується нерівність*

$$|\,f^{(n)}(x)| \leqslant M.$$

Тоді на інтервалі $(x_0 - h, x_0 + h)$ функція $f(x)$ розкладається в ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad |\,x - x_0| < h.$$

Необхідно пам'ятати п'ять основних розкладів:

I. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + \dots \ (-\infty < x < \infty).$

II. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \ (-\infty < x < \infty).$

III. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \ (-\infty < x < \infty).$

IV. $(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$

$$\dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \ (-1 < x < 1).$$

V. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \dots \ (-1 < x \leqslant 1).$

2.6. Деякі прийоми розкладу функцій в степеневі ряди

Розклад функції в ряд Тейлора безпосереднім диференціюванням та обчисленням значень похідних пов'язаний, як правило, з громіздкими викладками. Використання основних розкладів I – V і почленного інтегрування та диференціювання цих рядів набагато спрощують задачу.

Розглянемо приклади.

П р и к л а д 1. Розкласти функцію $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ в ряд Маклорена.

Р о з в ' я з а н н я. Неважко бачити, що

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'.$$

Функцію $\dfrac{1}{1-x}$ можна розглядати як суму нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом 1 і знаменником x ($|x| < 1$):

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \cdots$$

Тоді

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots, \ (-1 < x < 1).$$

П р и к л а д 2. Розкласти функцію $f(x) = \dfrac{5x-12}{x^2+5x-6}$ в ряд Маклорена.

Р о з в ' я з а н н я. Розкладемо заданий дріб у суму найпростіших дробів:

$$\frac{5x-12}{x^2+5x-6} = \frac{5x-12}{(x+6)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+6} = \frac{A(x-1)+B(x+6)}{(x+6)(x-1)}.$$

Оскільки крайній лівий та крайній правий дроби в цій низці рівностей однакові і мають рівні знаменники, то і їхні чисельники рівні:

$$5x - 12 = A(x-1) + B(x+6).$$

Нехай $x = 1$, тоді $-7 = B \cdot 7$, або $B = -1$. Якщо покладемо $x = -6$, то отримаємо рівність $-42 = -7A$, тобто $A = 6$. Отже, задана функція має вигляд

$$f(x) = \frac{5x-12}{x^2+5x-6} = \frac{6}{x+6} + \frac{-1}{x-1}.$$

Отримані дроби розкладемо в ряд:

$$\frac{6}{x+6} = \frac{1}{1+\dfrac{x}{6}} = 1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{6^2} + \cdots + \frac{x^n}{6^n} + \cdots\ , \ \left|\frac{x}{6}\right| < 1,$$

$$\frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots\ , \ |x| < 1.$$

Спільною областю збіжності цих рядів є інтервал $-1 < x < 1$. Знаходимо розклад в ряд суми дробів, враховуючи, що збіжні ряди можна додавати почленно:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{6}{x+6} + \frac{-1}{x-1} = \\ &= \left(1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{6^2} + \cdots + \frac{x^n}{6^n} + \cdots\right) + \left(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots\right) = \\ &= 2 + \left(1 - \frac{1}{6}\right)x + \left(1 + \frac{1}{6^2}\right)x^2 + \cdots \left(1 + \frac{(-1)^n}{6^n}\right)x^n + \cdots\ , \ -1 < x < 1. \end{aligned}$$

П р и к л а д 3. Розкласти функцію $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{x}$ в ряд Маклорена.

Р о з в ' я з а н н я. Розкладемо спочатку в ряд функцію $y = \arcsin x$:

$$\begin{aligned} y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1 + (-x^2)\right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{(-x^2)^2}{2!} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{(-x^2)^3}{3!} + \cdots = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n} + \cdots\ , \ x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Проінтегруємо отриманий ряд в межах від 0 до x $(-1 < x < 1)$:

$$\begin{aligned} \int_0^x y'dx = \arcsin x = \\ &= x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!\cdot 7}x^7 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)}x^{2n+1} + \cdots \end{aligned}$$

Радіус збіжності отриманого ряду $R = 1$. Зазначимо, що цей ряд збігається і на кінцях інтервалу збіжності, тобто при $x = \pm 1$ (див. [**?**], с. 26).

Отже, задана функція $f(x)$ на проміжку $x \in [-1; 1]$ має такий розклад:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{\arcsin x}{x} = \\ &= 1 + \frac{1}{2\cdot 3}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\cdot 5}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!\cdot 7}x^6 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!\cdot(2n+1)}x^{2n} + \cdots \end{aligned}$$

П р и к л а д 4. Розкласти функцію $f(x) = \sin^2 x$ в ряд Маклорена.

Р о з в ' я з а н н я.

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \left(1 - \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^4x^4}{4!} - \dots + \frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + \dots\right)\right] =$$

$$= x^2 - \frac{2^3x^4}{4!} + \dots + \frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

2.7. Приклади застосування рядів до наближених обчислень

Степеневі ряди мають різноманітні застосування. За їх допомогою з будь-якою заданою точністю обчислюють значення функцій, знаходять наближені значення визначених інтегралів, які не виражаються через елементарні функції, або є складними для їх обчислення. Значну роль відіграють степеневі ряди в наближених методах розв'язання диференціальних рівнянь.

При практичному обчисленні виникає питання: *скільки треба взяти членів розкладу функції в ряд Тейлора, щоб досягти заданої точності розрахунків*?

Якщо отриманий числовий ряд є знакопереміжним, то можна скористатися ознакою Лейбніца: залишок знакопереміжного ряду за абсолютною величиною не перевищує першого відкинутого члена. Число n вибирають з умови

$$|\, r_n| \leqslant \left|\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| < \varepsilon.$$

Якщо ряд не є знакозмінним, то треба оцінити залишковий член формули Тейлора. У формі Лагранжа він має вигляд

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad 0<\theta<1.$$

Якщо має місце оцінка $|f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))| \leqslant M$, де M — деяке число, то число n — кількість врахованих членів ряду, визначають з умови:

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} < \varepsilon.$$

П р и к л а д 1. Обчислити $\sqrt[10]{1000}$ з точністю до $\varepsilon = 0,001$.

Р о з в ' я з а н н я.

$$\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{1024-24} = 2\sqrt[10]{1-\frac{24}{1024}} = 2\sqrt[10]{1-\frac{3}{128}} =$$

$$= 2\left[1 + \frac{1}{10}\left(-\frac{3}{128}\right) + \frac{1\cdot(-9)}{10^2\cdot 2!}\left(-\frac{3}{128}\right)^2 + \cdots\right].$$

У даному розкладі можна обмежитися першими двома членами, оскільки абсолютна величина залишку $r_1(x)$, де $x = -\dfrac{3}{128}$, не перевищує заданої точності:

$$|r_1| = \left| 2 \cdot \frac{1 \cdot (-9)}{10^2 \cdot 2! \sqrt[10]{\left(1 - \theta \cdot \dfrac{3}{128}\right)^{19}}} \cdot \left(-\frac{3}{128}\right)^2 \right| <$$

$$< \frac{81}{100 \cdot 128^2 \left(1 - \dfrac{3}{128}\right)^2} = 0,00005184 < 0,001.$$

Отже,

$$\sqrt[10]{1000} \approx 2\left(1 + \frac{1}{10}\left(-\frac{3}{128}\right)\right) = 1,9953125.$$

При цьому похибка не перевищує $0,52 \cdot 10^{-4}$.

П р и к л а д 2. Обчислити інтеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$ з точністю до $\varepsilon = 0,001$.

Р о з в ' я з а н н я.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots\right) dx =$$

$$= 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n-1)!} + \cdots$$

У даному прикладі можна обмежитися першими трьома доданками: ряд є знакопереміжним, абсолютна величина четвертого доданка менша потрібної точності

$$\frac{1}{7 \cdot 7!} = \frac{1}{5040 \cdot 7} < \frac{1}{1000}.$$

Отже, з точністю до $0,001$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx \approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} = 0,946.$$

Завдання до розділу

Знайти область збіжності функціонального ряду:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln^n (x-1)}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{3^{nx}+2}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{xn^x}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1} \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+x^n}{1-x^n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+3} \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^n$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5}{x^n}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n-2)^3 (x+3)^{2n}}{2n+3}$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (x-3)^n}{(n+1) 5^n}$.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+3}{(n+1)^5 x^{2n}}$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+3}{(n+1)^5 x^{2n}}$.

Розкласти в ряд Маклорена:

13. $\dfrac{9}{20-x-x^2}$.

14. xe^{x^2}.

15. $\dfrac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$.

16. $\cos^2 x$.

17. $\ln\left(1-x-6x^2\right)$.

18. $(x^2+1)e^{2x}$.

19. $\dfrac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}$.

20. $(x-1)\sin 5x$.

21. $\dfrac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}$.

22. $\dfrac{\text{ch}3x-1}{x^2}$.

23. $x^2\sqrt{4-3x}$.

24. $(2-e^x)^2$.

Обчислити інтеграл з точністю до $\varepsilon = 0,001$:

25. $\int\limits_0^{0,1} e^{-6x^2}dx.$

26. $\int\limits_0^{1} \cos x^2 dx.$

27. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

28. $\int\limits_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x}dx.$

29. $\int\limits_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}.$

30. $\int\limits_0^{0,5} \ln(1+x^2)\,dx.$

31. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+x/5)}{x}dx.$

32. $\int\limits_0^{0,2} \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx.$

33. $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x}dx.$

34. $\int\limits_0^{1} \sin x^2 dx.$

Тема 3

Ряди Фур'є

3.1. Поняття ряду Фур'є

Означення 14. *Ряд виду*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \tag{3.1.1}$$

називають т р и г о н о м е т р и ч н и м рядом.

Систему функцій

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots, \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots \tag{3.1.2}$$

називають т р и г о н о м е т р и ч н о ю системою.

Безпосереднім обчисленням відповідних інтегралів доводиться твердження:

Твердження 3.1. 1. *Інтеграл по проміжку* $[-\pi, \pi]$ *від добутку двох різних функцій системи* (3.1.2) *дорівнює нулю.*

Якщо інтеграл по деякому проміжку від добутку двох функцій дорівнює нулю, то кажуть, що ці дві функції о р т о г о н а л ь н і на вказаному проміжку.

Твердження *3.1.1* можна перефразувати так:

Функції (3.1.2) *ортогональні на проміжку* $[-\pi, \pi]$.

Припустимо, що ряд (3.1.1) рівномірно збігається і має суму $f(x)$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx. \tag{3.1.3}$$

Помножимо рівність (3.1.3) почергово на кожну з функцій (3.1.2) і проінтегруємо її в межах від $-\pi$ до π. Враховуючи, що рівномірно збіжний ряд можна почленно інтегрувати і що функції (3.1.2) ортогональні на проміжку $[-\pi, \pi]$, отримаємо рівності:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0\cdot\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = a_k\cdot\pi,\ k=1,2,\ldots,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = b_k\cdot\pi,\ k=1,2,\ldots$$

Отже, якщо ряд (3.1.1) рівномірно збігається до функції $f(x)$, то його коефіцієнти обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx,\ k=0,1,2,\ldots, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx,\ k=1,2,\ldots. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Нехай тепер функція $f(x)$, визначена на проміжку $[-\pi,\pi]$, є кусково-неперервною[1]. Тоді інтеграли в (3.1.4) існують.

Означення 15. *Числа a_k і b_k (3.1.4) називають коефіцієнтами Фур'є функції $f(x)$.*

Означення 16. *Ряд (3.1.1), коефіцієнти якого є коефіцієнтами Фур'є функції $f(x)$, називають тригонометричним рядом (або просто рядом) Фур'є функції $f(x)$. При цьому записують*

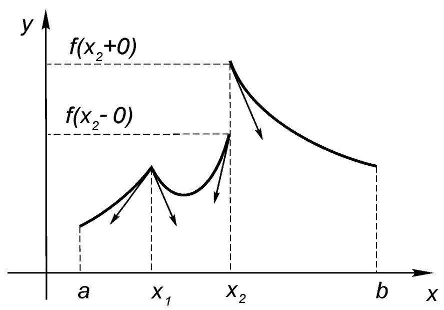
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k \sin kx.$$

3.2. Подання функції рядом Фур'є

Висунемо до функції $f(x)$ більш жорсткі умови, а саме — *припустимо, що функція є кусково-диференційовною на проміжку* $[-\pi,\pi]$.

Означення 17. *Функцію $f(x)$ називають кусково-диференційовною на проміжку $[a,b]$, якщо проміжок $[a,b]$ можна розбити на скінченну кількість підпроміжків, всередині кожного з яких функція $f(x)$ має неперервну похідну, а на кінцях має не тільки граничні значення, а й односторонні похідні, за умови заміни на цих кінцях значень функції її граничними значеннями.*

Приклад кусково-диференційовної функції наведено ни рис. 5. Функція не має похідної в точках x_1 і x_2. В точці x_1 функція неперервна і має в цій точці односторонні похідні. В точці x_2 функція має розрив першого роду, але якщо замінити значення $f(x_2)$ значенням $f(x_2-0)$, то на проміжку $[x_1,x_2]$ функція матиме неперервну похідну. Функція матиме неперервну похідну на проміжку $[x_2,b]$ за умови заміни її значення $f(x_2)$ значенням $f(x_2+0)$.



[1]Функція $f(x)$ називається кусково-неперервною на проміжку $[a,b]$, якщо вона має на цьому проміжку скінченну кількість точок розриву першого роду.

Рис. 5

Прикладом кусково-диференційовної функції є функція $y = |x|$. Неперервна функція $y = \sqrt[3]{x^2}$ на проміжку, що містить точку $x = 0$, не є кусково-диференційовною: функція не має похідної в точці $x = 0$, а її односторонні похідні в цій точці нескінченні.

Для кусково-диференційовних періодичних функцій справджується теорема:

Теорема 22 (теорема розкладання)**.** *Якщо функція $f(x)$ з періодом 2π кусково-диференційовна на проміжку $[-\pi, \pi]$, то її ряд Фур'є в кожній точці $x = x_0$ збігається і має суму*

$$S_0 = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}. \tag{3.2.5}$$

Ця сума, очевидно, дорівнює $f(x_0)$, якщо в точці $x = x_0$ функція неперервна.

Треба мати на увазі, що теорема розкладання дає д о с т а т н і умови збіжності ряду Фур'є. Якщо не всі з них виконуються, то це ще не означає, що ряд Фур'є не збігається (у певному розумінні) до функції $f(x)$.

Якщо кусково-неперервна функція не є кусково-диференційовною, то можна скористатися такими умовами.

Означення 18. *Кажуть, що функція $f(x)$ задовольняє у м о в и Д і р і х л е на проміжку $[-\pi, \pi]$, якщо вона або неперервна на цьому проміжку, або має скінченне число точок розриву першого роду, і якщо, окрім того, проміжок $[-\pi, \pi]$ можна розбити на скінченне число проміжків, на кожному з яких $f(x)$ змінюється м о н о т о н н о.*

Теорема 23 (теорема Діріхле)**.** *Якщо функція $f(x)$ з періодом 2π на проміжку $[-\pi, \pi]$ задовольняє умови Діріхле, то її ряд Фур'є збігається до $f(x)$ в кожній точці неперервності і до*

$$\frac{f(x + 0) + f(x - 0)}{2}$$

в кожній точці розриву.

Звертаємо увагу, що умови, висунуті в теоремах 22 і 23 не перекриваються.

Якщо функція $f(x)$ не є періодичною і на проміжку $[-\pi, \pi]$ є кусково-неперервною і має кусково-неперервну похідну (чи задовольняє умови Діріхле), то будують допоміжну функцію $f^*(x) = f(x)$, $x \in (-\pi, \pi]$, покладають $f^*(-\pi) = f^*(\pi) = f(\pi)$ і продовжують функцію $f^*(x)$ на всю дійсну вісь за законом періодичності з періодом 2π. До 2π-періодичного продовження функції $f^*(x)$ можна застосувати теорему розкладання (чи теорему Діріхле). Функції $f^*(x)$ і $f(x)$ мають однакові коефіцієнти Фур'є: функції $f^*(x)$ і $f(x)$ на проміжку $[-\pi, \pi]$ відрізняються, можливо, тільки в точці $x = -\pi$, що не впливає на значення коефіцієнтів Фур'є. На цій підставі робимо висновок, що ряд Фур'є кусково-неперервної функції, що має кусково-неперервну похідну (чи задовольняє умови Діріхле) на проміжку $[-\pi, \pi]$, збігається всюди.

Всередині проміжку $[-\pi, \pi]$ значення суми ряду Фур'є визначається формулою (3.2.5).

При $x = \pm\pi$ сума ряду дорівнює

$$\frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}.$$

Поза проміжком $[-\pi, \pi]$ значення суми ряду Фур'є визначаються за законами періодичності і ніякого відношення до значень неперіодичної функції $f(x)$, яких вона набуває поза проміжком $[-\pi, \pi]$ (якщо, безумовно, вона там визначена), не мають.

3.3. Розклад в ряд Фур'є парних і непарних функцій

1°. Якщо функція $f(x)$ п а р н а, то з (3.1.4) маємо:

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots,$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx.$$

2°. Для н е п а р н о ї функції $f(x)$ маємо:

$$a_k = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx,\ k = 1, 2, \ldots,$$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

3°. Якщо функція $f(x)$ визначена лише на проміжку $[0, \pi]$, то її можна продовжити на проміжок $[-\pi, 0)$ д о в і л ь н о із збереженням кускової диференційовності і обчислити її коефіцієнти Фур'є за формулами (3.1.4).

Якщо для $x \in [-\pi, 0)$ покласти $f(x) = f(-x)$, то отримаємо розклад 1° за косинусами.

Якщо для $x \in [-\pi, 0)$ покласти $f(x) = -f(-x)$, то отримаємо розклад 2° за синусами.

3.4. Випадок довільного проміжку

Якщо функція задана на проміжку $[-l, l]$, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{3.4.6}$$

де

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx,$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,\ k = 1, 2, \ldots, \tag{3.4.7}$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,\ k = 1, 2, \ldots$$

Зокрема, якщо функція $f(x)$ парна, то

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l}, \tag{3.4.8}$$

де

$$a_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,\ k=0,1,2,\ldots, \tag{3.4.9}$$

а якщо $f(x)$ непарна, то

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{3.4.10}$$

де

$$b_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,\ k=1,2,\ldots \tag{3.4.11}$$

Якщо функція задана на довільному проміжку $[a,b]$, то її ряд Фур'є має вигляд (3.4.6), де $l = \dfrac{b-a}{2}$. Коефіцієнти Фур'є обчислюють за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_a^b f(x)\,dx,\ a_k = \frac{1}{l}\int\limits_a^b f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int\limits_a^b f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,\ k=1,2,\ldots$$

3.5. Поведінка коефіцієнтів Фур'є

Твердження 3.5. 1. *Коефіцієнти Фур'є a_m, b_m кусково-неперервної функції при $m\to\infty$ прямують до нуля.*

Відповідь на питання щодо швидкості спадання коефіцієнтів Фур'є дає така теорема ([?], с. 494):

Теорема 24. *Якщо періодична неперервна функція $f(x)$ має неперервні похідні до $(k-1)$-го порядку включно, а похідна k-го порядку задовольняє умови Діріхле, то коефіцієнти a_n, b_n функції $f(x)$ будуть порядку не нижче $\dfrac{1}{n^{k+1}}$, тобто матимуть оцінку*

$$|\,a_n| \leqslant \frac{M}{n^{k+1}}, \quad |\,b_n| \leqslant \frac{M}{n^{k+1}}, \tag{3.5.12}$$

де M — деяке додатне число.

З а у в а ж е н н я 1. Якщо похідна k-го порядку функції $f(x)$ є к у с к о в о - н е п е р е р в н о ю функцією і задовольняє умови Діріхле, то для членів однієї з послідовностей $\{a_n\}$ і $\{b_n\}$ (або й для обох послідовностей) у (3.5.12) виконується рівність, тобто у цьому випадку a_n або b_n (або й обидва) при $n\to\infty$ прямують до нуля як $\dfrac{1}{n^{k+1}}$.

З а у в а ж е н н я 2. Якщо функція є кусково-неперервною і задовольняє умови Діріхле, то

$$|\,a_n| \leqslant \frac{M}{n}, \quad |\,b_n| \leqslant \frac{M}{n},$$

і принаймні одна з послідовностей її коефіцієнтів Фур'є a_n, b_n при $n\to\infty$ є величиною порядку $\dfrac{1}{n}$.

3.6. Приклади розкладу функцій в ряд Фур'є

П р и к л а д 1. Розкласти в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{якщо } -\pi < x \leqslant 0; \\ x, & \text{якщо } 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

на проміжку $[-\pi, \pi]$.

Р о з в ' я з а н н я. Функція є кусково-неперервною і має кусково-неперервну похідну. Вона розкладається в ряд Фур'є. Графік 2π-періодичного продовження функції $f(x)$ зображено на рис. 6.

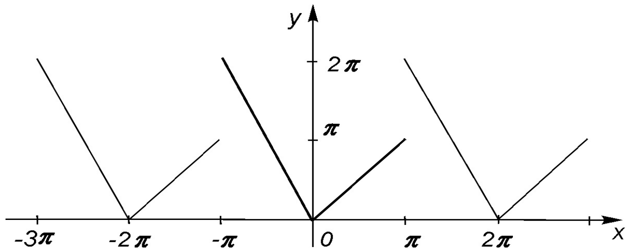


Рис. 6

Знаходимо коефіцієнти Фур'є заданої функції. За формулами (3.1.4) маємо:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-2x)dx + \int_{0}^{\pi} xdx\right] = \frac{1}{\pi}\left[-x^2\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{\pi}\right] = \frac{3\pi}{2};$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-2x)\cos kxdx + \int_{0}^{\pi} x\cos kxdx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-2x\frac{\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} + 2\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin kx}{k}dx + x\frac{\sin kx}{k}\Big|_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi}\frac{\sin kx}{k}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 - 2\frac{\cos kx}{k^2}\Big|_{-\pi}^{0} + 0 + \frac{\cos kx}{k^2}\Big|_{0}^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-2\frac{1-(-1)^k}{k^2} + \frac{(-1)^k - 1}{k^2}\right] = \frac{3((-1)^k - 1)}{k^2\pi};$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-2x)\sin kxdx + \int_{0}^{\pi} x\sin kxdx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[2x\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} - 2\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos kx}{k}dx - x\frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi}\frac{\cos kx}{k}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2(-1)^k\pi}{k} - \frac{(-1)^k\pi}{k}\right] = \frac{(-1)^k}{k}.$$

Ряд Фур'є функції $f(x)$ має вигляд

$$f(x) \sim \frac{3\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3((-1)^k - 1)}{k^2\pi}\cos kx + \frac{(-1)^k}{k}\sin kx.$$

Графік двадцятої частинної суми ряду зображено на рис. 7.

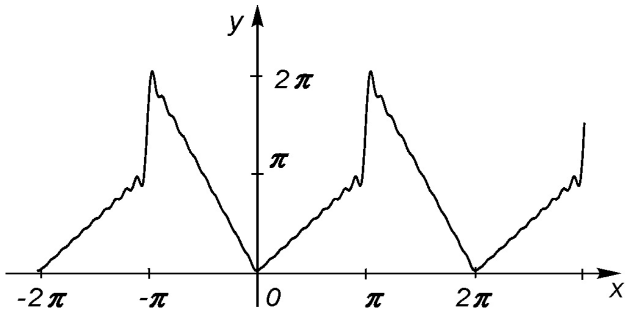


Рис. 7

В точках $x = (2n-1)\pi$ сума ряду Фур'є набуває значення $\dfrac{f(-\pi)+f(\pi)}{2} = \dfrac{3\pi}{2}$. У всіх інших точках сума ряду є неперервною функцією, її графік збігається з графіком 2π-періодичного продовження функції $f(x)$.

Із ряду Фур'є функції $f(x)$ отримуємо результат, який привертає до себе увагу, а саме: оскільки в точці $x = 0$ сума ряду Фур'є неперервна, то

$$f(0) = 0 = \frac{3\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3((-1)^k - 1)}{k^2\pi} = \frac{3\pi}{4} + \frac{-6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$

звідки знаходимо суму числового ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

П р и к л а д 2. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = |\sin x|$.

Р о з в ' я з а н н я. Функція є неперервною, має кусково-неперервну похідну, періодична з основним періодом $2l = \pi$.

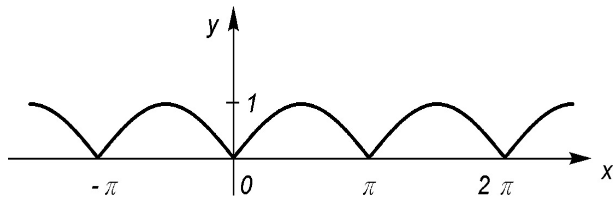


Рис. 8

Знаходимо, що $l = \dfrac{\pi}{2}$, розклад здійснюється за системою функцій:

$$1, \cos\frac{k\pi x}{l} = \cos 2kx, \sin\frac{k\pi x}{l} = \sin 2kx,\ k = 1, 2, \ldots.$$

Оскільки $f(-x) = f(x)$, то

$$b_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots,$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \frac{4}{\pi},$$

$$a_k = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, \cos 2kx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(1+2k)x + \sin(1-2k)x)\, dx = -\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{4k^2-1}.$$

Ряд Фур'є збігається до функції $f(x)$ рівномірно і має вигляд

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2-1}.$$

Приклад 3. Функцію $f(x) = x(2-x)$, $0 \leqslant x \leqslant 2$ розкласти в ряд Фур'є за синусами. Побудувати графік суми ряду Фур'є.

Розв'язання. Оскільки розклад здійснюється за синусами, то продовжимо функцію на проміжок $(-2;0)$ як функцію непарну, тобто побудуємо функцію $f^*(x)$ за правилом: $f^*(x) = f(x)$ при $x \in [0,2]$, для $x \in (-2,0)$ покладемо $f^*(x) = -f(-x) = -(-x(2-(-x)) = x(2+x)$. Тепер маємо непарну функцію $f^*(x)$, визначену на проміжку $(-l, l]$, $l = 2$. Продовжимо її на всю вісь з періодом $2l = 4$. Графік продовження заданої функції зображено на рис. 9.

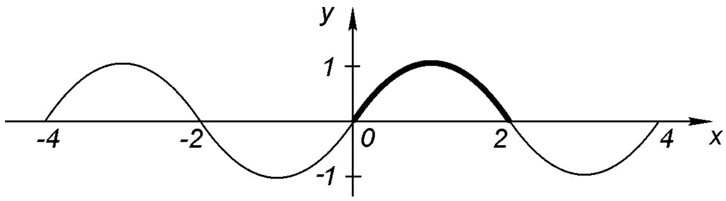


Рис. 9

Оскільки продовжена функція є неперервною, то її графік і графік суми її ряду Фур'є не відрізняються.

Перш, ніж приступити до обчислення коефіцієнтів Фур'є, дослідимо функцію $f^*(x)$. Неважко бачити, що вона має неперервну похідну

$$f^{*\prime}(x) = \begin{cases} 2x, & -2 \leqslant x < 0; \\ -2x, & 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

і $f^{*\prime}(-2) = f^{*\prime}(2)$. Її друга похідна є кусково-неперервною:

$$f^{*\prime\prime}(x) = \begin{cases} 2, & -2 < x < 0; \\ -2, & 0 < x < 2 \end{cases}$$

і, очевидно, задовольняє умови Діріхле. Отже, за теоремою 24 коефіцієнти Фур'є b_n функції $f(x)$ при розкладі її в ряд Фур'є за синусами кратних дуг спадають як $\dfrac{1}{n^3}$, коли $n \to \infty$.

Переконуємося, що так воно і є:

$$\begin{aligned} b_n = {} & \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int_0^2 x(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \\ = {} & -x(2-x)\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 (2-2x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \\ = {} & \frac{2}{n\pi}\left[(2-2x)\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\,(-2)dx\right] = \\ = {} & \frac{16}{n^3\pi^3}\left[-\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2\right] = \frac{16}{n^3\pi^3}\left(1-(-1)^n\right). \end{aligned}$$

Запишемо ряд Фур'є заданої функції:

$$f(x) \sim \frac{32}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2}.$$

3.7. Розв'язання задач засобами Maple

Процедура розкладу функції в ряд Фур'є в Maple відсутня. Таку процедуру та її застосування можна знайти, наприклад, в [?], с. 153-155.

Наведемо приклад процедури, яка для заданого виразу будує відрізок ряду Фур'є. Вхідними параметрами процедури будуть: f — вираз, для якого треба виписати ряд Фур'є, x — змінна, x_1, x_2 — проміжок зміни x, n — кількість членів ряду.

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ і задовольняє умови Діріхле на цьому проміжку. Тоді її можна розкласти в ряд Фур'є

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l},$$

де $l = \dfrac{x_2 - x_1}{2}$, а коефіцієнти Фур'є обчислюють за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx,\; a_k = \frac{1}{l}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,\; k = 1, 2, \ldots$$

Текст процедури:

```
> restart: with(plots):
> fourierseries:=proc(f,x,x1,x2,n) local k, l,a,b,s;
> l:=(x2-x1)/2;
> a[0]:=int(f,x=x1..x2)/l;
> s:=a[0]/2;
> for k from 1 to n do
> a[k]:=int(f*cos(k*Pi*x/l),x=x1..x2)/l;
> b[k]:=int(f*sin(k*Pi*x/l),x=x1..x2)/l;
> s:=s+a[k]*cos(k*Pi/l*x)+b[k]*sin(k*Pi/l*x): end do:
> s;
> end;
```

```
fourierseries := proc(f, x, x1, x2, n)
    local k, l, a, b, s;
     l := 1/2 * x2 - 1/2 * x1;
     a[0] := int(f, x = x1..x2)/l;
     s := 1/2 * a[0];
     for k to n do
          a[k] := int(f * cos(k * Pi * x/l), x = x1..x2)/l;
          b[k] := int(f * sin(k * Pi * x/l), x = x1..x2)/l;
          s := s + a[k] * cos(k * Pi * x/l) + b[k] * sin(k * Pi * x/l);
    end do;
    s;
end proc
```

Розглянемо приклад: для функції $f = \dfrac{x}{2}$ на проміжку $(0, 2\pi)$ побудуємо відрізок ряду Фур'є при $n = 6$:

```
> f:=x/2: x1:=0: x2:=2*Pi: n:=6
> fr:=fourierseries(f,x,x1,x2,n);
```

$$fr := \frac{\pi}{2} - \sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} - \frac{\sin(5x)}{5} - \frac{\sin(6x)}{6}$$

Побудуємо графіки заданої функції f та отриманого відрізка ряду Фур'є:

```
> p1:=plot(f, x=0..2*Pi, color=red,thickness=2, linestyle=3,scaling=constrained):
> p2:=plot(fr,x=-2*Pi..4*Pi,color=black,thickness=2, linestyle=1,scaling=constrained):
> display(p1,p2);
```

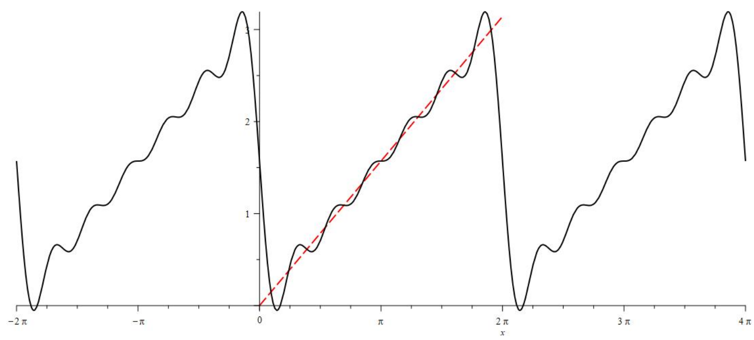


Рис. 10

Наведемо графіки при $n = 100$:

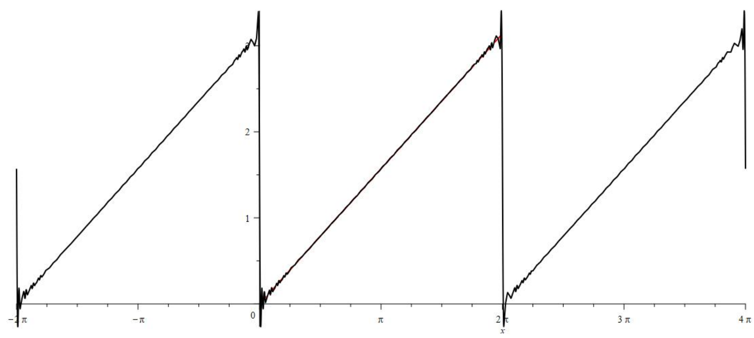
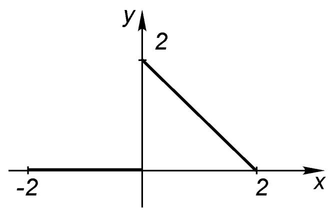
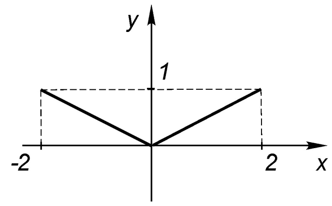
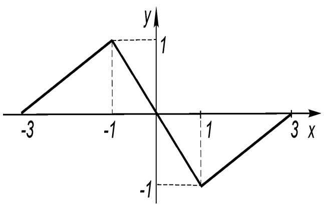
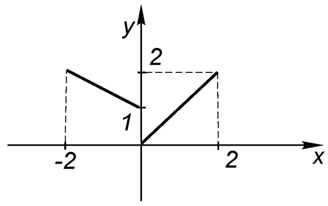
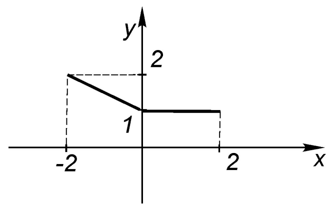
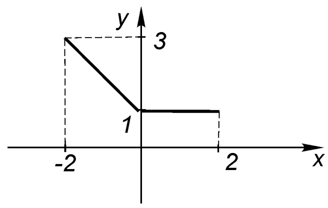
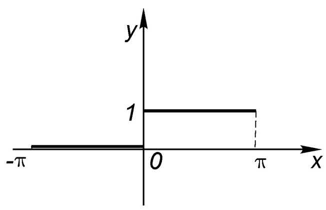
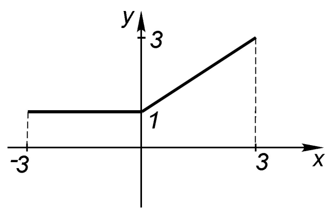
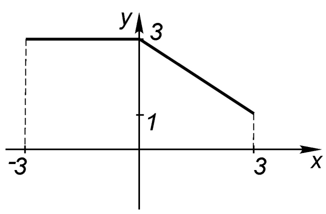
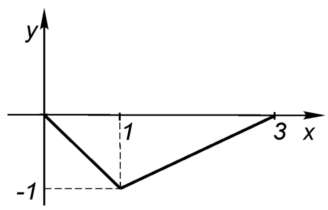


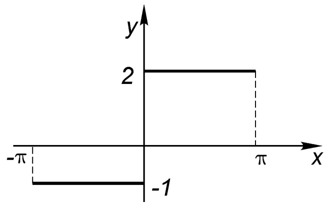
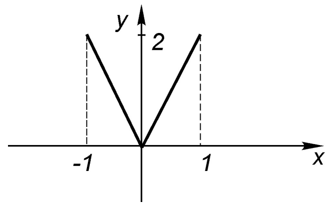
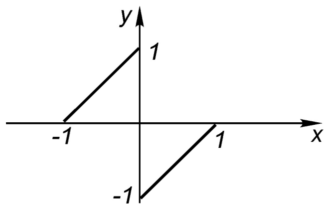
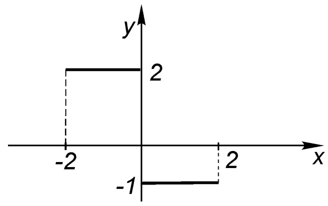
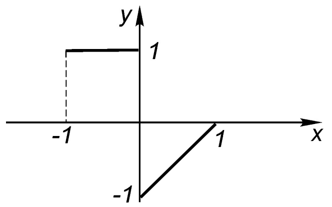
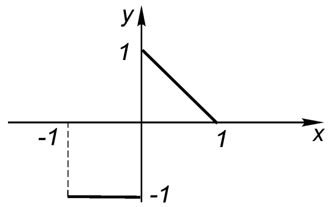
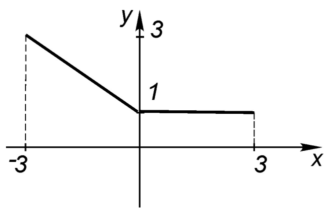
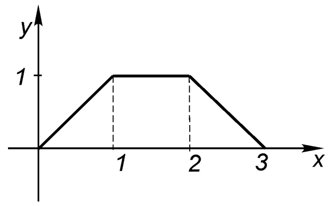
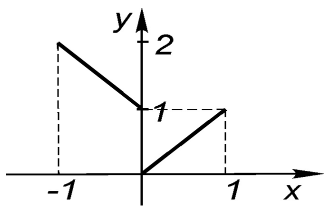
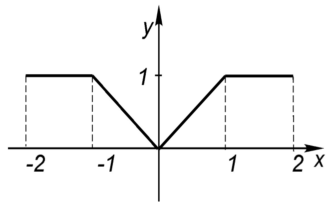
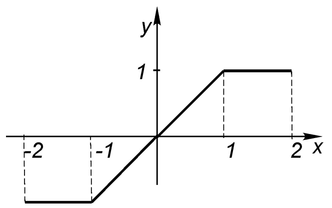
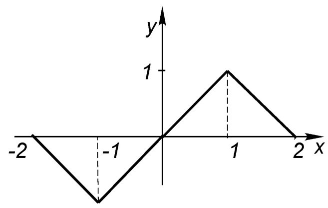
Рис. 11

Як бачимо, на кінцях проміжку ряд Фур'є збігається дуже погано.

Завдання до розділу

Розкласти в ряд Фур'є функції, задані графіками:

1		**2**	
3		**4**	
5		**6**	
7		**8**	
9		**10**	

<table>
<tr><td>11</td><td>
</td><td>12</td><td>
</td></tr>
<tr><td>13</td><td>
</td><td>14</td><td>
</td></tr>
<tr><td>15</td><td>
</td><td>16</td><td>
</td></tr>
<tr><td>17</td><td>
</td><td>18</td><td>
</td></tr>
<tr><td>19</td><td>
</td><td>20</td><td>
</td></tr>
<tr><td>21</td><td>
</td><td>22</td><td>
</td></tr>
</table>

Частина II

Диференціальне та інтегральне числення функції кількох змінних

Тема 4

Функції кількох змінних.

4.1. Основні поняття

Нехай D — підмножина простору $\mathbb{R}^2$. Елементами простору $\mathbb{R}^2$ є упорядковані пари (x, y) дійсних чисел.

Означення 19. *Якщо задане правило, за яким кожній упорядкованій парі дійсних чисел $(x, y) \in D$ ставиться у відповідність дійсне число z, то кажуть, що задана функція z двох змінних x і y. При цьому записують $z = f(x, y)$.*

Множину D називають областю визначення функції f і позначають символами $D(f)$ або D_f. Областю значень функції f називають усі ті значення, яких набуває змінна z, коли x та y перебігають область визначення D_f. Позначають область значень символами $R(f)$ або R_f.

Оскільки у деякій фіксованій прямокутній системі координат між точками M площини та упорядкованими парами чисел (x, y) існує взаємно однозначна відповідність, то функцію двох змінних $z = f(x, y)$ можна розглядати як функцію точки M і записувати $z = f(M)$. Далі ми користуватимемось обома цими позначеннями.

Неважко узагальнити поняття функції для більшого числа змінних. Нехай $D_f \subset \mathbb{R}^n$, $R_f \subset \mathbb{R}$. Відображення $f : D_f \to R_f$ називають функцією n змінних. Оскільки елементи простору $\mathbb{R}^n$ — упорядковані набори з n дійсних чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то записують $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ або $y = f(M)$.

Надалі ми обмежимось, в основному, розглядом функцій двох змінних.

Способи задання функції двох змінних такі, як і для функції однієї змінної — це *аналітичний*, *табличний* та *описовий* способи.

При *аналітичному* способі правило відповідності $f : (x, y) \mapsto z$ задають аналітичним виразом (формулою). Наприклад, $z = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, тощо. При цьому під областю визначення функції розуміють її природну область існування, тобто усі ті значення змінних x та y, при яких заданий аналітичний вираз має сенс. Так, у першому з наведених прикладів функція визначена для будь-яких дійсних значень x та y — $D_f = \mathbb{R}^2$, у другому прикладі заданий вираз має сенс за умови $1 - x^2 - y^2 \geqslant 0$, тобто областю визначення функції є круг радіуса 1 з центром на початку координат.

Якщо залежність функції $z = f(x, y)$ від аргументів отримана у результаті спостережень або вимірювань, то її подають у вигляді таблиці

	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	$z_{1\,1}$	$z_{1\,2}$	$\ldots$	$z_{1\,m}$
x_2	$z_{2\,1}$	$z_{2\,2}$	$\ldots$	$z_{2\,m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	$z_{n\,1}$	$z_{n\,2}$	$\ldots$	$z_{n\,m}$

Такий спосіб задання функції називають *табличним*.

Геометричний зміст функції $z = f(x, y)$ з областю визначення D_f — це поверхня у просторі змінних x, y, z, розташована над областю D_f координатної площини xOy (рис. 12).

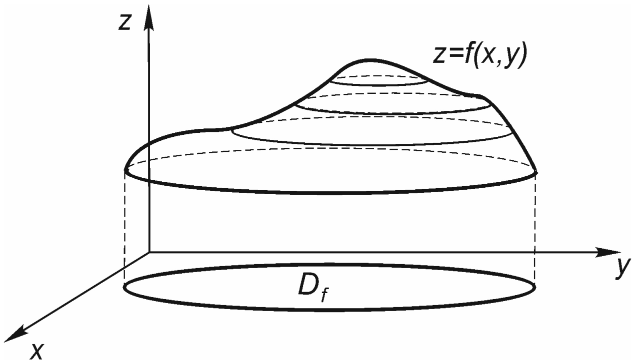


Рис. 12

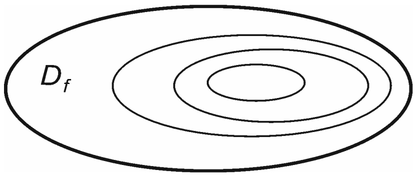


Рис. 13

Лінії $\begin{cases} z = f(x, y), \\ z = c \end{cases}$ — це точки поверхні $z = f(x, y)$, розташовані на одному рівні (рівні c) відносно площини xOy (рис. 12). Проекції цих ліній на площину xOy називають *лініями рівня* функції $z = f(x, y)$. Вони утворюють однопараметричне сімейство кривих $f(x, y) = c$ (c — параметр). Лінії рівня (вид зверху) функції, зображеної на рис. 12, подано на рис. 13.

4.1. Границя функції в точці

Означення 20. *ε-околом точки $M_0(x_0, y_0)$ називають множину точок $M(x, y)$ таких, що*

$$d(M_0, M) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon,$$

тобто ε-окіл точки M_0 — це внутрішні точки круга радіуса ε з центром в точці M_0. Позначимо ε-окіл точки M_0 символом $S_\varepsilon(M_0)$.

Означення 21. *Кажуть, що послідовність точок $M_n(x_n, y_n)$ збігається до точки $M_0(x_0, y_0)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що для всіх $n > N$ виконується нерівність*

$$d(M_0, M_n) < \varepsilon,$$

тобто починаючи з деякого номера N, члени послідовності $\{M_n\}$ потрапляють у ε-окіл точки M_0 і більше з нього не виходять: $M_n \in S_\varepsilon(M_0)$, $n > N$.

Означення 22. *Число A називають границею функції $z = f(M)$ в точці M_0, якщо якою б не була послідовність $\{M_n\}$, що збігається до M_0 і $M_n \neq M_0$, $n = 1, 2, \ldots$, відповідна їй числова послідовність $f(M_n)$ збігається до A, при цьому записують*

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A.$$

Границю функції двох змінних $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ позначають також символом

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y), \tag{4.1.1}$$

при цьому вважається, що x і y прямують до своїх границь незалежно одне від одного. Границю (4.1.1) називають *подвійною границею.*

Для обчислення подвійної границі (4.1.1) розглядають усілякі лінії, що проходять через точку $M_0(x_0, y_0)$, і спрямовують точку $M(x, y)$ до точки M_0 вздовж цих ліній. Окремими випадками ліній, що проходять через точку M_0, є ламані з ланками, паралельними осям координат (рис. 3). Ламаним MAM_0 та MBM_0 відповідають границі

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) \text{ та } \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

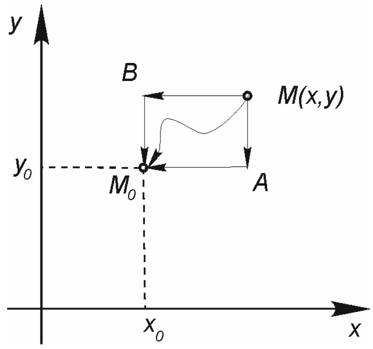


Рис. 14

Ці границі називають *повторними.* Якщо повторні границі не існують або є різними, то подвійна границя не існує. Якщо повторні границі скінченні і рівні, то проводять додаткове дослідження, оскільки, як показують наведені нижче приклади, із рівності повторних границь ще не випливає існування подвійної границі.

Для подальшого дослідження існування подвійної границі покладемо $y = \varphi(x)$, де функція $\varphi(x)$ така, що $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = y_0$, і розглянемо границю

$$\lim_{x\to x_0} f(x, \varphi(x)). \tag{4.1.2}$$

Якщо подвійна границя (4.1.1) існує, то границя (4.1.2) н е з а л е ж и т ь від шляху, яким точка M прямує до M_0. Якщо виявиться, що границя (4.1.2) залежить від функції $\varphi(x)$, то подвійна границя (4.1.1) не існує.

П р и к л а д 1. Розглянемо границю

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Обидві повторні границі існують і рівні між собою:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = 0.$$

Проведемо додаткове дослідження. Виберемо тепер за шлях, яким спрямуємо точку $M(x, y)$ до точки $M_0(0, 0)$, пряму $y = kx$, де k — довільне число, і знайдемо границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Оскільки границя виявилася залежною від способу прямування M до M_0, робимо висновок, що задана подвійна границя не існує.

4.2. Неперервні функції

Означення 23. *Функція $f(M)$ називається н е п е р е р в н о ю в т о ч ц і M_0, якщо $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$.*

Функція $f(M)$ називається н е п е р е р в н о ю н а м н о ж и н і D, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.

Можна дати означення неперервної функції на мові приростів. Позначимо через Δx і Δy прирости аргументів x і y відповідно.

Означення 24. *Прирости*

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \text{ та } \Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

називають ч а с т и н н и м и п р и р о с т а м и функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$.

Приріст

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

називають п о в н и м приростом функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$.

Означення 25. *Функцію $z = f(x, y)$ називають неперервною за змінною x (за змінною y) в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta_x z = 0 \quad (\lim_{\Delta y \to 0} \Delta_y z = 0).$$

Функцію $z = f(x, y)$ називають неперервною за сукупністю змінних x і y або просто неперервною, якщо

$$\lim_{\substack{\Delta x \to x_0 \\ \Delta y \to y_0}} \Delta z = 0.$$

Неперервні функції кількох змінних мають властивості, аналогічні властивостям неперервних функцій однієї змінної:

сума, різниця, добуток і, якщо дільник не обертається в нуль, то і частка двох неперервних функцій кількох змінних є неперервними функціями.

П р и к л а д 1. Дослідити на неперервність функцію

$$z = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & x \neq 0, \ y \neq 0; \\ 0, & x = 0, \ y = 0. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я. Очевидно, що чисельник і знаменник заданого дробу є неперервними функціями. Знаменник $x^2 + y^2$ обертається на нуль в єдиній точці $x = 0$, $y = 0$. Звідси робимо висновок, що при $x \neq 0$, $y \neq 0$ функція є неперервною як частка двох неперервних функцій.

В точці $(0, 0)$ задана функція є неперервною за кожною зі змінних x і y окремо (частинні прирости функції в точці $(0; 0)$ тотожно рівні нулю), але не є неперервною за сукупністю змінних, оскільки границя

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

як було показано у попередньому прикладі, не існує.

П р и к л а д 2. Дослідити на неперервність функцію

$$z = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x \neq 0, \ y \neq 0; \\ 0, & x = 0, \ y = 0. \end{cases}$$

Р о з в ' я з а н н я. Розглянемо подвійну границю

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Нехай y при $x \to 0$ є нескінченно малою порядку α: $y = Mx^\alpha + o(x^\alpha)$, де $M \neq 0$ — яке-небудь число, $\alpha > 0$. Тоді чисельник $x^2y = Mx^{2+\alpha} + o(x^{2+\alpha})$ є нескінченно малою порядку $2+\alpha$. При цьому знаменник

$$x^2 + y^2 = x^2 + M^2x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha})$$

є нескінченно малою порядку 2, якщо $\alpha \geqslant 1$, або нескінченно малою порядку 2α, якщо $\alpha < 1$. У будь-якому разі чисельник заданого дробу є нескінченно малою вищого порядку, ніж його знаменник:

1) якщо $\alpha \geqslant 1$, то $2+\alpha > 2$;

2) якщо $\alpha < 1$, то $2+\alpha > 2\alpha$.

Тобто дріб являє собою нескінченно малу величину при $x \to 0$, $y \to 0$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

Оскільки границя функції в точці $(0,\ 0)$ дорівнює значенню функції в цій точці, то функція є неперервною в цій точці.

Для неперервних функцій кількох змінних справджуються аналоги теорем Больцано-Коші та теорема Вейєрштрасса.

Теорема 25 (теорема Вейєрштрасса)**.** *Функція, визначена і неперервна в замкненій обмеженій області $\overline{D}$,*

а) обмежена в $\overline{D}$;

б) досягає в $\overline{D}$ свого найбільшого та найменшого значень.

4.3. Розв'язання задач засобами Maple

Приклад 1. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{x - y^2}$.
Розв'язання. Вираз $\sqrt{x - y^2}$ має сенс за умови $x - y^2 \geqslant 0$. Побудуємо цю множину:

```
> restart; with(plots):
> inequal(0<=x-y^2,x=0..4,y=-2..2,color=gray,thickness=4);
```

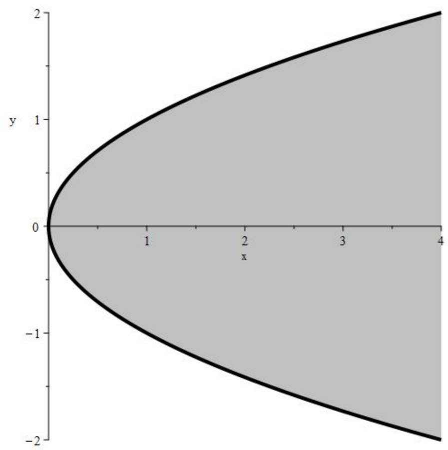


Рис.15

Приклад 2. Знайти область визначення функції $z = \arcsin(x + y)$.
Розв'язання. Областю визначення заданої функції є множина $|x + y| \leqslant 1$.

```
> inequal({(x+y)<=1,-1<=x+y},x=-2..3,y=-2..3,color=gray);
```

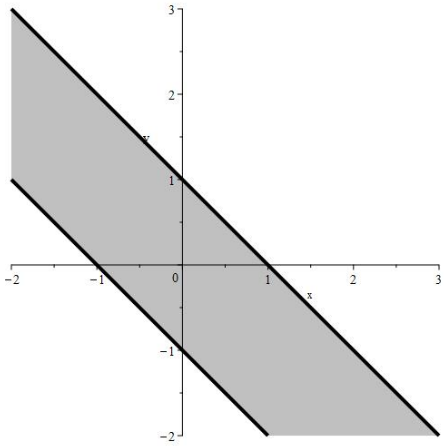


Рис.16

П р и к л а д 3. Знайти область визначення функції $z = \arccos x^2 + \arcsin y$.
Р о з в ' я з а н н я. Вираз $z = \arccos x^2 + \arcsin y$ має сенс, коли $|x| \leqslant 1 \cap |y| \leqslant 1$.

```
> inequal({-1<=x,x<=1,-1<=y,y<=1},x=-1.5..1.5,y=-1.5..1.5,color=gray,
  thickness=4);
```

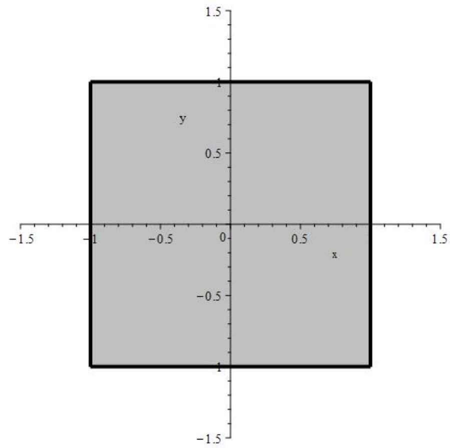


Рис.17

П р и к л а д 4. Побудувати лінії рівня функції $z = |x| + |y|$.
Р о з в ' я з а н н я. Лінії рівня визначаються рівняннями $z = c$, де $c = \text{const}$. Розглянемо лінію $|x| + |y| = c$. Побудувати її в Maple можна кількома способами. Наприклад, можна побудувати розв'язок нерівності $|x| + |y| \leqslant c$ і залити отриману область білим кольором. А можна побудувати на одній площині два графіки $y = c - |x|$ та $y = |x| - c$ на проміжку $- \leqslant x \leqslant c$. Покажемо обидва ці способи. Будуватимемо три лінії рівня, надаючи сталій c значень 1, 2 та 3. Лінію рівня при $c = 2$ виділимо товщиною. Оскільки нам доведеться поміщати на одну площину кілька графіків, що мають різні властивості (товщина ліній, інтервали, на яких будується графік) створимо спочатку графічні структури, а потім покажемо їх на одній площині.

```
> restart: with(plots):
> s1:=inequal({abs(x)+abs(y)<=1,abs(x)+abs(y)<=3},x=-4..4,y=-4..4,color=white):
> s2:=plot([abs(x)-2,2-abs(x)],x=-2..2,y=-2..2,thickness=4, color=black):
> display(s1,s2);
```

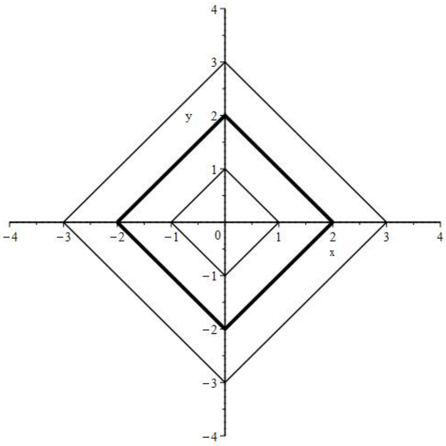


Рис.18

П р и к л а д 5. Дослідити функцію

$$z = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{якщо } x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & \text{якщо } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

на неперервність в точці $M_0(0,0)$.

Р о з в ' я з а н н я. Функція не є неперервною в точці $M_0(0,0)$. Обчислимо значення функції при $y = 0$ та $y = x^2$:

```
> z:=(x,y)->x^2*y/(x^4+y^2);
```

$$z := (x,y) \mapsto \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

```
> z(x,0);
```

$$0$$

```
> z(x,x^2);
```

$$\frac{1}{2}$$

Звідси маємо висновок, що границя $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ не існує.

Завдання до розділу

1. Знайти області визначення функцій:

а) $z = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$; б) $z = \arcsin\dfrac{x}{2} + \sqrt{xy}$;

в) $z = \sqrt{y\sin x}$; г) $z = \ln(x-2y)$.

2. Побудувати лінії рівня функцій:

а) $z = x^2+y^2$; б) $z = x^2-y^2$;

в) $z = (x+y)^2$; г) $z = \sqrt{xy}$.

3. Обчислити повторні границі функції:

а) $z = \dfrac{2x^2+y^2}{x^2+y^3}$, якщо $x\to\infty$, $y\to\infty$; б) $z = \dfrac{\sin(xy)}{xy}$, якщо $x\to\infty$, $y\to 0$.

Тема 5

Елементи диференціального числення

5.1. Частинні похідні

Означення 26. *Якщо існує скінченна границя*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}\qquad\left(\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}\right),$$

то її називають ч а с т и н н о ю похідною функції $z=f(x,y)$ за змінною x (за змінною y).

Позначають частинні похідні символами $z'_x,\ z_x,\ \dfrac{\partial z}{\partial x},\ z'_y,\ z_y,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$. Знаходять частинні похідні, користуючись відомими таблицею та правилами диференціювання функції однієї змінної. При диференціюванні за змінною x вважають y сталою величиною і, навпаки, коли знаходять похідну за змінною y, то x вважають сталою величиною.

Геометричний зміст частинних похідних. Графіком функції $z=f(x,y)$ є деяка поверхня. Візьмемо на цій поверхні точку $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$. Проведемо площини $x=x_0$ та $y=y_0$. Лінії перетину цих площин з поверхнею $z=f(x,y)$ позначимо через $z=f(x_0,y)$ і $z=f(x,y_0)$ відповідно (рис. 19).

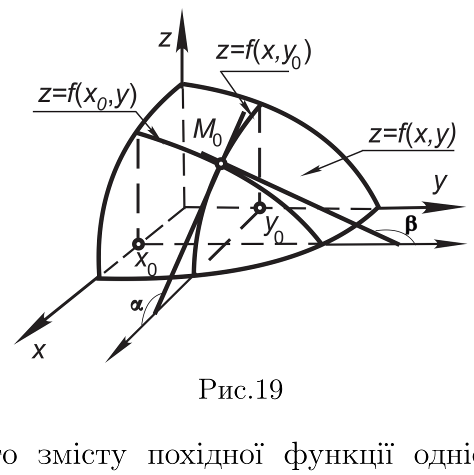


Рис.19

Виходячи з геометричного змісту похідної функції однієї змінної, знаходимо, що $f'_x(x_0,y_0)=\operatorname{tg}\alpha$, де α — кут між віссю Ox і дотичною, проведеної до кривої $z=f(x,y_0)$ в точці M_0. Аналогічно знаходимо, що $f'_y(x_0,y_0)=\operatorname{tg}\beta$.

П р и к л а д 1. Знайти частинні похідні функції $z=x^y$.

Р о з в ' я з а н н я. При сталому значенні y і змінній величині x функція $z=x^y$ являє собою степеневу функцію, тому

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot x^{y-1}.$$

Якщо x — стала, а y — змінна, то $z = x^y$ — показникова функція, тобто

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

5.2. Повний диференціал функції

Розглянемо функцію двох змінних

$$z = f(x, y).$$

Різницю $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ називають повним приростом функції і позначають символом Δz.

За умови існування частинних похідних у деякому околі точки (x, y) і їх неперервності в цій точці повний приріст функції можна подати у вигляді[1]

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \tag{5.2.1}$$

де α, $\beta \to 0$ при Δx, $\Delta y \to 0$.

Означення 27. *Головну лінійну за приростами аргументів частину повного приросту функції називають повним диференціалом функції і позначають символом dz:*

$$dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y. \tag{5.2.2}$$

Означення 28. *Якщо повний приріст функції $f(x, y)$ можна подати у вигляді рівності* (5.2.1)*, то функцію називають* *д и ф е р е н ц і й о в н о ю* *в точці* (x, y).

Прирости незалежних змінних Δx і Δy називають диференціалами незалежних змінних x та y і позначають через dx та dy відповідно. У цих позначеннях повний диференціал набуває вигляду

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy \tag{5.2.3}$$

або

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{5.2.4}$$

П р и к л а д 1. Обчислити наближено $\sqrt{4,05^2 + 2,93^2}$.
Р о з в ' я з а н н я. Заданий числовий вираз можна розглядати як значення функції $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точці $x = 4,05$, $y = 2,93$. Очевидно, що значення функції z та її похідних досить просто обчислюються в точці $x_0 = 4$, $y_0 = 3$. Скористаємося повним диференціалом функції:

$$z(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx z(x_0, y_0) + dz(x_0, y_0).$$

Заходимо прирости аргументів, частинні похідні функції z і обчислюємо її повний диференціал в точці (x_0, y_0):
$\Delta x = x - x_0 = 4,05 - 4 = 0,05$, $\Delta y = y - y_0 = 2,93 - 3 = -0,07$.
$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\quad dz(x_0, y_0) = \dfrac{4}{5}\Delta x + \dfrac{3}{5}\Delta y = -0,002$. Отже,

$$\sqrt{4,05^2 + 2,97^2} \approx 5 - 0,002 = 4,998.$$

Для порівняння наведемо значення виразу $\sqrt{4,05^2 + 2,97^2}$, обчислене з точністю до 10^{-9}: 4,998739841.

[1] Див., наприклад, [?], с. 245.

5.3. Похідні складених функцій

Нехай z є функцією змінних x і y, які, в свою чергу, є функціями змінної t. Тоді z являє собою функцію, що залежить від однієї змінної t:

$$z = f(x(t), y(t)) = z(t).$$

Нехай функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні, а функції $x(t)$ та $y(t)$ є диференційовними. Тоді існує похідна функції $z(t)$:

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(x + \Delta x, y + \Delta y) - z(x, y)}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(f'_x \frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) =$$
$$= f'_x x'_t + f'_y y'_t + 0 \cdot x'_t + 0 \cdot y'_t = f'_x x'_t + f'_y y'_t$$

Похідну функції $z(t)$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

називають *повною* похідною.

Якщо, окрім того, z ще залежить від t явно, тобто $z = f(t, x(t), y(t))$, то повна похідна має вигляд

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Нехай $z = f(x, y)$, а $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Тоді z є функцією змінних u і v:

$$z = f(x(u, v), y(u, v)) = z(u, v).$$

Частинні похідні функції $z(u, v)$ знаходять за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Приклад 1. Сторона прямокутника $x = 20$ *м* збільшується зі швидкістю 5 *м/сек*, інша сторона $y = 30$ *м* зменшується зі швидкістю 4 *м/сек*. З якою швидкістю змінюються периметр і площа прямокутника?

Розв'язання. Периметр і площа прямокутника є функціями x та y: $P = 2(x + y)$, $S = x \cdot y$. У свою чергу, змінні x та y є функціями змінної t, про які відомо, що $x(0) := 20$, $x'(0) = 5$, $y(0) = 30$, $y'(0) = -4$. Знайдемо повні похідні функцій P і S при $t = 0$:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) = 2 \text{ [м/сек]}.$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial S}{\partial y}\frac{dy}{dt} = y \cdot 5 + x \cdot (-4) = 30 \cdot 5 + 20 \cdot (-4) = 70 \text{ [м}^2\text{/сек]}.$$

5.4. Похідна у заданому напрямі. Градієнт

Нехай задано функцію $u = f(M)$, визначену в деякій області D, точку $M_0 \in D$ і промінь $\boldsymbol{L}$, що виходить із точки M_0 і має напрям вектора l.

Означення 29. *Похідною функції $u(M)$ в точці M_0 у заданому напрямі l називають границю*

$$\lim_{M \to M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{|\, M_0 M|} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial l},$$

де M — точка променя $\boldsymbol{L}$, що виходить із точки M_0 і має напрям вектора l.

Розглянемо випадок, коли функція u залежить від трьох змінних x, y і z. Нехай вектор l має координати

$$l = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\},$$

де α, β, γ — кути, утворені вектором l з додатними напрямами координатних осей. Тоді координати поточної точки $M(x, y, z)$ променя $\boldsymbol{L}$ мають вигляд

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t\cos\alpha, \\ y &= y_0 + t\cos\beta, \\ z &= z_0 + t\cos\gamma, \end{aligned}$$

де $t > 0$. При цьому $|\, M_0 M| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = t$, оскільки сума квадратів напрямних косинусів дорівнює одиниці.

Знаходимо, що

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \lim_{t \to +0} \frac{u(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - u(x_0, y_0, z_0)}{t} =$$

$$= \frac{du}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma.$$

Означення 30. *Вектор*

$$\left\{\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\right\}$$

називають градієнтом функції $u(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$, позначають його символом $\operatorname{grad} u$ або ∇u.

Похідна функції $u(x, y, z)$ у напрямі l, обчислена в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, являє собою скалярний добуток вектора $\operatorname{grad} u(M_0)$ на одиничний вектор l

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = (\operatorname{grad} u(M_0), l) = |\operatorname{grad} u(M_0)|\, |\, l|\cos\theta, \qquad (5.4.5)$$

де θ — кут між вказаними векторами. Похідна у напрямі l характеризує швидкість зростання функції u в цьому напрямі. Найбільшого значення величина $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ досягає при $\theta = 0$, коли напрям вектора l збігається з напрямом вектора $\operatorname{grad} u(M_0)$, тобто вектор $\operatorname{grad} u(M_0)$ є напрямом найшвидшого зростання функції u в точці M_0.

5.5. Дотична площина та нормаль до поверхні

Означення 31. *На поверхні S через точку $M_0 \in S$ проведемо усілякі криві, для яких в точці M_0 існують дотичні. Якщо ці дотичні утворюють площину, то її називають дотичною площиною до поверхні S точці M_0.*

Нормаль дотичної площини до поверхні S в точці M_0 називають нормаллю до поверхні S в точці M_0.

Нехай S — поверхня рівня $u(x, y, z) = u(M_0)$ і нехай $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ — параметричні рівняння кривої L, що лежить на поверхні S і проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, тобто для деякого $t_0 \in [\alpha, \beta]$ $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t) = z_0$. Тоді для всіх $t \in [\alpha, \beta]$ виконується рівність

$$u(x(t), y(t), z(t)) = u(M_0).$$

Припустивши, що функції $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ є диференційовними, знаходимо, що

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0.$$

Зокрема, ця рівність виконується і в точці M_0. Повну похідну $\dfrac{du}{dt}$ в точці M_0 можна подати як скалярний добуток векторів

$$\nabla u(M_0) \text{ і } \left\{\frac{dx(t_0)}{dt}, \frac{dy(t_0)}{dt}, \frac{dz(t_0)}{dt}\right\}.$$

Останній із них є дотичним до кривої L в точці M_0. Звідси маємо такий висновок: дотичні до кривих, що лежать на поверхні S і проходять через точку M_0, в точці M_0 перпендикулярні до вектора $\nabla u(M_0)$ і, якщо $\nabla u(M_0)$ — ненульовий вектор, то дотичні утворюють площину Π, яка є дотичною до поверхні S в точці M_0. Оскільки ненульовий вектор $\nabla u(M_0)$ є нормаллю дотичної площини Π, то рівняння площини Π має вигляд:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0. \tag{5.5.6}$$

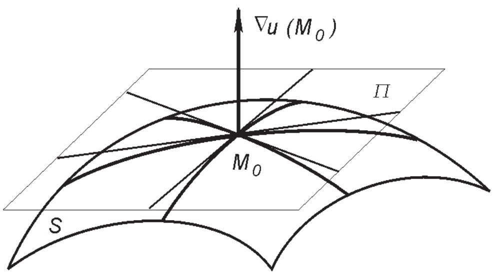


Рис. 20

Вектор ∇u направлений по нормалі до поверхні рівня функції u. Рівняння нормалі, проведеної в точці M_0 до поверхні S, заданої рівнянням $u(x, y, z) = \text{const}$, мають вигляд

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial z}}. \tag{5.5.7}$$

5.6. Неявні функції

Означення 32. *Кажуть, що функція y задана н е я в н о, якщо її задають у вигляді рівняння*

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{5.6.8}$$

Н е я в н о ю ф у н к ц і є ю $y = y(x)$ називають розв'язок рівняння (5.6.8), *тобто таку функцію $y = y(x)$, яка перетворює рівняння* (5.6.8) *на тотожність*

$$\varphi(x, y(x)) \equiv 0.$$

Наведемо умови існування неявної функції.

Теорема 26. *Якщо функція $\varphi(x, y)$ неперервна разом зі своїми частинними похідними в околі точки (x_0, y_0), є строго монотонною за змінною y і $\varphi(x_0, y_0) = 0$, то в околі точки (x_0, y_0) існує єдина функція $y(x)$ така, що $\varphi(x, y(x)) = 0$ для всіх x з околу точки*

(x_0, y_0), *причому функція* $y(x)$ *неперервна і* $y(x_0) = y_0$ *і має в точці* x_0 *неперервну похідну*

$$\frac{dy(x_0)}{dx} = -\frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}. \qquad (5.6.9)$$

Поняття неявної функції можна узагальнити для більшого числа змінних і для більшого числа рівнянь. Так, рівняння $F(x, y, z) = 0$ за умов, що є узагальненням умов теореми 26, визначає неявну функцію двох змінних, наприклад, функцію $z = f(x, y)$; система рівнянь $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ визначає дві функції однієї змінної, наприклад, функції $y = f(x)$ і $z = g(x)$ тощо [2].

5.7. Похідні та диференціали вищих порядків

Аналогічно тому, як це робилося для функції однієї змінної, вводяться поняття похідних вищих порядків. Наприклад, друга похідна за змінною x — це перша похідна від першої похідної за цією змінною:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Для функції двох змінних маємо чотири похідних другого порядку: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Останні дві з них називають мішаними похідними. Вони відрізняються порядком, у якому проводиться диференціювання:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Теорема 27. *Якщо* $\dfrac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x \partial y}$ *і* $\dfrac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y \partial x}$ *— неперервні функції, то*

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

Поняття диференціала n-го порядку вводиться як і для функції однієї змінної:

$$d^n z = d(d^{n-1} z).$$

Застосовуючи формулу (5.2.4) до dz, отримаємо

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\, dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(dy)^2$$

або у символічному вигляді

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^2 z.$$

Аналогічний запис маємо і для диференціала порядку n:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^n z.$$

[2] Докладніше див. [**?**], с. 186–188

5.8. Формула Тейлора

Для функції кількох змінних за умови існування неперервних похідних усіх порядків до порядку $n+1$ включно справджується формула

$$f(M) = f(M_0) + \frac{d\,f(M_0)}{1!} + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + \frac{d^3 f(M_0)}{3!} + \dots + \frac{d^n f(M_0)}{n!} + r_n(M).$$

5.9. Екстремум

Означення 33. *Точку M_0 називають точкою екстремуму функції $f(M)$, якщо існує такий окіл $S_\delta(M_0)$ точки M_0, що для всіх $M \in S_\delta(M_0)$ виконується нерівність $f(M) < f(M_0)$ або $f(M) > f(M_0)$. У першому випадку точку M_0 називають точкою максимуму, у другому — точкою мінімуму.*

Необхідні умови екстремуму:

Твердження 5.9. 1. Якщо M_0 — точка екстремуму функції $f(M)$, то в точці M_0 частинні похідні функції $f(M)$ дорівнюють нулю або не існують.

Достатні умови екстремуму:

Наведемо достатні умови екстремуму для функцій двох змінних за умови, що функції мають неперервні другі похідні. Позначимо

$$\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} = A, \quad \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y} = B, \quad \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} = C.$$

Твердження 5.9. 2. Якщо в точці (x_0, y_0) частинні похідні першого порядку функції $f(x,y)$ дорівнюють нулю, а похідні другого порядку задовольняють умову

$$AC - B^2 > 0,$$

то (x_0, y_0) є точкою екстремуму функції f. При цьому, якщо $A > 0$ $(C > 0)$, то (x_0, y_0) — точка мінімуму, якщо $A < 0$ $(C < 0)$, то (x_0, y_0) — точка максимуму.

Якщо $AC - B^2 < 0$, то в точці (x_0, y_0) функція f екстремуму не має.

Приклад 1. Дослідити функцію на екстремум:

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$$

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні функції:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x + y - 2, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x + 2y - 1. \end{aligned}$$

Прирівнюємо їх до нуля:

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -3y = 0 \end{cases}$$

Розв'язком системи є $x = 1$, $y = 0$. Ця точка є підозрілою на екстремум. Перевіряємо достатні умови. Знаходимо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 = A, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 = B, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 = C.$$

Оскільки $AC - B^2 > 0$ і $A > 0$ $(C > 0)$, маємо висновок: точка $(1;0)$ є точкою мінімуму функції z.

Відповідь: $z_{min} = -1$ при $x = 1$, $y = 0$.

Д о с т а т н і у м о в и е к с т р е м у м у (загальний випадок):

Нехай функція $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ визначена, неперервна і має неперервні похідні першого і другого порядків в околі деякої с т а ц і о н а р н о ї точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots . x_n^0)$. Тоді у досить малому околі точки M_0 знак приросту функції $\Delta f = f(M) - f(M_0)$ визначається знаком її диференціала другого порядку:

$$\mathrm{sign}\Delta f = \mathrm{sign}\, d^2 f(M_0).$$

Диференціал $d^2 f(M_0)$ являє собою квадратичну форму n змінних $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$

$$d^2 f(M_0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot dx_i \cdot dx_j,$$

де $a_{ij} = f''_{x_i x_j}(M_0)$, $dx_i = x_i - x_i^0$.

Посилаючись на відомий критерій Сільвестра знаковизначеності квадратичної форми[3] отримуємо достатні умови екстремуму функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

Твердження 5.9. 3. Нехай точка M_0 є стаціонарною точкою функції $f(M)$, $\dfrac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_j} = a_{ij}$,

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тоді,

1. якщо головні мінори матриці других похідних функції $f(M)$ додатні $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$, то M_0 — точка мінімуму функції $f(M)$;

2. якщо знаки головних мінорів чергуються, починаючи зі знака мінус $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots$, то M_0 — точка максимуму;

3. якщо чергування знаків головних мінорів порушується, то функція в точці M_0 екстремуму не має;

4. якщо деякі із головних мінорів дорівнюють нулеві, а чергування знаків при цьому не порушується, то обчислюють усі діагональні мінори матриці і досліджують чергування їх знаків.

П р и к л а д 2. Знайти екстремум функції $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо стаціонарні точки функції, для цього знаходимо частинні похідні функції і прирівнюємо їх до нуля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x - y + 1, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 2y - x, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= 2z - 2. \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 & = 0 \\ 2y - x & = 0 \\ 2z - 2 & = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= -\tfrac{2}{3}, \\ y &= -\tfrac{1}{3}, \\ z &= 1. \end{aligned}$$

Перевіряємо виконання достатніх умов екстремуму в знайденій стаціонарній точці. Знаходимо

[3] Див., наприклад, [?], с. 330, [?], с. 277

другі частинні похідні і обчислюємо їх у стаціонарній точці:

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}=-1, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}=0, \\ & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}=0, \\ & & \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2, \end{array} \quad \Rightarrow \quad A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Обчислюємо головні мінори матриці других похідних:

$$\Delta_1=2, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3, \quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=6.$$

Оскільки усі головні мінори матриці других похідних додатні, то точка $\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};1\right)$ для функції u є точкою мінімуму, $u_{min}=-\frac{4}{3}$.

5.10. Умовний екстремум

Означення 34. *Задачею на умовний екстремум для функції двох змінних функції*

$$f(x,y) \tag{5.10.10}$$

називають задачу відшукання її максимумів і мінімумів за умови, що деяка інша функція набуває заданого значення:

$$\varphi(x,y)=0. \tag{5.10.11}$$

Якщо рівність (5.10.11) визначає функцію $y=y(x)$, то функція $z=f(x,y)$ являє собою функцію однієї змінної x:

$$z(x)=f(x,y(x)).$$

Припустивши існування похідних, знаходимо стаціонарні точки функції $z(x)$:

$$\frac{dz}{dx}=f_x+f_y\cdot\frac{dy}{dx}=0.$$

Враховуючи, що $\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$, для визначення точок, підозрілих на умовний екстремум, маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx}=f_x-f_y\cdot\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases} \tag{5.10.12}$$

Розв'язавши систему (5.10.12), знайдемо координати стаціонарних точок функції $z(x)$. З'ясувати типу екстремуму можна, обчисливши значення $\frac{d^2 z}{dx^2}$ у цих точках.

Приклад 1. Знайти екстремуми функції $z=x+y$ за умови, що

$$x^2+y^2-1=0.$$

Р о з в ' я з а н н я. Знаходимо повну похідну

$$\frac{dz}{dx} = 1 + 1 \cdot \left(-\frac{2x}{2y}\right).$$

Прирівняємо її до нуля і врахуємо зв'язок між змінними x та y:

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{x}{y} = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Ця система має два розв'язки: $x_1 = y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ і $x_2 = y_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Знаходимо другу похідну $\dfrac{d^2z}{dx^2}$:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(1 - \frac{x}{y}\right) = -\frac{y - x\dfrac{dy}{dx}}{y^2} = -\frac{y + x\dfrac{x}{y}}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}.$$

Як бачимо, функція $z = x + y$ за умови $x^2 + y^2$ в точці (x_1, y_1) досягає максимуму, а в точці (x_2, y_2) — мінімуму.

Розглянутий приклад має наочний геометричний зміст: лінії рівня функції $z = x + y$ — це прямі, паралельні бісектрисі другого та четвертого координатних кутів, крива $x^2 + y^2 = 1$ — коло одиничного радіуса із центром на початку координат (рис. 21).

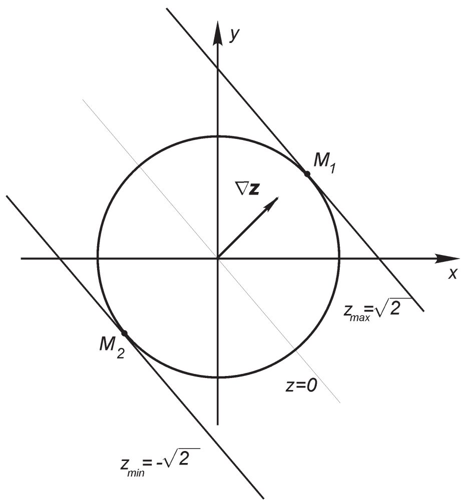


Рис. 21

У напрямку вектора $\nabla z = \{1; 1\}$ функція z зростає і досягає на кривій $x^2 + y^2 = 1$ найбільшого значення в точці M_1. Неважко бачити, що в точці M_1 вектори $\nabla z(M_1) = \{1;\ 1\}$ і $\nabla \varphi(x, y) = \{2x_1, 2y_1\}$ є колінеарними, тобто поверхня рівня функції $z(x, y) = z(x_1, y_1)$ є дотичною до кола $x^2 + y^2 = 1$. Аналогічно можна показати, що точка M_2 є точкою умовного мінімуму.

Розглянутий метод розв'язання задачі на умовний екстремум називають методом неявних функцій.

Розглянемо ще один метод побудови розв'язку задачі на умовний екстремум. Повернемося до системи (5.10.12). Ми припустили існування в точці умовного екстремуму похідної $\dfrac{dy}{dx}$, а це передбачає, що функція $\varphi_y(x, y) \neq 0$.

Оскільки за припущенням $\varphi_y \neq 0$, то перше рівняння системи (5.10.12) можна перетворити до вигляду

$$f_x\varphi_y - f_y\varphi_x = 0.$$

Ліву частину останньої рівності можна розглядати як визначник

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{vmatrix} = 0.$$

Рядки (стовпці) визначника, рівного нулю, є лінійно залежними, тобто існує число λ таке, що в точці M_0 умовного екстремуму справджується рівність:

$$\nabla f(M_0) + \lambda \nabla \varphi(M_0) = \mathbf{0},$$

де символ **0** позначає нульовий вектор. Ця рівність у координатній формі набуває вигляду

$$\begin{aligned} f_x + \lambda\varphi_x = 0, \\ f_y + \lambda\varphi_y = 0. \end{aligned} \tag{5.10.13}$$

Приєднаємо до отриманої системи рівняння-обмеження

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{5.10.14}$$

Таким чином, для визначення точки умовного екстремуму ми отримали систему трьох рівнянь (5.10.13)–(5.10.14) із трьома невідомими x, y і λ.

Побудуємо функцію

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y). \tag{5.10.15}$$

Функцію F називають ф у н к ц і є ю Л а г р а н ж а.

Очевидно, що за обмежень $\varphi(x, y) = 0$ функції F і f мають рівні значення:

$$F(x, y, \lambda)\Big|_{\varphi(x,y)=0} = f(x, y) + \lambda \cdot 0 = f(x, y).$$

Розглянемо задачу на безумовний екстремум функції F змінних x, y і λ. Знаходимо необхідні умови екстремуму:

$$\begin{aligned} F_x &= f_x + \lambda\varphi_x = 0, \\ F_y &= f_y + \lambda\varphi_y = 0, \\ F_\lambda &= \varphi(x, y) = 0. \end{aligned} \tag{5.10.16}$$

Звертаємо увагу на те, що рівняння (5.10.13)–(5.10.14) і (5.10.16) — одні й ті самі. Враховуючи рівність (5.10.15), дійдемо висновку, що *задачу на умовний екстремум функції f за обмежень $\varphi(x, y) = 0$ можна замінити задачею на безумовний екстремум функції Лагранжа F* (5.10.15) — задачі мають один і той самий розв'язок.

Достатні умови екстремуму функції Лагранжа отримують, досліджуючи другий диференціал d^2F як функції змінних x і y (тобто при цьому вважається, що λ є сталою величиною і дорівнює значенню, отриманому при розв'язанні системи (5.10.16)):

$$d^2F = F_{xx}(M_0)(dx)^2 + 2F_{xy}(M_0)dxdy + F_{yy}(M_0)(dy)^2,$$

де M_0 — точка підозріла на екстремум, а величини dx і dy пов'язані співвідношенням

$$dy = -\frac{\varphi_x(M_0)}{\varphi_y(M_0)}\, dx.$$

З а у в а ж е н н я. Досить часто характер екстремуму є очевидним і випливає з постановки задачі. У цьому разі необхідність у дослідженні достатніх умов відпадає. Може статися також, що диференціал d^2F як функція змінних dx і dy є знакосталою. У цьому випадку відпадає потреба у врахуванні зв'язку між dx і dy.

Описаний метод розв'язування задачі на умовний екстремум називають *методом невизначених множників Лагранжа*.

Приклад 2. Застосовуючи метод невизначених множників Лагранжа знайти екстремуми функції $z = x + y$ за умови $x^2 + y^2 = 1$.
Розв'язання. Будуємо функцію Лагранжа, при цьому обмеження перетворюємо до вигляду $\varphi(x, y) = 0$:

$$F = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Знаходимо стаціонарні точки функції F:

$$\begin{aligned} F_x &= 1 + 2\lambda x = 0, \\ F_y &= 1 + 2\lambda y = 0, \\ F_\lambda &= x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Із перших двох рівнянь виражаємо x і y через λ і підставляємо їх до третього рівняння:

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \quad y = -\frac{1}{2\lambda}, \quad \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, ми отримали дві стаціонарні точки

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Досліджуємо достатні умови екстремуму. Знаходимо диференціал другого порядку функції Лагранжа як функції змінних x і y:

$$F_{xx} = 2\lambda, \quad F_{xy} = 0, \quad F_{yy} = 2\lambda,$$

$$d^2F = 2\lambda\left[(dx)^2 + (dy)^2\right].$$

Як бачимо, при $\lambda = \lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ виконується нерівність $d^2F < 0$, тобто точка (x_1, y_1) є точкою максимуму, при $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ справджується нерівність $d^2F > 0$, тобто точка (x_2, y_2) є точкою мінімуму функції Лагранжа F, а, значить, ці точки є відповідно точками максимуму і мінімуму функції $z = x + y$ за умови $x^2 + y^2 = 1$.

5.11. Розв'язання задач засобами Maple

5.11.1. Частинні похідні

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції $z = x^3 + y^3 - 3axy$.
Розв'язання.

```
> restart;
> z:=x^3+y^3-3*a*x*y;
```

$$z := -3axy + x^3 + y^3$$

```
> Diff(z,x)=diff(z,x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}(-3axy + x^3 + y^3, x) = -3ay + 3x^2$$

```
> Diff(z,y)=diff(z,y);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}(-3axy + x^3 + y^3, y) = -3ax + 3y^2$$

П р и к л а д 2. Знайти частинні похідні функції $u = (x + 2y)^z$.
Р о з в ' я з а н н я.

```
> restart:
> u:=(x+2y)^z;
```

$$u := (x + 2y)^z$$

```
> Diff(u,x)=diff(u,x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x}((x + 2y)^z) = \frac{(x + 2y)^z z}{x + 2y}$$

```
> Diff(u,y)=diff(u,y);
```

$$\frac{\partial}{\partial y}((x + 2y)^z) = 2\frac{(x + 2y)^z z}{x + 2y}$$

П р и к л а д 3. Через точку $M(1;2;6)$ поверхні $z = 2x^2 + y^2$ проведені площини, паралельні координатним площинам xOz та yOz. Визначити, які кути утворюють з осями координат дотичні, проведені до отриманих перерізів в їх спільній точці M.
Р о з в ' я з а н н я. Пошлемося на геометричний зміст частинних похідних (див. с. 58). Побудуємо лінії перетину поверхні $z = 2x^2 + y^2$ і площин $x = 1$ та $y = 2$:

```
> restart;
> z:=(x,y)->2*x^2+y^2;
```

$$z := (x, y) \mapsto 2x^2 + y^2$$

```
> `z(1,y)`:=z(1,y);
```

$$`z(1, y)` := y^2 + 2$$

```
> `z(x,2)`:=z(x,2);
```

$$`z(x, 2)` := 2x^2 + 4$$

Знайдемо та обчислимо частинні похідні функції z в точці M:

```
> z_x:=diff(z(x,y),x);subs({x=1,y=2},z_x);
```

$$z\_x := 4x$$

$$4$$

```
> z_y:=diff(z(x,y),y);subs({x=1,y=2},z_y);
```

$$z\_y := 2y$$

$$4$$

Рівняння дотичних, проведених в точці M до кривих $z(1, y)$ та $z(x, 2)$ мають відповідно вигляд $z - 6 = 4(y - 2)$ і $z - 6 = 4(x - 1)$.

Будуємо лінії перетину і дотичні:

```
> plot([z(1,y),6+4*(y-2)],y=-2..3,z=-3..10,labels=[y,z],title ="Дотична
  до перетину поверхні z площиною x=1");
> plot([z(x,2),6+4*(x-1)],x=-1..1.5,y=-0.5..7,labels=[x,z],title ="Дотична
  до перетину поверхні z площиною y=2");
```

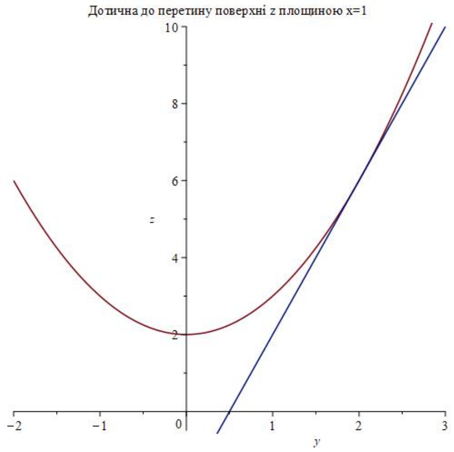


Рис. 22 $\quad \mathrm{tg}\alpha = \infty$, $\mathrm{tg}\beta = 4$, $\mathrm{tg}\gamma = \frac{1}{4}$

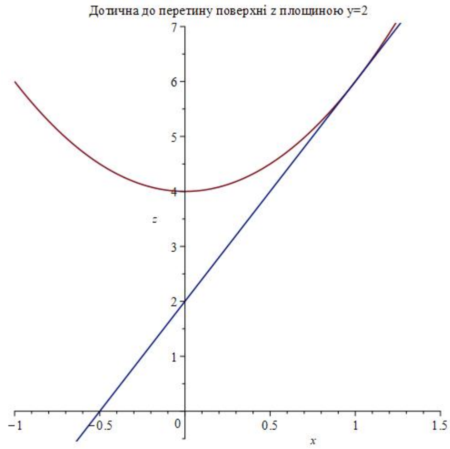


Рис. 23 $\quad \mathrm{tg}\alpha = 4$, $\mathrm{tg}\beta = \infty$, $\mathrm{tg}\gamma = \frac{1}{4}$

5.11.2. Повний диференціал

Приклад 4. Для функції $z = x^2+3xy+y^2$ обчислити повний приріст і повний диференціал.
Розв'язання.
Задаємо функцію z:

```
> z:=(x,y)->x^2+3*x*y+y^2;
```

$$z := (x, y) \mapsto x^2 + 3 \cdot y \cdot x + y^2$$

Знаходимо Δz повний приріст функції:

```
> expand(z(x+dx,y+dy)-z(x,y));
```

$$dx^2 + 3 \cdot dx \cdot dy + 2dx \cdot x + 3dx \cdot y + dy^2 + 3dy \cdot x + 2dy \cdot y$$

Знаходимо dz повний диференціал функції:

```
> dz:=diff(z(x,y),x)*dx+diff(z(x,y),y)*dy;
```

$$dz := (2x + 3y)dx + (3x + 2y)dy$$

Знаходимо різницю $\Delta z - dz$ повного приросту і повного диференціала функції:

```
> expand(%%-%);
```

$$dx^2 + 3dx \cdot dy + dy^2$$

Як бачимо, різниця $\Delta z - dz$ є нескінченно малою вищого порядку у порівнянні з нескінченно малою $\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

5.11.3. Похідні складених функцій

Приклад 5. Два пароплави, що вийшли одночасно із пункту A, рухаються один на північ, а інший на північний схід. Швидкості руху пароплавів: 20 *км/год* і 40 *км/год*. З якою швидкістю зростає відстань між ними?
Розв'язання. Позначимо через a та b відстані пароплавів від пункту A. Відстань s між пароплавами знайдемо за теоремою косинусів:

$$s = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{4}}.$$

Відстані a і b за умовою задачі є функціями часу. Нехай, наприклад, $a = 20t$, тоді $b = 40t$. Швидкість зміни відстані s знайдемо як повну похідну складеної функції.

```
> restart;
> s:=sqrt(a^2+b^2-2*a*b*cos(Pi/4));
```

$$s := \sqrt{a^2 + b^2 - ab\sqrt{2}}$$

```
> s_a:=diff(s,a): s_b:=diff(s,b):
> a:=20*t:b:=40*t:
> s_t:=s_a*diff(a,t)+s_b*diff(b,t):
> assume(t>0);s_t:=simplify(s_t);
```

$$s_t := 20\sqrt{-2\sqrt{2} + 5}$$

5.11.4. Похідна у заданому напрямі. Градієнт

Приклад 6. Знайти похідну функції $u = xy + yz + zx$ в точці $M(1; 2; 3)$ у напрямі, що йде від цієї точки до точки $N(5; 5; 15)$.
Розв'язання. Для розв'язання цієї задачі скористаємося функціями `Gradient` і `DotProduct` з пакету `VectorCalculus`:

```
> restart;
> with(VectorCalculus):
```

Для зручності координати точок M і N подамо як координати векторів OM і ON, де O — початок координат:

```
> OM:=<2,1,3>;ON:=<5,5,15>;
```

$$OM := (2)e_x + (1)e_y + (3)e_z$$

$$ON := (5)e_x + (5)e_y + (15)e_z$$

Обчислюємо координати вектора MN:

```
> MN:=ON-OM;
```

$$MN := (3)e_x + (4)e_y + (12)e_z$$

Нормуємо вектор MN:

```
> l:=MN/sqrt(DotProduct(MN,MN));
```

$$l := \left(\frac{3}{13}\right) e_x + \left(\frac{4}{13}\right) e_y + \left(\frac{12}{13}\right) e_z$$

Задаємо функцію u:

```
> u:=x*y+y*z+x*z;
```

$$u := xy + xz + yz$$

Знаходимо її градієнт і обчислюємо його в точці M:

```
> Gr:=Gradient(u,[x,y,z]);GrM:=subs({x=2,y=1,z=3},Gr);
```

$$Gr := (y + z)\bar{e}_x + (x + z)\bar{e}_y + (x + y)\bar{e}_z$$

$$GrM := (4)\bar{e}_x + (5)\bar{e}_y + (3)\bar{e}_z$$

Обчислюємо $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ в точці M як скалярний добуток $(\mathrm{grad}\, u(M), \boldsymbol{l})$:

```
> PohidnaU_MN:=DotProduct(GrM,l);
```

$$PohidnaU\_MN := \frac{68}{13}$$

Приклад 7. Знайти величину найбільшого підйому поверхні

$$z = x^2 + 4y^2$$

в точці $(2; 1; 8)$.

Розв'язання. Похідна функції у заданому напрямі характеризує швидкість зростання функції у цьому напрямі. Найбільшого значення швидкість зростання набуває у напрямі градієнта функції, і це найбільше значення дорівнює величині градієнта функції (див. (5.4.5)).

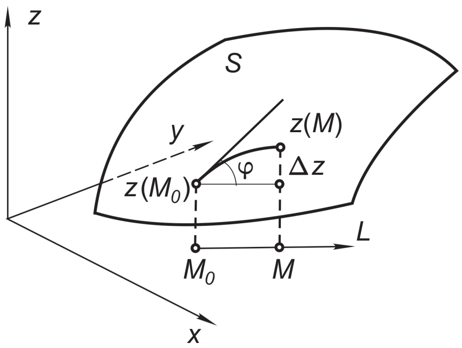


Рис. 24

Розглянемо геометричний зміст похідної у заданому напрямі функції двох змінних. Графіком функції $z = z(x, y)$ є деяка поверхня S (рис. 24). Промінь L, що виходить з точки M_0, лежить в площині xOy. Коли точка M рухається вздовж променя L до точки M_0, точка $z(M)$ на поверхні S опише деяку криву. Геометричний зміст похідної у заданому напрямі:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial l} = \mathrm{tg}\varphi,$$

де φ — кут між дотичною до згаданої кривої в точці M_0 і горизонтальною прямою L.

Виходячи з усього сказаного, знаходимо, що величина найбільшого підйому поверхні $z(x, y)$ в точці $(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$ дорівнює

$$\mathrm{tg}\,\varphi = |\mathrm{grad}\, z(x_0, y_0)|.$$

Проведемо необхідні обчислення:

```
> restart;
> with(VectorCalculus):
```

Задаємо функцію z:

```
> z:=x^2+4*y^2:
```

Задаємо координати точки:

```
> x_0:=2: y_0:=1:
```

Знаходимо градієнт функції z:

```
> grM:=Gradient(z,[x,y]);
```

$$grM := (2x)\bar{e}_x + (8y)\bar{e}_y$$

Обчислюємо величину градієнта, тобто обчислюємо $\mathrm{tg}\varphi$ в заданій точці:

```
> `|grM_0|`:=evalf(norm(grM_0,2));
```

$$|grM_0| := 8.944271908$$

Знаходимо кут φ (в радіанах):

```
> evalf(arctan(`|grM_0|`));
```

$$1.459455312$$

Переводимо кут φ в градуси;

```
> convert(1.459455312,degrees);
```

$$83.62062976 * degrees$$

Переводимо дробову частину градуса в мінути:

```
> 60*0.621;
```

$$37.260$$

Відповідь: $\mathrm{tg}\varphi = 8.944271908$, $\varphi \approx 83°37'$.

5.11.5. Похідні та диференціали вищих порядків

Приклад 8. Знайти всі частинні похідні другого порядку функції

$$u = xy + yz + zx.$$

Розв'язання.

```
> restart;
> u:=x*y+y*z+z*x;
```

$$u := xy + xz + yz$$

```
> u_x:=diff(u,x);u_y:=diff(u,y);u_z:=diff(u,z);
```

$$u\_x := y + z$$

$$u\_y := x + z$$

$$u\_z := x + y$$

```
> u_xx:=diff(u_x,x);u_xy:=diff(u_x,y);u_xz:=diff(u_x,z);
```

$$u\_xx := 0$$

$$u\_xy := 1$$

$$u\_xz := 1$$

```
> u_yx:=diff(u_y,x);u_yy:=diff(u_y,y);u_yz:=diff(u_y,z);
```

$$u\_yx := 1$$

$$u\_yy := 0$$

$$u\_yz := 1$$

```
> u_zx:=diff(u_z,x);u_zy:=diff(u_x,z);u_zz:=diff(u_z,z);
```

$$u\_zx := 1$$

$$u\_zy := 1$$

$$u\_zz := 0$$

Приклад 9. Знайти $d^2 f(0,0,0)$ якщо

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz.$$

Розв'язання.

```
> f:=(x,y,z)->x^2+2*y^2+3*z^2-2*x*y+4*x*z+2*y*z;
```

$$f := (x,y,z) \mapsto x^2 + 2 \cdot y^2 + 3 \cdot z^2 - 2 \cdot y \cdot x + 4 \cdot x \cdot z + 2 \cdot y \cdot z$$

```
> f_xx:=diff(f(x,y,z),x$2);f_xy:=diff(diff(f(x,y,z),x),y);
  f_xz:=diff(diff(f(x,y,z),x),z);
```

$$f\_xx := 2$$

$$f\_xy := -2$$

$$f\_xz := 4$$

```
> f_yy:=diff(f(x,y,z),y$2);f_yz:=diff(diff(f(x,y,z),y),z);
```

$$f\_yy := 4$$

$$f\_yz := 2$$

```
> f_zz:=diff(f(x,y,z),z$2);
```

$$f\_zz := 6$$

```
> d2f:=f_xx*(dx)^2+f_yy*(dy)^2+f_zz*(dz)^2+2*f_xy*dx*dy+2*f_xz*dx*dz+2*f_yz*dy*dz;
```

$$d2f := 2 \cdot dx^2 - 4 \cdot dx \cdot dy + 8 \cdot dx \cdot dz + 4 \cdot dy^2 + 4 \cdot dy \cdot dz + 6 \cdot dz^2$$

Відповідь: $d^2f(0,0,0) = 2dx^2 + 4dy^2 + 6dz^2 - 4dxdy + 8dxdz + 4dydz$.

5.11.6. Неявні функції

П р и к л а д 10. Нехай y є функцією x, яка визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Знайти $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^3y}{dx^3}$.

Р о з в ' я з а н н я.

```
> restart;
> f:=x^2/a^2+y^2/b^2-1;
```

$$f := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

```
> y_x:=-diff(f,x)/diff(f,y);
```

$$y\_x := -\frac{xb^2}{a^2y}$$

```
> y_xx:=diff(y_x,x)+diff(y_x,y)*y_x;y_xx:=simplify(y_xx);
```

$$y\_xx := -\frac{b^2}{a^2y} - \frac{x^2b^4}{a^4y^3}$$

$$y\_xx := -\frac{b^2(a^2y^2 + b^2x^2)}{a^4y^3}$$

Неважко бачити,що

$$(a^2y^2 + b^2x^2) = \frac{(a^2y^2 + b^2x^2)}{a^2b^2} \cdot (a^2b^2) = \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2}\right) a^2b^2 = a^2b^2.$$

```
> y_xx:=subs(a^2*y^2+b^2*x^2=a^2*b^2,y_xx);
```

$$y\_xx := -\frac{b^4}{a^2y^3}$$

```
> y_xxx:=diff(y_xx,x)+diff(y_xx,y)*y_x;
```

$$y\_xxx := -\frac{3b^6x}{a^4y^5}$$

Відповідь: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2x}{a^2y}, \qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{b^4}{a^2y^3}, \qquad \dfrac{d^3y}{dx^3} = -\dfrac{3b^6x}{a^4y^5}.$

П р и к л а д 11. Функція z змінних x та y задана рівнянням

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Р о з в ' я з а н н я. Якщо рівняння $F(x, y, z) = 0$, де $F(x, y, z)$ — диференційовна функція змінних x, y і z, визначає z як функцію незалежних змінних x та y і $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то частинні похідні цієї неявно заданої функції можна знайти за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}.$$

```
> restart;
> F:=x^3+2*y^3+z^3-3*x*y*z-2*y+3;
```

$$F := x^3 - 3xyz + 2y^3 + z^3 - 2y + 3$$

```
> z_x:=-diff(F,x)/diff(F,z);z_x:=simplify(z_x);
```

$$z\_x := -\frac{3x^2 - 3yz}{-3xy + 3z^2}$$

$$z\_x := \frac{x^2 - yz}{xy - z^2}$$

```
> z_y:=-diff(F,y)/diff(F,z);z_y:=simplify(z_y);
```

$$z\_y := -\frac{-3xz + 6y^2 - 2}{-3xy + 3z^2}$$

$$z\_y := \frac{-3xz + 6y^2 - 2}{3xy - 3z^2}$$

Відповідь: $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x^2 - yz}{xy - z^2}, \qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{6y^2 - 3xz - 2}{3(xy - z^2)}.$

5.11.7. Дотична площина і нормаль до поверхні

П р и к л а д 12. Написати рівняння дотичної площини і рівняння нормалі до параболоїда обертання $z = x^2 + y^2$ в точці $(1; -2; 5)$.

Р о з в ' я з а н н я. Рівняння дотичної площини і рівняння нормалі знаходимо за формулами (5.5.6) і (5.5.7).

```
> restart;
> with(VectorCalculus):
> u:=x^2+y^2-z;
```

$$u := x^2 + y^2 - z$$

```
> Grad_u:=Gradient(u,[x,y,z]);
```

$$Grad\_u := (2x)\bar{e}_x + (2y)\bar{e}_y + (-1)\bar{e}_z$$

```
> Grad_u_M0:=subs({x=1,y=-2,z=5},Grad_u);
```

$$Grad\_u\_M0 := (2)\bar{e}_x + (-4)\bar{e}_y + (-1)\bar{e}_z$$

```
> DotProduct(Grad_u_M0,<x-1,y+2,z-5>)=0;
```

$$2x - 5 - 4y - z = 0$$

Відповідь: дотична площина $2x - 4y - z - 5 = 0$, нормаль до поверхні $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-4} = \dfrac{z-5}{-1}$.

П р и к л а д 13. До поверхні $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ провести дотичні площини, паралельні площині $x + 4y + 6z = 0$.
Р о з в ' я з а н н я. Введемо до розгляду функцію $u = x^2+2y^2+3z^2$. Тоді задана поверхня — це поверхня рівня $u = 21$. Дотична площина, проведена до гладкої поверхні в її точці M_0 має нормаль, колінеарну вектору $\operatorname{grad} u(M_0)$. Знайдемо градієнт функції u, визначимо точки на поверхні, в яких $\operatorname{grad} u(M_0)||\boldsymbol{N} = (1; 4; 6)$, і складемо рівняння дотичних площин $1 \cdot (x - x_0) + + 4 \cdot (y - y_0) + 6 \cdot (z - z_0) = 0$.

```
> restart;
> with(VectorCalculus):
> u:=x^2+2*y^2+3*z^2;
```

$$u := x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

```
> Gr:=Gradient(u,[x,y,z]);
```

$$Gr := (2x)\bar{e}_x + (4y)\bar{e}_y + (6z)\bar{e}_z$$

```
> ON:=<1,4,6>;;
```

$$ON := (1)\bar{e}_x + (4)\bar{e}_y + (6)\bar{e}_z$$

Запишемо умову паралельності векторів $\operatorname{grad} u(M)$ і ON:

```
> eq1:=Gr[1]/ON[1]=t: eq2:=Gr[2]/ON[2]=t: eq3:=Gr[3]/ON[3]=t:
> M:=solve({eq1,eq2,eq3},{x,y,z});
```

$$M := \left\{x = \frac{t}{2}, y = t, z = t\right\}$$

```
> subs(M,u=21);
```

$$\frac{21t^2}{4} = 21$$

```
> solve(%,t);;
```

$$2,\ -2$$

```
> M1:=subs(t=2,M);
```

$$M1 := \{x = 1, y = 2, z = 2\}$$

```
> P:=<x,y,z>:P1:=<1,2,2>:
> DotProduct(P-P1,ON)=0;
```

$$x - 21 + 4y + 6z = 0$$

```
> P2:=-P1:DotProduct(P-P2,ON)=0;
```

$$x + 21 + 4y + 6z = 0$$

Відповідь: $x + 4y + 6z = \pm 21$.

5.11.8. Формула Тейлора

П р и к л а д 14. Функцію $f(x,y) = -x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4$ розкласти за формулою Тейлора в околі точки $(-2;1)$.

Р о з в ' я з а н н я.

```
> restart;
```

Задаємо функцію f:

```
> f:=-x^2+2*x*y+3*y^2-6*x-2*y-4;
```

$$f := -x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4$$

Задаємо точку (x_0, y_0) і визначаємо прирости dx і dy:

```
> x0:=-2: y0:=1:dx:=x-x0:dy:=y-y0:
```

Обчислюємо значення функції f в точці (x_0, y_0):

```
> f0:=subs({x=x0,y=y0},f);
```

$$f0 := 1$$

Знаходимо частинні похідні:

```
> f_x:=diff(f,x);f_y:=diff(f,y);
```

$$f\_x := -2x+2y-6$$

$$f\_y := 2x+6y-2$$

Обчислюємо частинні похідні в точці (x_0, y_0):

```
> f_x0:=subs({x=x0,y=y0},f_x);
```

$$f\_x0 := 0$$

```
> f_y0:=subs({x=x0,y=y0},f_y);
```

$$f\_y0 := 0$$

Знаходимо повний диференціал df:

```
> df:=f_x0*dx+f_y0*dy;
```

$$df := 0$$

Знаходимо частинні похідні другого порядку і обчислюємо їх в точці (x_0, y_0):

```
> f_xx:=diff(f_x,x);f_xy:=diff(f_x,y);f_yy:=diff(f_y,y);
```

$$f\_xx := -2$$

$$f\_xy := 2$$

$$f\_yy := 6$$

```
> f_xx0:=subs({x=x0,y=y0},f_xx);f_xy0:=subs({x=x0,y=y0},f_xy);
  f_yy0:=subs({x=x0,y=y0},f_yy);
```

$$f\_xx0 := -2$$

$$f\_xy0 := 2$$

$$f\_yy0 := 6$$

Знаходимо диференціал другого порядку $d^2f(x_0, y_0)$:

```
> d2f:=f_xx0*dx^2+2*f_xy0*dx*dy+f_yy0*dy^2;
```

$$d2f := -2(x+2)^2+(4x+8)(y-1)+6(y-1)^2$$

Записуємо формулу Тейлора:

```
> fT:=f0+df+1/2!*d2f;
```

$$fT := 1-(x+2)^2+\frac{(4x+8)(y-1)}{2}+3(y-1)^2$$

Переконуємося, що всі дії виконано правильно:

```
> fTr:=expand(fT);
```

$$fTr := -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$$

```
> is(f=fTr);
```

$$true$$

Відповідь: $f(x, y) = 1 - (x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^2$.

П р и к л а д 15. Використовуючи формулу Тейлора до членів 2-го порядку, обчислити наближено $0,95^{2,01}$.

Р о з в ' я з а н н я. Заданий числовий вираз можна розглядати як значення функції $z = x^y$ в точці $x = 0,95$, $y = 2,01$. За умовою задачі необхідно наближено обчислити значення $f(x, y)$ за формулою

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0).$$

```
> restart; > f:=x^y;
```

$$f := x^y$$

```
> f_x:=diff(f,x);f_y:=diff(f,y);
```

$$f\_x := \frac{x^y y}{x}$$

$$f\_y := x^y \ln(x)$$

```
> f_xx:=diff(f_x,x);f_xy:=diff(f_x,y);f_yy:=diff(f_y,y);;
```

$$f\_xx := \frac{x^y y^2}{x^2} - \frac{x^y y}{x^2}$$

$$f\_xy := \frac{x^y \ln(x) y}{x} + \frac{x^y}{x}$$

$$f\_yy := x^y \ln(x)^2$$

```
> x0:=1: y0:=2: x1:=0.95: y1:=2.01: > dx:=x1-x0;dy:=y1-y0;
```

$$dx := -0.05$$

$$dy := 0.01$$

```
> f0:=subs({x=x0,y=y0},f);
```

$$f0 := 1$$

```
> f_x0:=subs({x=x0,y=y0},f_x);
```

$$f\_x0 := 2$$

```
> f_y0:=eval(subs({x=x0,y=y0},f_y));
```

$$f\_y0 := 0$$

```
> f_xx0:=subs({x=x0,y=y0},f_xx);
```

$$f\_xx0 := 2$$

```
> f_xy0:=eval(subs({x=x0,y=y0},f_xy));
```

$$f\_xy0 := 1$$

```
> f_yy0:=eval(subs({x=x0,y=y0},f_yy));
```

$$f\_yy0 := 0$$

```
> f1:=f0+(f_x0*dx+f_y0*dy)+1/2!*(f_xx0*dx^2+2*f_xy0*dx*dy+f_yy0*dy^2);
```

$$f1 := 0.9020000000$$

Відповідь: $0,95^{2,01} \approx 0,902$.

5.11.9. Екстремуми функції кількох змінних

П р и к л а д 16. Знайти екстремуми функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$.
Р о з в ' я з а н н я.

```
> restart;
```

Вводимо функцію: `> z:=x^3+y^3-3*x*y;`

$$z := x^3 + y^3 - 3xy$$

Знаходимо її частинні похідні:

```
> z_x:=diff(z,x);
```

$$z\_x := 3x^2 - 3y$$

```
> z_y:=diff(z,y);
```

$$z\_y := 3y^2 - 3x$$

Прирівнюємо частинні похідні до нуля, знаходимо стаціонарні точки:

```
> Stacpoint:=solve({z_x=0,z_y=0});
```

$$Stacpoint := \{x = 0, y = 0\}, \{x = 1, y = 1\}, \{x = -RootOf(\_Z^2 + \_Z + 1) - 1, y = RootOf(\_Z^2 + \_Z + 1)\}$$

Стаціонарних точок виявилося дві: $(0; 0)$ і $(1; 1)$, Третій комплекснозначний розв'язок системи нас не цікавить.

Знаходимо другі похідні:

```
> z_xx:=diff(z_x,x);z_xy:=diff(z_x,y);z_yy:=diff(z_y,y);;
```

$$z\_xx := 6x$$

$$z\_xy := -3$$

$$z\_yy := 6y$$

Для перевірки достатніх умов екстремуму знаходимо вираз $z''_{xx} \cdot z''_{yy} - {z''_{xy}}^2$:

```
> DostUm:=z_xx*z_yy-z_xy^2;
```

$$DostUm := 36xy - 9$$

Перевіряємо достатні умови в точці $(0; 0)$:

```
> subs({x=0,y=0},DostUm);
```

$$-9$$

Як бачимо, $AC - B^2 = -9 < 0$. Екстремуму в точці $(0; 0)$ немає.

Перевіряємо достатні умови екстремуму в точці $(1; 1)$:

```
> subs({x=1,y=1},DostUm);
```

$$27$$

Оскільки $AC - B^2 = 27 > 0$ і $A > 0$, то в цій точці функція z має мінімум.

Обчислюємо $z(1; 1)$:

```
> subs({x=1,y=1},z);
```

$$-1$$

Відповідь: в точці $(0; 0)$ екстремуму немає, в точці $(1; 1)$ — мінімум, $z_{min} = -1$.

5.11.10. Умовний екстремум

П р и к л а д 17. Знайти умовні екстремуми функції $u = x - 2y + 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
Р о з в ' я з а н н я. Будуємо функцію Лагранжа $F = u + \lambda\varphi$. Обмеження зводимо до вигляду $\varphi(x, y, z) = 0$.

```
> restart;
> F:=u+lambda*(x^2+y^2+z^2-9);
```

$$F := x - 2 + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$$

Знаходимо стаціонарні точки функції F:

```
> F_x:=diff(F,x);
```

$$F\_x := 2\lambda x + 1$$

```
> F_y:=diff(F,y);
```

$$F\_y := 2\lambda y - 2$$

```
> F_z:=diff(F,z);
```

$$F\_z := 2\lambda z + 2$$

```
> F_lambda:=diff(F,\lambda);
```

$$F\_lambda := x^2 + y^2 + z^2 - 9$$

```
> solve({F_x=0,F_y=0,F_z=0,F_lambda=0});
```

$$\left\{\lambda = \frac{1}{2}, x = -1, y = 2, z = -2\right\}, \left\{\lambda = -\frac{1}{2}, x = 1, y = -2, z = 2\right\}$$

Як бачимо, стаціонарних точок виявилося дві. Далі розпоряджаємося змінною λ як константою. Будуємо диференціал другого порядку функції F як функції змінних x, y і z.

```
> F_xx:=diff(F_x,x);F_xy:=diff(F_x,y); F_xz:=diff(F_x,z);;
```

$$F\_xx := 2\lambda$$

$$F\_xy := 0$$

$$F\_xz := 0$$

```
> F_yy:=diff(F_y,y); F_yz:=diff(F_y,z);
```

$$F\_yy := 2\lambda$$

$$F\_yz := 0$$

```
> F_zz:=diff(F_z,z);
```

$$F\_zz := 2\lambda$$

```
> d2F:=F_xx*dx^2+F_yy*dy^2+F_zz*dz^2+2*F_xy*dx*dy+2*F_xz*dx*dz+2*F_yz*dy*dz;
```

$$d2F := 2dx^2\lambda + 2dy^2\lambda + 2dz^2\lambda$$

Виявилося, що в даному прикладі знак диференціала d^2F в стаціонарних точках визначається знаком λ, і потреба в урахуванні зв'язку $d\varphi = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy + \varphi'_z dz = 0$ відпадає.
Знаходимо, що в точці $\lambda = 1/2, x = -1, y = 2, z = -2$ функція має умовний мінімум, а в точці $\lambda = -1/2, x = 1, y = -2, z = 2$ — умовний максимум:

```
> subs({lambda = 1/2, x = -1, y = 2, z = -2},F);
```

$$-9$$

```
> subs({lambda = -1/2, x = 1, y = -2, z = 2},F);
```

$$9$$

Відповідь: $u_{min} = -9$ при $x = -1,\ y = 2,\ z = -2$; $\quad u_{max} = 9$ при $x = 1,\ y = -2,\ z = 2$.

Тема 6

Подвійні інтеграли

6.1. Поняття подвійного інтеграла

Нехай в області $D \subset \mathbb{R}^2$ визначена функція $f(x, y)$. Розіб'ємо область D довільним чином деякими лініями на частини S_k, які назвемо елементарними, так, що

$$\bigcup_{k=1}^{n} S_k = D, \quad S_i \bigcap S_j = \varnothing, \quad i \neq j.$$

Позначимо площу елементарної частини S_k через ΔS_k. У кожній елементарній частині S_k виберемо довільну точку M_k і утворимо суму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta S_k$. Нехай $\lambda = \max\limits_{k} \operatorname{diam} S_k$.

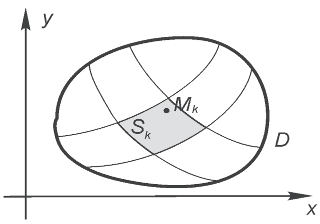


Рис. 25

Означення 35. *Якщо існує границя*

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta S_k,$$

і вона не залежить ні від способу розбивки області D на частини, ні від вибору точок M_i, то її називають подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області D і позначають символом

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy.$$

Подвійний інтеграл існує, якщо функція f є неперервною в D або має в D скінченні розриви вздовж скінченного числа кривих нульової площі[1].

Геометричний зміст подвійного інтеграла.

Подвійний інтеграл по області D від невід'ємної функції $f(x, y)$ дорівнює об'єму тіла, обмеженого знизу площиною xOy, зверху — поверхнею $z = f(x, y)$ і циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz і проходять через межу області D (рис. 26).

[1]Криву називають кривою нульової площі, якщо її можна помістити у багатокутник наскільки завгодно малої площі.

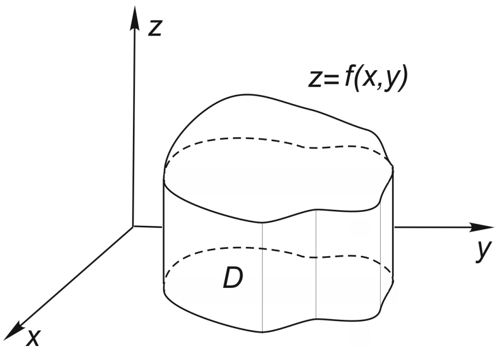


Рис. 26

6.2. Властивості подвійного інтеграла

Із побудови подвійного інтеграла випливають такі основні його властивості:

1°. $\iint\limits_D kf(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)dxdy, \quad k = \text{const}.$

2°. $\iint\limits_D (f(x,y) \pm g(x,y))\,dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$

3°. Якщо $D = D_1 \bigcup D_2$ і області D_1 і D_2 не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Тут припускається, що всі вказані інтеграли існують.

6.3. Обчислення подвійного інтеграла

Нехай проекція області D площини xOy на вісь Ox являє собою відрізок $[a,b]$, тобто область D розташована між прямими $x = a$ та $x = b$ і її межа має з цими прямими спільні точки.

Область D називають *правильною відносно осі* Oy, якщо пряма, паралельна осі Oy, за винятком, можливо, прямих $x = a$ та $x = b$, перетинає межу області D не більш ніж в двох точках (рис. 27).

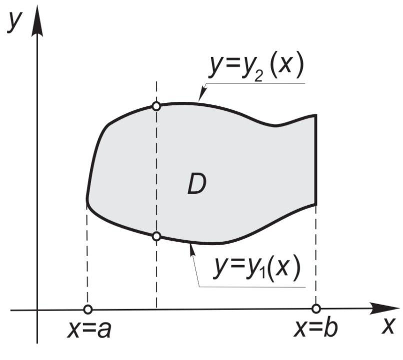


Рис. 27

Нехай правильна відносно осі Oy область D обмежена зверху графіком функції $y = y_2(x)$, знизу — графіком функції $y = y_1(x)$, з боків — прямими $x = a$ і $x = b$ (рис. 27). Тоді

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdxy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \tag{6.3.1}$$

Вираз у правій частині рівності (6.3.1) називають повторним інтегралом. Його обчислюють так: спочатку обчислюють внутрішній інтеграл, розпоряджаючись при цьому змінною x як сталою, потім обчислюють зовнішній інтеграл

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_a^b F(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx.$$

Аналогічно вводиться поняття області, *правильної відносно осі* Ox (рис. 28).

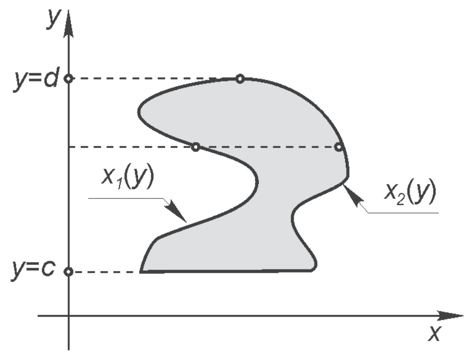


Рис. 28

Для області, правильної відносно осі Ox, маємо:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdxy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \tag{6.3.2}$$

Якщо область не є правильною відносно обох осей, то її розбивають на кілька підобластей, правильних відносно тієї чи іншої осі (рис. 29).

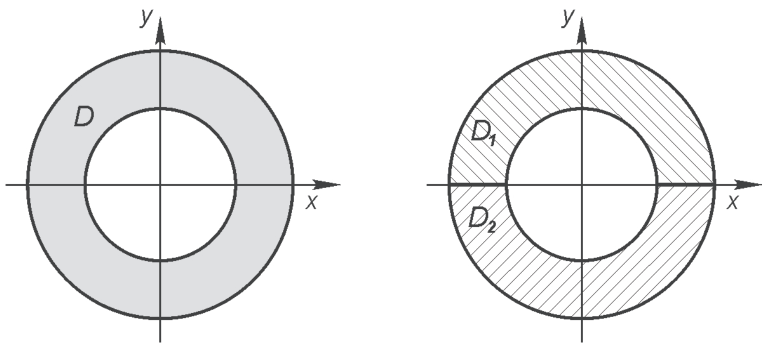


Рис. 29

П р и к л а д 1. Обчислити $\iint\limits_D xy\,dxdy$, де D — область, обмежена лініями $y = x$, $y = 0$, $x = 1$.

Р о з в ' я з а н н я. Область інтегрування зображена на рис. 30.

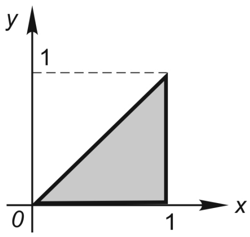


Рис. 30

Як бачимо, область D обмежена зверху лінією $y = x$, знизу — віссю Ox, з правого боку — прямою $x = 1$. Розставляємо межі інтегрування:

$$\iint\limits_D xy\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x xy\,dy.$$

Обчислюємо повторний інтеграл

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x xy\,dy = \int\limits_0^1 x\frac{y^2}{2}\Big|_0^x dx = \int\limits_0^1 \frac{x^3}{2}dx = \frac{x^4}{8}\Big|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

П р и к л а д 2. Обчислити $\iint\limits_D (x + y)\,dxdy$, де D — область, обмежена лініями $y = x$, $x + 3y = 4$ та віссю Ox.

Р о з в ' я з а н н я. У даному прикладі верхня межа області D складається з двох прямих: $y = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ і $y = \dfrac{4-x}{3}$, $1 \leqslant x \leqslant 3$. Нижня межа області — пряма $y = 0$.

Подамо область D у вигляді об'єднання області D_1, обмеженої прямими $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, і області D_2, обмеженої прямими $x + 3y = 4$, $y = 0$ та $x = 1$ (рис. 31).

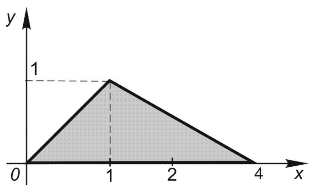


Рис. 31

Оскільки області D_1 і D_2 не перетинаються, то

$$\iint\limits_D (x+y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} (x+y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} (x+y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (x+y)dy +$$

$$+ \int\limits_1^4 dx \int\limits_0^{\frac{4-x}{3}} (x+y)dy = \int\limits_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^x dx + \int\limits_1^4 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{4-x}{3}} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{3x^2}{2}dx + \int\limits_1^4 \left(x\frac{4-x}{3} + \frac{(4-x)^2}{18}\right) dx = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4.$$

З а у в а ж е н н я. Заданий інтеграл можна обчислити в інший спосіб. Змінимо порядок інтегрування. Проекція області D на вісь Oy являє собою відрізок $0 \leqslant y \leqslant 1$. При кожному фіксованому $y \in [0; 1]$ x змінюється в межах від $x = y$ до $x = 4 - 3y$, тобто

$$\iint\limits_D (x+y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{4-3y} (x+y)dx.$$

Провести обчислення отриманого повторного інтеграла і переконатись, що він дорівнює 4, пропонуємо самостійно.

6.4. Подвійний інтеграл у полярних координатах

Нехай область D обмежена променями $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ і кривою $\rho = \rho(\varphi)$ (рис. 32).

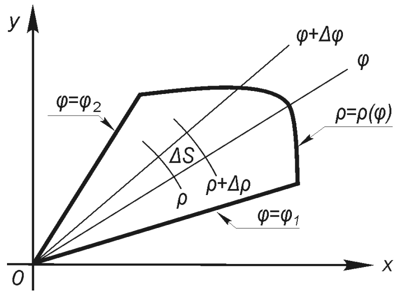


Рис. 32

Розіб'ємо область D на частини променями, що виходять із початку координат, та системою концентричних кіл із центрами на початку координат (на рис. 32показано два промені φ і $\varphi + \Delta\varphi$ та дуги двох кіл із радіусами ρ і $\rho + \Delta\rho$). Площа ΔS отриманої при цьому елементарної частини області дорівнює

$$\Delta S = (\rho + \Delta\rho)^2 \frac{\Delta\varphi}{2} - \rho^2 \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Нехтуючи нескінченно малою величиною $(\Delta\rho)^2 \dfrac{\Delta\varphi}{2}$, знаходимо, що з точністю до нескінченно малих другого порядку

$$\Delta S = \rho\, \Delta\rho\, \Delta\varphi.$$

При переході від декартової до полярної системи координат у подвійному інтегралі треба покласти $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, а вираз $\Delta S = dxdy$ треба замінити виразом $\Delta S = \rho\, d\rho\, d\varphi$:

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_\Delta f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, \rho\, d\rho\, d\varphi. \qquad (6.4.3)$$

У полярній системі координат у повторному інтегралі зовнішнє інтегрування проводять за змінною φ. Для області, що має вигляд, зображений на рис. 32, межі у повторному інтегралі розставляють так:

$$\iint\limits_\Delta f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, \rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, \rho\, d\rho.$$

П р и к л а д 1. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D (x^2 + y^2)\, dxdy$, якщо область D обмежена кривою $x^2 + y^2 = 2x$.

Р о з в ' я з а н н я. Область інтегрування являє собою круг радіуса 1 із центром у точці (1, 0) (рис. 33).

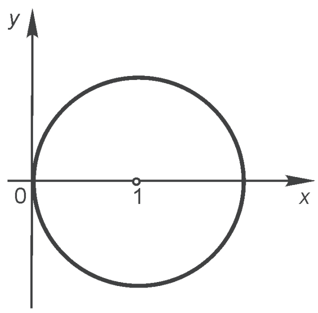


Рис. 33

Перейдемо до полярної системи координат, покладемо $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тоді рівняння межі області набуває вигляду

$$\rho = 2\cos\varphi, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Обчислимо заданий інтеграл:

$$\iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dxdy = \iint\limits_\Delta \rho^2\,\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^3 d\rho = \frac{1}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^4\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \frac{16}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

6.5. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Нехай функція $f(x,y)$ визначена і неперервна у деякій замкненій обмеженій області D. Тоді для функції $f(x,y)$ існує подвійний інтеграл

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy. \tag{6.5.4}$$

Заміну змінних в інтегралі (6.5.4) проводять, задаючи пару функцій

$$\begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y). \end{cases} \tag{6.5.5}$$

Функції (6.5.5) задають відображення області D координатної площини xOy у деяку область Δ координатної площини uOv. Ці функції вибирають так, щоб відображення області D у область Δ було взаємно однозначним, а область Δ мала простий вигляд.

Далі із системи (6.5.5) знаходять x та y, тобто будують відображення, обернене до відображення (6.5.5):

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v). \end{cases} \tag{6.5.6}$$

Якщо область Δ розбити на частини координатними прямими $u = \text{const}$ і $v = \text{const}$, то область D буде розбито на частини лініями (рис. 34)

$$\begin{cases} x = x(u,c), \\ y = y(u,c) \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x = x(c,v), \\ y = y(c,v). \end{cases}$$

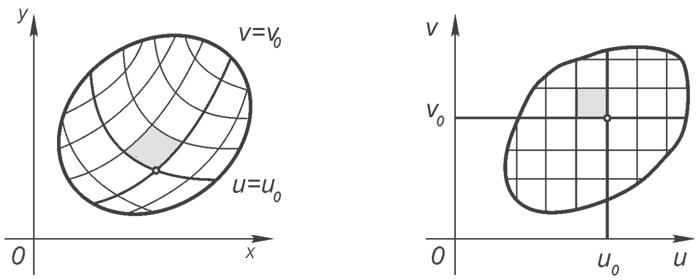


Рис. 34

При такій розбивці областей D і Δ на частини має місце із точністю до нескінченно малих другого порядку такий зв'язок між площами елементарних частин [2]:

$$dxdy = |J(u,v)|\, dudv,$$

де $dxdy$ — площа елементарної частини області D, $dudv$ — площа елементарної частини області Δ, $J(u,v)$ — визначник Якобі, або якобіан,

$$J(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \qquad (6.5.7)$$

Твердження 6.5. 1. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, а функції (6.5.6) мають неперервні частинні похідні і відмінний від нуля якобіан (6.5.7), і при цьому область D відображається у замкнену обмежену область Δ, то справджується формула заміни змінних:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Delta f(x(u,v), y(u,v))\, |J(u,v)|\, dudv. \qquad (6.5.8)$$

З а у в а ж е н н я: формула (6.5.8) заміни змінної у подвійному інтегралі залишається справедливою і для випадків, коли в області D якобіан (6.5.7) обертається на нуль в ізольованих точках або вздовж окремих кривих нульової площі, а підінтегральна функція має розриви.

П р и к л а д 1. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D (3x+2y)dxdy$, де область D обмежена прямими $2x-y=1$, $2x-y=8$, $x+3y=4$ і $x+3y=11$.

Р о з в ' я з а н н я. Безпосереднє обчислення цього інтеграла є досить громіздким, для зведення його до повторного інтеграла область доведеться розбити на три частини (рис. 35) і обчислювати інтеграл по кожній із них.

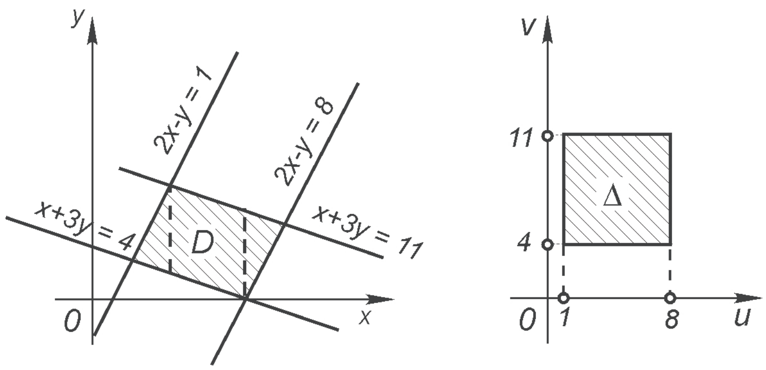


Рис. 35

Проте, неважко бачити, що заміна

$$u = 2x - y, \quad v = x + 3y \qquad (6.5.9)$$

значно спрощує область інтегрування: прямі $2x-y=1$ і $2x-y=8$ у системі координат xOy переходять у прямі $u=1$ і $u=8$ у системі координат uOv, а прямі $x+3y=4$ і $x+3y=11$ — у прямі $v=4$ і $v=11$. При цьому паралелограм D відображується у прямокутник Δ (рис. 35).

[2]Див. [?], с. 274 - 287.

Відображення (6.5.9) є взаємно однозначним. Із рівностей (6.5.9) знаходимо x і y:

$$x = \frac{3u+v}{7}, \quad v = \frac{-u+2v}{7}. \tag{6.5.10}$$

Знаходимо якобіан перетворення (6.5.10):

$$J(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{vmatrix} = \frac{1}{7}.$$

І, нарешті, застосовуємо формулу (6.5.8):

$$\iint\limits_D (3x+2y)dxdy = \iint\limits_\Delta (u+v)\cdot\frac{1}{7}dudv = \frac{1}{7}\int\limits_4^{11} dv \int\limits_1^8 (u+v)du =$$

$$= \frac{1}{7}\int\limits_4^{11}\left(\frac{u^2}{2}+vu\right)\Bigg|_{u=1}^{u=8} dv = \frac{1}{7}\int\limits_4^{11}\left(\frac{63}{2}+7v\right)dv = \frac{588}{7} = 84.$$

Якщо у подвійному інтегралі підінтегральна функція або рівняння межі області містять суму x^2+y^2, то доцільно перейти до полярної системи координат. Розглядаючи формули

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \tag{6.5.11}$$

переходу від декартової до полярної системи координат як заміну змінної, знаходимо якобіан відображення (6.5.11):

$$J(\rho,\varphi) = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho. \tag{6.5.12}$$

Якщо розглядати ρ і φ як *декартові* координати на площині $\rho O\varphi$, то знаходимо, що якобіан (6.5.12) обертається на нуль вздовж прямої $\rho = 0$, що є лінією нульової площі. Тобто формула (6.5.8) заміни змінної справджується і для перетворення (6.5.11):

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_\Delta f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi, \tag{6.5.13}$$

де область Δ — прообраз області D при відображенні (6.5.11).

Звертаємо увагу, що формула (6.5.13) збігається із формулою (6.4.3), яка була нами отримана з дещо інших міркувань.

Підкреслимо, що заміна змінної у подвійному інтегралі на відміну від заміни змінної у визначеному інтегралі має на меті спрощення області інтегрування, а не підінтегральної функції.

Якщо область інтегрування являє собою круг радіуса R із центром на початку координат

$$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant R^2\},$$

то при заміні (6.5.11) його прообразом є прямокутник (рис. 36)

$$\Delta = \{(\rho,\varphi) : 0 \leqslant \rho \leqslant R, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}.$$

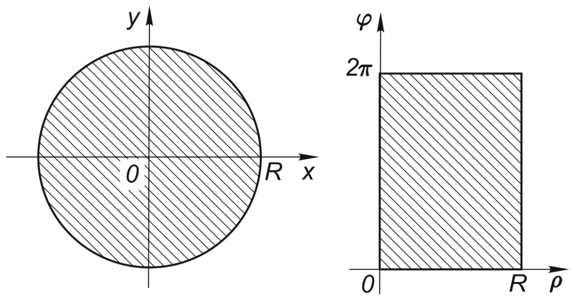


Рис. 36

Якщо область інтегрування являє собою еліпс

$$D = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1 \right\},$$

то доцільно скористатися заміною

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Якобіан цього відображення дорівнює $J(\rho, \varphi) = ab\rho$, а область Δ — прямокутник

$$\Delta = \{(\rho, \varphi) : 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}.$$

При розв'язанні прикладів із заміною змінних область Δ не будують. Зазвичай встановлюють межі інтегрування, використовуючи вигляд області D на площині xOy (див. приклад 1, с. 86).

6.6. Застосування подвійного інтеграла.

1. Об'єм тіла. Виходячи з геометричного змісту подвійного інтеграла, знаходимо, що об'єм тіла, обмеженого знизу поверхнею $z = f_1(x, y)$, зверху — поверхнею $z = f_2(x, y)$ $(f_1(x, y) \leqslant f_2(x, y),\ (x, y) \in D)$, а з боків — циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz і проходять через межу області D обчислюється за формулою:

$$V = \iint\limits_D (f_2(x, y) - f_1(x, y))\, dxdy. \tag{6.6.14}$$

Приклад 1. Обчислити об'єм тіла, обмеженого координатними площинами та площиною $2x + 3y + 4z = 12$.

Розв'язання.

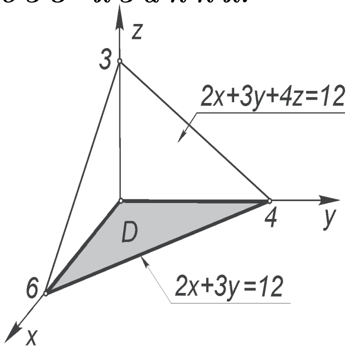


Рис. 37

Тіло являє собою піраміду, основою якої є трикутник, що лежить в площині xOy, обмежений прямою

$$2x + 3y = 12$$

та осями Ox і Oy (рис. 37). Знаходимо об'єм тіла:

$$V = \iint\limits_D \left(3 - \frac{x}{2} - \frac{3y}{4}\right) dxdy =$$

$$= \int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{4-\frac{2x}{3}} \left(3 - \frac{x}{2} - \frac{3y}{4}\right) dy = \int\limits_0^6 \left(3y - \frac{xy}{2} - \frac{3y^2}{8}\right)\Big|_0^{4-\frac{2x}{3}} dx =$$

$$= \int\limits_0^6 \left(6 - 2x + \frac{x^2}{6}\right) dx = 12.$$

П р и к л а д 2. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2 + y^2$, $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $(z \geqslant 0)$.

Р о з в ' я з а н н я. Задані поверхні та обмежене ними тіло зображені на рис. 38. Проекція тіла на площину xOy — це область, обмежена проекцією лінії перетину заданих поверхонь:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2. \end{cases}$$

Виключивши із цих рівнянь змінну z, знаходимо проекцію лінії перетину на площину xOy:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Отже, межа області D - проекції тіла на площину xOy — це круг радіуса 1 із центром на початку координат.

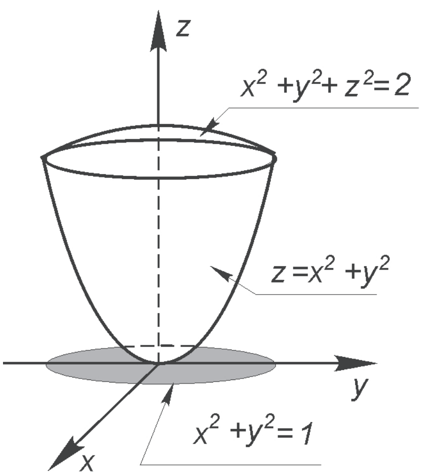


Рис. 38

Знайдемо об'єм тіла. Скористаємося формулою (6.6.14), враховуючи при цьому, що $f_1(x,y) = x^2 + y^2$, а $f_2(x,y) = = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$:

$$V = \iint\limits_D \left(\sqrt{2 - x^2 - y^2} - (x^2 + y^2)\right) dxdy.$$

Обчислення інтеграла проведемо у полярній системі координат:

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(\sqrt{2 - \rho^2} - \rho^2\right) \rho \, d\rho.$$

Звертаємо увагу, що внутрішній інтеграл не залежить від змінної φ, за якою проводиться зовнішнє інтегрування. У такому випадку повторний інтеграл дорівнює добутку визначених інтегралів:

$$V = 2\pi \int\limits_0^1 \left(\sqrt{2 - \rho^2} - \rho^2\right) \rho \, d\rho = 2\pi \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1\right) = \frac{8\sqrt{2} - 7}{12}.$$

2. Площа плоскої області. Площа S області D, що лежить в площині xOy, може бути обчислена за формулою

$$S = \iint\limits_D dxdy. \tag{6.6.15}$$

П р и к л а д 3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ і $x = y^2$.

Р о з в ' я з а н н я. Задані криві та обмежена ними фігура зображені на рис. 39. Площа фігури, обмеженої заданими кривими, дорівнює

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 (\sqrt{x} - x^2) \, dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

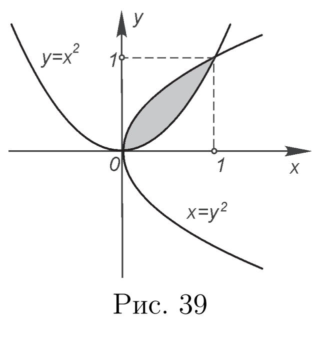


Рис. 39

П р и к л а д 4. Обчислити площу, обмежену лінією

$$\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2.$$

Р о з в ' я з а н н я. Оскільки змінні x та y входять до рівняння кривої у парних степенях, то робимо висновок, що крива є симетричною відносно координатних осей і координатні осі розбивають фігуру на чотири рівні частини. Знайдемо площу однієї з них — частини фігури, розташованої у першій четверті координатної площини. Тоді

$$S=\iint\limits_D dxdy=4\iint\limits_{D_1} dxdy,$$

D_1 — та частина фігури, що лежить у перші четверті. Подвійний інтеграл обчислимо в полярній системі координат. Замінимо $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ і отримаємо рівняння кривої в полярній системі координат:

$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2 \Leftrightarrow \rho^4=\rho^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi) \Leftrightarrow \rho^2=\cos 2\varphi \Leftrightarrow \rho=\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Криву зображено на рис. 40. Межі інтегрування за змінною φ для області D_1 знаходимо, розв'язуючи систему нерівностей:

$$\begin{cases}\cos 2\varphi \geqslant 0,\\ 0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}.$$

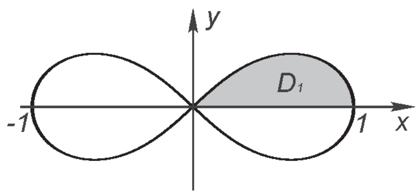


Рис. 40

Отже,

$$S=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}}\rho\,d\rho=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi\,d\varphi=1.$$

3. Площа поверхні. Площа поверхні $z=f(x,y)$, вирізаної циліндром, твірні якого паралельні осі Oz і проходять через межу області D обчислюється за формулою:

$$S_{\text{поверхні}}=\iint\limits_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy. \qquad (6.6.16)$$

П р и к л а д 5. Обчислити площу частини конічної поверхні $z^2=x^2+y^2$, $(z\geqslant 0)$, вирізаної циліндром $x^2+y^2-2y=0$.
Р о з в ' я з а н н я. Конічна поверхня для $z\geqslant 0$, її частина, вирізана циліндром, та проекція цієї частини на площину xOy зображені на рис. 41.

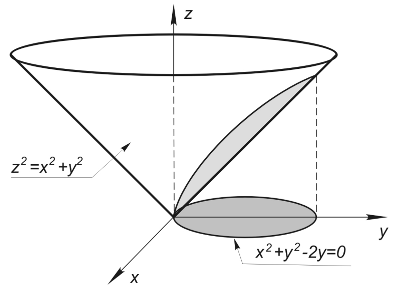


Рис. 41

Із рівняння конічної поверхні виразимо z: $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Далі скористаємося формулою (6.6.16):

$$S_{\text{поверхні}}=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dx\,dy=\iint\limits_D\sqrt{2}\,dx\,dy.$$

Область D обмежена лінією $x^2+y^2-2y=0$, канонічне рівняння якої має вигляд: $x^2+(y-1)^2 = 1$. Враховуючи, що область D — круг радіуса 1, знаходимо, що

$$S_{\text{поверхні}} = \sqrt{2} S_{\text{області } D} = \sqrt{2}\,\pi.$$

4. Маса і статичні моменти пластини. Нехай пластина займає область D площини xOy, і $\gamma(x,y)$ — густина матеріалу пластини в точці (x,y). Тоді маса m пластини і її статичні моменти M_x і M_y відносно осей Ox та Oy виражаються подвійними інтегралами

$$m = \iint\limits_D \gamma(x,y)\,dx\,dy, \quad M_x = \iint\limits_D y\gamma(x,y)\,dx\,dy, \quad M_y = \iint\limits_D x\gamma(x,y)\,dx\,dy. \tag{6.6.17}$$

Якщо пластина однорідна, то $\gamma(x,y) = \text{const}$.

5. Координати центра ваги пластини. Нехай точка $C(\overline{x},\overline{y})$ —центр ваги пластини. Тоді

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m}, \quad \overline{y} = \frac{M_x}{m}, \tag{6.6.18}$$

де m — маса пластини, M_x і M_y — її статичні моменти відносно координатних осей. Якщо пластина однорідна, то у формулах (6.6.17) можна покласти $\gamma(x,y) = 1$.

6. Моменти інерції пластини. Моменти інерції пластини відносно осей Ox і Oy відповідно дорівнюють

$$I_x = \iint\limits_D y^2\gamma(x,y)\,dx\,dy, \quad I_y = \iint\limits_D x^2\gamma(x,y)\,dx\,dy. \tag{6.6.19}$$

Момент інерції пластини відносно початку координат дорівнює

$$I_O = \iint\limits_D (x^2+y^2)\gamma(x,y)\,dx\,dy = I_x + I_y. \tag{6.6.20}$$

П р и к л а д 6. Пластина являє собою круговий сектор із кутом 90° при вершині. Густина матеріалу сектора дорівнює відстані точки сектора до його вершини. Знайти центр ваги пластини та її моменти інерції відносно сторін сектора та його вершини.

Р о з в ' я з а н н я. Помістимо сектор у декартову систему координат так, як це показано на рис. 42. Тоді густина матеріалу пластини описується функцією $\gamma(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Обчислення проведемо у полярній системі координат.

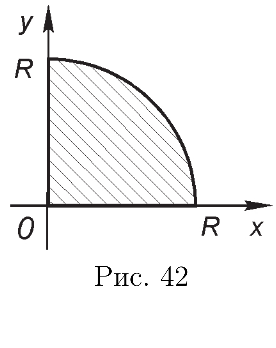


Рис. 42

Знайдемо масу пластини:

$$m = \iint\limits_D \gamma(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D \rho\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi = = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R \rho^2 d\rho = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{R^3}{3}.$$

Обчислимо статичні моменти пластини відносно координатних осей:

$$M_x = \iint\limits_D y\gamma(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D \rho\sin\varphi\cdot\rho\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^R \rho^3 d\rho = -\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^R = \frac{R^4}{4};$$

$$M_y = \iint\limits_D x\gamma(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D \rho\cos\varphi\cdot\rho\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^R \rho^3 d\rho = \frac{R^4}{4}.$$

Знаходимо координати центра ваги пластини:

$$\overline{x} = \overline{y} = \frac{R^4}{4}\cdot\frac{2\cdot 3}{\pi R^3} = \frac{3R}{2\pi},$$

тобто центр ваги пластини знаходиться на бісектрисі кута сектора на відстані $\dfrac{3R}{\sqrt{2}\,\pi}$ від його вершини.

Обчислимо моменти інерції пластини відносно координатних осей:

$$I_x = \iint\limits_D y^2\gamma(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D \rho^2\sin^2\varphi\cdot\rho\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi \int\limits_0^R \rho^4 d\rho = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{R^5}{5};$$

$$I_y = \iint\limits_D x^2\gamma(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D \rho^2\cos^2\varphi\cdot\rho\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{R^5}{5}.$$

Момент інерції пластини відносно початку координат дорівнює

$$I_O = I_x + I_y = \frac{\pi R^5}{10}.$$

6.7. Розв'язання задач засобами Maple

Приклад 1. Обчислити повторний інтеграл

$$\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^1 (x^2+2y)dx.$$

Розв'язання.

```
> restart;
> int(int(x^2+2*y,x=0..1),y=0..2);
```

$$\frac{14}{3}$$

Відповідь: $\dfrac{14}{3}$.

Приклад 2. Обчислити повторний інтеграл

$$\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy.$$

Розв'язання.

```
> restart;
> int(int(x^2/y^2,y=1/x..x),x=1..2);
```

Warning, unable to determine if 0 is between 1/x and x; try to use assumptions or use the AllSolutions option

$$\frac{9}{4}$$

Врахуємо побажання Maple щодо обмежень на змінну x:

```
> assume(x>1);int(int(x^2/y^2,y=1/x..x),x=1..2);
```

$$\frac{9}{4}$$

Відповідь: $\frac{9}{4}$.

Приклад 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(S)} xdxdy$, де область інтегрування S обмежена прямою, що проходить через точки $A(2;0)$, $B(0;2)$ і дугою кола з центром у точці $C(0;1)$ радіуса 1 (рис. 43).

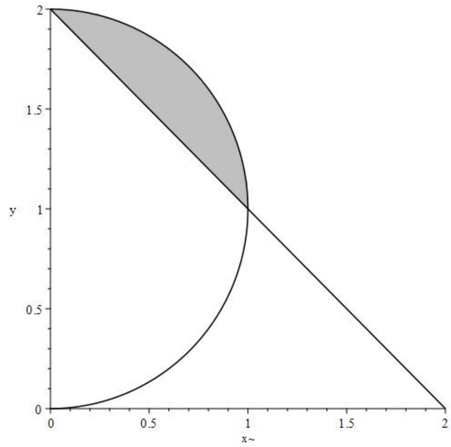


Рис. 43

Розв'язання. Задані коло і пряма мають відповідно рівняння

$$x^2 + (y-1)^2 = 1, \quad x + y = 2.$$

Неважко бачити, що коло і пряма перетинаються в точках $(0;2)$ і $(1;1)$. Зводимо подвійний інтеграл до повторного:

$$\iint\limits_{(S)} xdxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{2-x}^{1+\sqrt{1-x^2}} xdy$$

Проведемо необхідні обчислення:

```
> restart;
> int((int(x,y=2-x..1+sqrt(1-x^2))),x=0..1);
```

$$\frac{1}{6}$$

Відповідь: $\frac{1}{6}$.

Приклад 4. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(S)} \sqrt{xy-y^2}dxdy$, де S — трикутник $O(0;0)$, $A(10;1)$ і $B(1;1)$.

Розв'язання. Будуємо область S:

```
> restart;
> plot([x/10,x,1],x=-1..11,y=-0.2..1.2);
```

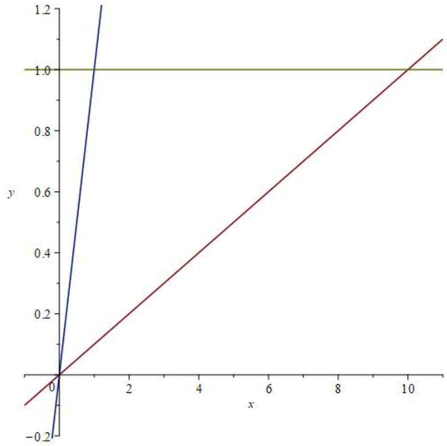


Рис. 44

Зводимо подвійний інтеграл до повторного. Очевидно, що зовнішнє інтегрування доцільно провести за змінною y.

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{xy - y^2}dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{10y} \sqrt{xy - y^2}dx.$$

```
> int(int(sqrt(x*y-y^2),x=y..10*y),y=0..1);
```

$$6$$

Відповідь: 6.

Приклад 5. Обчислити подвійний інтеграл від функції $f(\rho,\varphi) = \rho$ по області, обмеженій кардіоїдою $\rho = a(1+\cos\varphi)$ і колом $\rho = a$. Мається на увазі частина, що не містить полюса.
Розв'язання. Побудуємо область. Для побудови кривих параметру a надамо числове значення, наприклад, $a = 2$.

```
> restart;
> a:=2:plot([[a*(1+cos(t)),t,t=0..2*Pi],[a,t,t=0..2*Pi]],coords=polar);
```

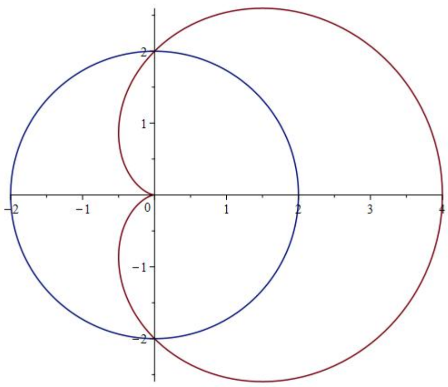


Рис. 45

Для заданої області ρ і φ змінюються в межах

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad a \leqslant \rho \leqslant a(1+\cos\varphi).$$

Зводимо подвійний інтеграл до повторного:

$$\iint\limits_{(D)} f(\rho,\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_a^{a(1+\cos\varphi)} \rho \cdot \rho d\rho.$$

Звільнимо a від числового значення і обчислимо повторний інтеграл:

```
> a:='a':int(int(\rho^2,\rho=a..a*(1+cos(t))),t=-Pi/2..Pi/2);
```

$$\frac{1}{2}a^3\pi+\frac{22}{9}a^3.$$

Відповідь : $\left(\frac{22}{9}+\frac{\pi}{2}\right)a^3.$

П р и к л а д 6. Обчислити площу, обмежену еліпсом

$$(y-x)^2+x^2=1.$$

Р о з в ' я з а н н я. Будуємо криву:

```
> restart;
> with(plots):
> implicitplot((y-x)^2+x^2=1,x=-1..1,y=-2..2);
```

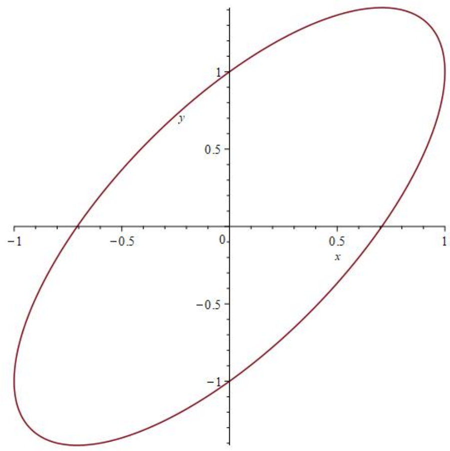


Рис. 46

Як бачимо, проекція кривої на вісь Ox являє собою відрізок $-1 \leqslant x \leqslant 1$. З рівняння кривої виразимо y:

$$y=x\pm\sqrt{1-x^2}.$$

Обчислюємо площу, обмежену кривою:

$$S=\iint\limits_{(D)}dxdy=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x-\sqrt{1-x^2}}^{x+\sqrt{1-x^2}}dy$$

```
> int(int(1,y=x-sqrt(1-x^2)..x+sqrt(1-x^2)),x=-1..1);
```

$$\pi$$

Відповідь: π.

П р и к л а д 7. Знайти площу, обмежену лініями $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $y=x$, $y=0$. Скористатися полярною системою координат.

Р о з в ' я з а н н я. Будуємо область:

```
> restart;
> inequal({y>=0,y<=x,x^2+y^2>=2*x,x^2+y^2<=4*x},x=0..4,y=0..2,color=gray);
```

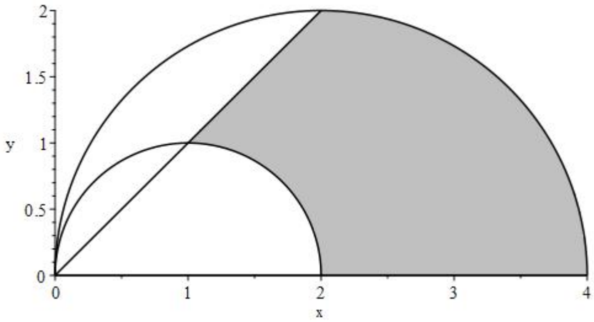


Рис. 47

Обчислюємо площу:

$$S = \iint\limits_{(D)} \rho d\rho d\varphi = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho d\rho.$$

```
> int(int(r,r=2*cos(t)..4*cos(t)),t=0..Pi/4);
```

$$\frac{3}{2} + \frac{3\pi}{4}.$$

Відповідь: $3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$.

П р и к л а д   8. Знайти об'єм тіла, обмеженого еліптичним параболоїдом $z = 2x^2 + y^2 + 1$, площиною $x + y = 1$ і координатними площинами.
Р о з в ' я з а н н я. Тіло зображене на рис. 48.

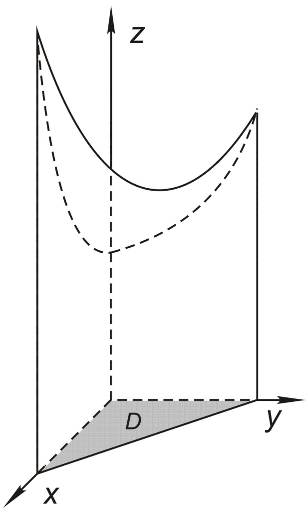


Рис. 48

Об'єм тіла V знаходимо як подвійний інтеграл

$$V = \iint\limits_{(D)} (2x^2 + y^2 + 1) dx dy,$$

де область D — трикутник у площині xOy, утворений прямою $x + y = 1$ і координатними осями.

Обчислюємо об'єм:

```
> V:=int(int(2*x^2+y^2+1,y=0..1-x),x=0..1);
```

$$V := \frac{3}{4}.$$

Відповідь: $\frac{4}{3}$.

В п р а в и .

1. Обчислити $\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$, якщо область D обмежена прямою $x+y=1$ і осями координат.

Відповідь: $\dfrac{1}{3}$.

2. Обчислити $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, якщо область D обмежена лініями $y=x$, $xy=1$, $x=2$ і $y=0$.

Відповідь: $\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{2}\ln 2$.

3. Обчислити $\iint\limits_D \dfrac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$, якщо область D обмежена верхньою половиною кола $x^2+y^2=1$ і віссю Ox.

Відповідь: $\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями

а) $y=3x$, $y=4x$, $x=2$, $x=4$; б) $y=2x$, $y=x^2$;

в) $x=5-y^2$, $\quad x=-4y$; г) $\begin{array}{l} y^2-6y+x^2=0, \quad y^2-8y+x^2=0, \\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, \quad y=\sqrt{3}x. \end{array}$

Відповіді:

а) 6; б) $\dfrac{4}{3}$; в) 36; г) $\dfrac{7\pi}{6}$.

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+4x=0$, $\quad z=8-y^2$ і $z=0$.

Відповідь: 28π.

6. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x+y=2$, $y=\sqrt{x}$, $z=12y$ і $z=0$.

Відповідь: 5.

7. Обчислити площу частини поверхні $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, вирізаної циліндром $x^2+y^2=2$.

Відповідь: 4π.

Тема 7

Криволінійні інтеграли

7.1. Поняття простої кривої

Нехай в площині xOy задана неперервна крива AB, тобто задана пара неперервних функцій

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

визначених на деякому проміжку $[\alpha, \beta]$, і нехай значенню параметра $t = \alpha$ відповідає початкова точка A, значенню $t = \beta$ — кінцева точка B кривої AB.

Може статися так, що деяким точкам площини xOy, через які проходить крива, відповідає більше одного значення параметра $t \in [\alpha, \beta]$. Такі точки кривої називають точками самоперетину.

Якщо кожній точці площини, через які проходить крива AB, відповідає лише одне значення параметра $t \in [\alpha, \beta]$, то криву називають простою, або жордановою.

Якщо кінець і початок кривої збігаються, то криву називають замкненою. Вважається, що замкнена крива точок самоперетину не має.

Криву називають гладкою, якщо функції $x(t)$ і $y(t)$ мають неперервні похідні $x'(t)$ і $y'(t)$, які одночасно не обертаються на нуль:

$$x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Ми розглядатимемо гладкі прості криві.

7.2. Інтеграл по довжині дуги

Нехай задані проста гладка крива AB і функція $f(x, y)$, визначена на цій кривій.

Розіб'ємо криву на частини точками $M_i(x_i, y_i)$: $M_0 = A$, M_1, $\ldots$, $M_n = B$. Точки M_i поділу кривої послідовно сполучимо відрізками прямих і отримаємо ламану $AM_1 \ldots M_i M_{i+1} \ldots B$, вписану в криву AB (рис. 49). Позначимо $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$. Тоді довжина ланки $M_i M_{i+1}$ ламаної дорівнює

$$\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}.$$

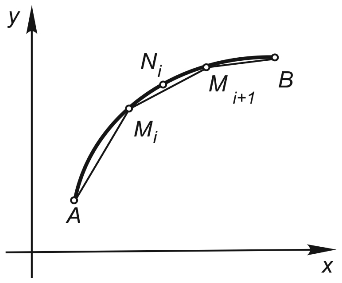


Рис. 49

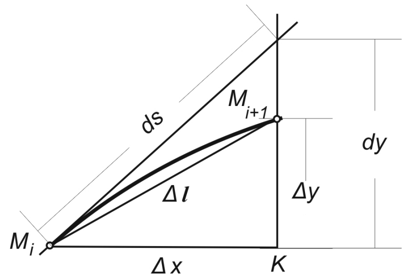


Рис. 50

Нехай $\lambda = \max\limits_i \Delta l_i$. Збільшимо n кількість точок поділу кривої AB на частини так, щоб $\lambda \to 0$, коли $n \to \infty$. Якщо при цьому існує границя

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k,$$

то криву називають *с п р я м н о ю*, а границю s — довжиною дуги кривої AB. Позначимо через Δs_i довжину дуги частини $M_i M_{i+1}$ кривої AB. Якщо крива жорданова, то $\Delta s_i \approx \Delta l_i$.

Означення 36. *Головну лінійну частину ds приросту Δs довжини дуги називають д и ф е р е н ц і а л о м д о в ж и н и д у г и:*

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Геометричний зміст диференціала довжини дуги показано на рис. 50.

У кожній частині $M_i M_{i+1}$ гладкої жорданової кривої AB виберемо довільну точку $N_i(\xi_i, \eta_i)$ і утворимо суму $\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(N_i)\Delta s_i$.

Означення 37. *Якщо існує границя*

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(N_i)\Delta s_i$$

і вона не залежить ні від способу розбивки кривої AB на частини, ні від вибору точок N_i, то її називають к р и в о л і н і й н и м і н т е г р а л о м п е р ш о г о р о д у і позначають символом

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds.$$

Властивості криволінійного інтеграла першого роду. Із побудови криволінійного інтеграла по довжині дуги випливають такі його властивості:

1°. $\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{BA} f(x,y)ds.$

2°. $\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{AC} f(x,y)ds + \int\limits_{CB} f(x,y)ds$, де C — точка кривої AB, що лежить між точками A і B.

Обчислення криволінійного інтеграла першого роду. Наведемо формули, за якими обчислюється диференціал довжини дуги в залежності від виду подання кривої.

У разі *параметричного* задання кривої $x = x(t)$, $y = y(t)$ маємо

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt. \tag{7.2.1}$$

Якщо крива задана *явно*, тобто у вигляді $y = y(x)$, то

$$ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx. \tag{7.2.2}$$

У *полярній* системі координат рівняння кривої задають у вигляді $\rho = \rho(\varphi)$. Оскільки зв'язок між декартовою та полярною системами координат задається співвідношеннями

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$$

то, посилаючись на формулу (7.2.1), знаходимо, що

$$ds = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi. \tag{7.2.3}$$

У залежності від способу задання кривої обчислення криволінійного інтеграла першого роду зводиться до обчислення відповідного визначеного інтеграла:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt, \tag{7.2.4}$$

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx, \tag{7.2.5}$$

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi. \tag{7.2.6}$$

7.3. Інтеграл по координатам

7.3.1. Основні поняття

Нехай на кривій AB задані дві обмежені функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$. Розіб'ємо криву AB у напрямку від A до B послідовно точками $A = M_0, M1\ , \ldots, M_i, M_{i+1}, \ldots, M_n = B$ (рис. 51).

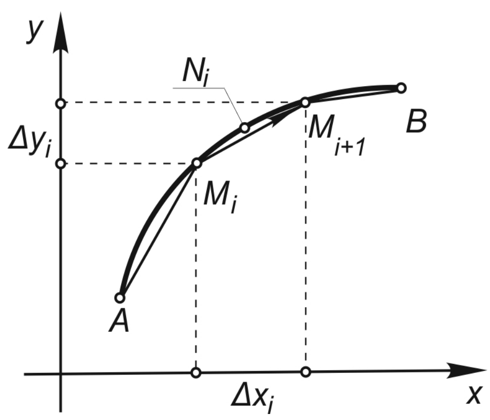


Рис. 51

На кожній з дуг M_iM_{i+1} кривої AB виберемо точку N_i. Проекції вектора $\overrightarrow{M_iM_{i+1}}$ на координатні осі позначимо через Δx_i і Δy_i. Позначимо $\lambda = \max\limits_i \Delta l_i$, де Δl_i — довжина дуги M_iM_{i+1}.

Утворимо суму

$$\sum_{i=1}^{n} P(N_i)\Delta x_i \tag{7.3.7}$$

Означення 38. *Якщо існує скінченна границя*

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(N_i)\Delta x_i = I$$

і вона не залежить від способу розбивки кривої на частини і вибору точок N_i, то її називають криволінійним інтегралом другого роду і позначають символом

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx.$$

Аналогічно вводиться поняття інтеграла

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy.$$

Суму цих інтегралів

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy$$

називають *загальним інтегралом другого роду.*

7.3.2. Фізичний зміст

З погляду фізики криволінійний інтеграл другого роду вздовж деякої кривої дорівнює роботі змінної сили при переміщенні матеріальної точки вздовж цієї кривої.

Інтеграл

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$$

– це робота, виконана силою $\boldsymbol{F} = (P,Q)$ по переміщенню точки вздовж кривої AB із положення A в положення B.

7.3.3. Властивості інтеграла другого роду

Із означення криволінійного інтеграла другого роду випливають такі його властивості

1. $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = -\int\limits_{BA} Pdx + Qdy;$
2. $\int\limits_{ABC} Pdx + Qdy = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy + \int\limits_{BC} Pdx + Qdy.$

7.3.4. Обчислення інтеграла другого роду

Зведемо криволінійний інтеграл другого роду до визначеного інтеграла. Нехай крива AB задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, де функції $x(t)$ та $y(t)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$ неперервні разом із своїми похідними $x'(t)$ та $y'(t)$, причому точці A кривої відповідає параметр α, а точці B — параметр β.

Тоді

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big[P\left(x(t), y(t)\right) x'(t) + Q\left(x(t), y(t)\right) y'(t)\Big] dt$$

Зокрема, якщо крива AB задана рівнянням $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, де функція $y(x)$ і її похідна $y'(x)$ неперервні на проміжку $[a; b]$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} \Big[P\left(x, y(x)\right) + Q\left(x, y(x)\right) y'(x)\Big] dx.$$

Аналогічно, якщо крива AB задана рівнянням $x = x(y)$, $c \leqslant t \leqslant d$, причому функції $x(y)$ та $x'(y)$ неперервні на проміжку $[c; b]$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{c}^{d} \Big[P\left(x(y), y\right) x'(y) + Q\left(x(y), y\right)\Big] dy.$$

Поняття криволінійного інтеграла другого роду можна поширити на просторові криві. Нехай функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ визначені і неперервні на просторовій кривій AB, яку задано рівняннями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \ \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

де функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ і їхні похідні $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ неперервні на проміжку $[\alpha; \beta]$. Тоді існує криволінійний інтеграл

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

і справджується формула

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]dt$$

7.3.5. Інтеграли по замкненому контуру

Додатним напрямком обходу замкненого контуру вважається напрямок «проти годинникової стрілки», тобто напрямок, у якому при обході контуру область, обмежена замкненим контуром, знаходиться ліворуч від спостерігача

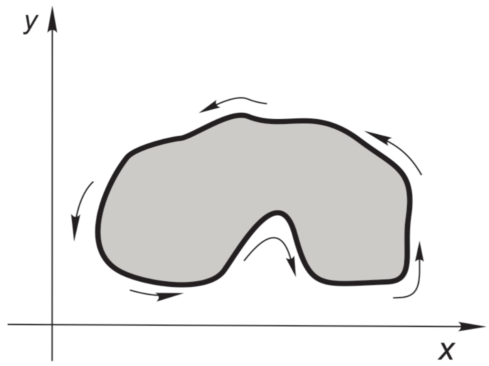


Рис. 52

Криволінійні інтеграли по додатно орієнтованому замкненому контуру C познача-ють так:

$$\oint\limits_C Pdx + Qdy$$

Від'ємний напрямок обходу позначають, зазвичай, індексом "$-$" біля символу, що позначає криву:

$$\oint\limits_{C^-} Pdx + Qdy$$

7.4. Формула Гріна

Нехай D – правильна замкнена область, обмежена кусково-гладким контуром C. І нехай у цій області визначені функції $P(x, y)$ і $Q(x, y$, які в D є неперервними разом зі своїми частинними похідними $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ і $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Тоді справджується формула

$$\oint\limits_C Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

П р и к л а д 1. Обчислити інтеграл

$$\oint\limits_C xdy - ydx,$$

де C – коло $x^2 + y^2 = R^2$.

Розв'язання. Обчислення проведемо в два способи: безпосередньо і застосовуючи формулу Гріна.

Безпосереднє обчислення: рівняння кривої задамо у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = R\cos t; \\ y = R\sin t. \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Тоді

$$\oint\limits_C xdy - ydx = \int\limits_0^{2\pi} (R\cos t \cdot R\cos t - R\sin t \cdot (-R\sin t))\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} R^2 \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) dt = R^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R^2$$

Обчислимо інтеграл за формулою Гріна. Оскільки $P = -y$, $Q = x$, то

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2.$$

Маємо таку низку рівностей:

$$\oint_C xdy - ydx = \iint_D 2dxdy = 2S_D = 2\pi R^2,$$

де D – круг, обмежений колом C, S_D – площа круга D.

7.5. Умова незалежності інтеграла від шляху інтегрування

Означення 39. *Область називають однозв'язною, якщо її межа складається із однієї кусково-гладкої кривої без точок самоперетину* Тобто, область є однозв'язною, якщо вона не містить «дірок». Наприклад, замкнена область $x^2+y^2 \leq 4$ є однозв'язною, а множина $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ такою не є – її межа складається із двох не пов'язаних між собою кіл (або в середині зовнішнього кола є «дірка» – круг одиничного радіуса).

Теорема 28. *Нехай функції $P(x, y)$ з $Q(x, y)$ визначені і неперервні разом із своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в деякій замкненій однозв'язній області D. Тоді наступні чотири умови еквівалентні, тобто виконання якої-небудь однієї з них тягне за собою виконання останніх трьох:*

1) для довільної замкненої кусково-гладкої кривої, що належить області D,

$$\oint_C Pdx + Qdy = 0;$$

2) для довільних двох точок A та B області D значення інтеграла

$$\int_{AB} Pdx + Qdy$$

не залежить від форми шляху інтегрування, який лежить в області D;

3) вираз

$$Pdx + Qdy$$

є повним диференціалом деякої функції, визначеної в області D. Іншими словами, існує така функція $U(x, y)$, визначена в області D, що

$$dU = Pdx + Qdy;$$

4) в усіх точках області D виконується рівність

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

7.6. Застосування криволінійного інтеграла

7.6.1. Обчислення площі криволінійним інтегралом

Площу правильної області D, обмеженої кусково-гладкою замкненою кривою C, обчислюють за формулами

$$S = -\oint_C ydx,$$

або

$$S = \oint_C xdy.$$

Із цих двох формул маємо ще одну формулу для обчислення площі

$$S = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx.$$

П р и к л а д 1. Обчислити площу, обмежену еліпсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Розв'язання. Рівняння еліпса подамо у параметричному вигляді

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t. \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

і скористаємося формулою

$$S = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t \cdot b\cos t - b\sin t \cdot (-a\sin t)dx)\,dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

7.6.2. Обчислення роботи

П р и к л а д 2. Знайти работу сили, спрямованої до початку координат, величина якої дорівнює відстані точки до початку координат, якщо точка, до якої прикладена сила, описує проти годинникової стрілки чверть еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, що лежить у першому квадранті.

Р о з в ' я з а н н я. Робота, виконана силою $\mathbf{F} = (P, Q)$ по переміщенню точки вздовж кривої AB із положення A в положення B, обчислюється за формулою

$$A = \int_{AB} Pdx + Qdy.$$

За умовою сила $\mathbf{F}$ має вигляд $\mathbf{F} = (-x, -y) \cdot k$, де $k > 0$ – коефіцієнт такий, що $|\mathbf{F}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Звідси знаходимо, що $k = 1$, $\mathbf{F} = (-x, -y)$. Тоді

$$A = -\int_{AB} xdx + ydy.$$

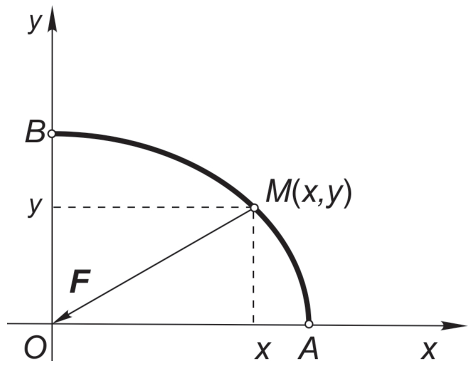


Рис. 53

Розглянемо ще один спосіб обчислення цього інтеграла. Звертаємо увагу, що інтеграл $\int\limits_{AB} xdx + ydy = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ не залежить від шляху інтегрування: $P = x$, $Q = y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$. Тому за шлях інтегрування можна вибрати будь-який шлях, який сполучає точки A і B. Сполучимо початкову і кінцеву точки кривої ламаною AOB (рис. 28):

$$\int\limits_{AB} xdx + ydy = \int\limits_{AOB} xdx + ydy = \int\limits_{a}^{0} xdx + \int\limits_{0}^{b} ydy = -\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Отже, маємо

$$A = -\int\limits_{AB} xdx + ydy = \frac{a^2 - b^2}{2}.$$

7.6.3. Відновлення функції за її диференціалом

Якщо функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ та їхні частинні похідні $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ і $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ є неперервними у деякій замкненій області D, то вираз

$$Pdx + Qdy$$

є повним диференціалом деякої функції тоді і лише тоді, коли

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Нехай функція $U(x, y)$ задана своїм диференціалом

$$dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Її можна відновити (знайти) із точністю до сталого доданка: очевидно, що функції $F(x, y) = U(x, y) + C$, де C - довільна стала, мають один і той самий диференціал. Для відшукання функції $U(x, y)$ візьмемо в D дві точки — деяку фіксовану точку $M_0(x_0, y_0)$ і поточну точку $M(x, y)$, сполучимо їх яким-небудь шляхом, що не виводить за межі області D, і розглянемо інтеграл вздовж цього шляху:

$$\int\limits_{M_0M} Pdx + Qdy.$$

В силу умови (1) цей інтеграл не залежить від шляху інтегрування:

$$\int\limits_{M_0M} Pdx + Qdy = \int\limits_{M_0}^{M} Pdx + Qdy = \int\limits_{M_0}^{M} dU = U|_{M_0}^{M} = U(x,y) - U(x_0,y_0) = U(x,y) + C \tag{7.6.8}$$

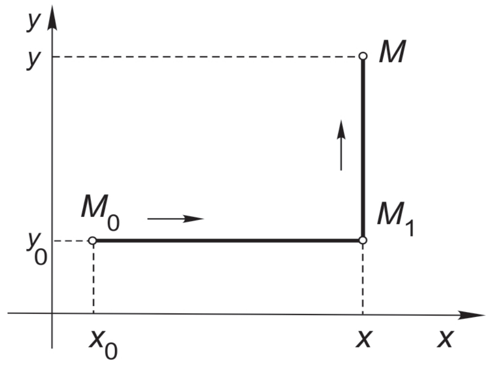


Рис. 54

П р и к л а д 3. Перевірити, чи є вираз $(3x^2 - 2xy + y^2)dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)dy$ повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, і, якщо це так, знайти цю функцію.
Р о з в ' я з а н н я. У даному виразі функції $P = 3x^2 - 2xy + y^2$, $Q = -x^2 + 2xy - 3y^2$ є неперервними разом із своїми частинними похідними

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2x + 2y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x + 2y$$

Оскільки виконується рівність

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

то заданий вираз є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$.

Для відшукання функції $u(x,y)$ скористаємося формулою (7.6.8). За початкову точку M_0 для зручності візьмемо точку $(0,0)$, і сполучимо її з точкою $M(x,y)$ ламаною (див. рис. 54, $x_0 = 0,\ y_0 = 0$)

$$\int\limits_{M_0}^{M} Pdx + Qdy = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} (3x^2 - 2xy + y^2)dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)dy =$$

$$= \int\limits_{0}^{x} 3x^2dx - \int\limits_{0}^{y} (x^2 - 2xy + 3y^2)dy = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$$

Отже,

$$u(x,y) = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 + C,$$

де C – довільна стала.

Вкажемо ще один можливий спосіб відшукання функції за її диференціалом. У виразі

$$Pdx + Qdy = du$$

$$P = \frac{\partial u}{\partial x},\ Q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

За відомою похідною $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ знаходимо функцію u:

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y).$$

Тут $\varphi(y)$ – невідома функція (стала інтегрування, при диференціюванні за змінною x щезають доданки, залежні від y). Для відшукання невідомої функції $\varphi(y)$ візьмемо похідну по y від отриманої функції $u(x,y)$ і прирівняємо її до Q:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right) + \varphi'(y) = Q(x,y).$$

Із останньої рівності знаходимо $\varphi'(y)$, а потім, після інтегрування, і саму функцію $\varphi(y)$.

Покажемо це на цьому ж прикладі:

$$du = (3x^2 - 2xy + y^2)dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)dy.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 2xy + y^2$$

$$u = \int (3x^2 - 2xy + y^2)dx + \varphi(y) = x^3 - x^2y + xy^2 + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2 + x2y + \varphi'(y) = -(x^2 - 2xy + 3y^2) \Rightarrow \varphi'(y) = -3y^2 \Rightarrow \varphi(y) = -y^3 + C,\ C = \text{const}$$

$$u = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 + C$$

7.7. Розв'язання задач засобами Maple

П р и к л а д 1. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int\limits_C \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}},$$

де C — відрізок прямої, що сполучає точки $O(0;0)$ і $A(1;2)$.

Р о з в ' я з а н н я. Рівняння прямої OA має вигляд $y = 2x$. Знаходимо ds:

$$ds = \sqrt{1+y'^2}dx = \sqrt{1+2^2}dx = \sqrt{5}dx.$$

Зводимо криволінійний інтеграла до визначеного:

$$\int\limits_C \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}} = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{x^2+4x^2+4}}$$

```
> restart;
> y:=2*x: ds:=sqrt(1+(diff(y,x))^2)*dx;
```

$$ds := \sqrt{5}dx$$

```
> int(sqrt(5)/sqrt(x^2+y^2+4),x=0..1);
```

$$\frac{\ln 5}{2} + \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)$$

Відповідь: $\ln\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Приклад 2. Обчислити масу контуру еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, якщо лінійна густина його в кожній точці $M(x,y)$ дорівнює $|y|$.
Розв'язання. Масу m кривої C знайдемо як криволінійний інтеграл

$$m=\int\limits_C \gamma(x,y)ds,$$

де $\gamma(x,y)$ — лінійна густина кривої.

Перейдемо до параметричних рівнянь еліпса: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$. Знаходимо ds:

$$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt$$

Враховуючи, що еліпс симетричний відносно координатних осей, знайдемо масу його частини, що лежить у першому квадранті, і помножимо її на 4:

$$m=4\int\limits_0^{\pi/2} b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt=4b\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{a^2(1-\cos^2 t)+b^2\cos^2 t}\sin tdt.$$

Не порушуючи загальності міркувань, можемо вважати, що $a>b$. Тоді

$$m=4b\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}\sin tdt=4b\sqrt{a^2-b^2}\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}-\cos^2 t}\sin tdt.$$

Для скорочення запису позначимо дріб $\frac{a^2}{a^2-b^2}$ через c^2 і зробимо заміну змінних в останньому інтегралі $\cos t=z$:

$$m=4b\sqrt{a^2-b^2}\int\limits_0^1\sqrt{c^2-z^2}dz.$$

```
> assume(c>1);
> m:=4*b*sqrt(a^2-b^2)*int(sqrt(c^2-z^2),z=0..1);
```

$$m:=4b\sqrt{a^2-b^2}\left(\frac{c^2\arcsin\frac{1}{c}}{2}+\frac{\sqrt{c^2-1}}{2}\right)$$

```
> subs(c=a/sqrt(a^2-b^2),m);
```

$$4b\sqrt{a^2-b^2}\left(\frac{a^2\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}{2(a^2-b^2)}+\frac{\sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}-1}}{2}\right)$$

Спростимо отриманий вираз:

$$m=2\left(\frac{a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}+b^2\right)$$

Відповідь: $2\left(b^2+\frac{a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$.

П р и к л а д 3. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\int\limits_{AB} (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy,$$

де AB — дуга параболи $y = x^2$ від точки $A(1;1)$ до точки $B(2;4)$.
Р о з в ' я з а н н я. Для обчислення криволінійного інтеграла у підінтегральний вираз підставляємо $y = x^2$. Отриманий вираз інтегруємо по x в межах від $x = 1$ до $x = 2$:

```
> restart;
> y:=x^2:
> int((x^2-2*x*y)+(2*x*y+y^2)*diff(y,x),x=1..2);
```

$$\frac{1219}{30}$$

Відповідь: $40\frac{19}{30}$.

П р и к л а д 4. Обчислити

$$\oint\limits_{C} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2},$$

де контур C — коло $x^2 + y^2 = a^2$, напрямок обходу — проти годинникової стрілки.
Р о з в ' я з а н н я. Перейдемо до параметричного задання рівняння кола C

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$$

і обчислимо отриманий визначений інтеграл:

```
> restart;
> x:=a*cos(t):y:=a*sin(t):
> int(((x+y)*diff(x,t)-(x-y)*diff(y,t))/(x^2+y^2),t=0..2*Pi);
```

$$-2\pi$$

Відповідь: -2π.

П р и к л а д 5. Знайти первісну функцію підінтегрального виразу і обчислити інтеграл

$$\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy.$$

Р о з в ' я з а н н я.

```
> restart;
> P:=x^4+4*x*y^3:Q:=6*x^2*y^2-5*y^4:;
```

Перевіряємо умову $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$:

```
> is(diff(P,y)=diff(Q,x));
```

$$true$$

Знаходимо функцію u:

```
> u:=\int(P,x)+varphi(y);
```

$$u := \frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 + \varphi(y)$$

```
> eq:=diff(u,y)=Q;
```

$$eq := 6x^2y^2 + \frac{d}{dy}\varphi(y) = 6x^2y^2 - 5y^4$$

```
> eq:=diff(varphi(y), y)=-5*y^4;
```

$$eq := \frac{d}{dy}\varphi(y) = -5y^4$$

```
> dsolve(eq);
```

$$\varphi(y) = -y^5 + C1$$

```
> u:=(x,y)->x^5/5 + 2*x^2*y^3-y^5 + C1;
```

$$u := (x,y) \mapsto \frac{1}{5} \cdot x^5 + 2 \cdot x^2 \cdot y^3 - y^5 + C1$$

Обчислюємо значення інтеграла як приріст первісної:

```
> u(3,0)-u(-2,-1);
```

$$62$$

Відповідь: 62.

П р и к л а д 6. Через точки $A(1;0)$ і $B(2;3)$ проведені парабола AmB, віссю якої є вісь Oy, і хорда параболи AnB. Знайти

$$\oint\limits_{AmBnA} (x+y)dx - (x-y)dy$$

безпосередньо і застосовуючи формулу Гріна.

Р о з в ' я з а н н я. Рівняння хорди знайдемо як рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-0}{3-0} \;\Rightarrow\; y = 3(x-1).$$

Рівняння параболи шукатимемо у вигляді $y - y_0 = ax^2$:

$$\begin{cases} 0 - y_0 = a \cdot 1^2, \\ 3 - y_0 = a \cdot 2^2 \end{cases} \;\Rightarrow\; y_0 = -1, a = 1, \;\Rightarrow\; y + 1 = x^2.$$

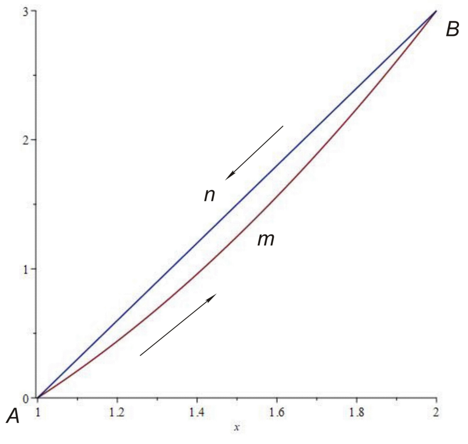


Рис. 55

```
> restart;
> P:=x+y:Q:=-x+y:
```

Задаємо рівняння кривої AmB:

```
> y:=x^2-1:
```

Обчислюємо інтеграл вздовж AmB:

```
> I_AmB:=int(P+Q*diff(y,x),x=1..2);
```

$$I\_AmB := \frac{8}{3}$$

Задаємо рівняння прямої BnA:

```
> y:=3*(x-1):
```

Обчислюємо інтеграл вздовж BnA:

```
> I_BnA:=int(P+Q*diff(y,x),x=2..1);
```

$$I\_BnA := -3$$

```
> I_AmBnA:=I_AmB+I_BnA;
```

$$I\_AmBnA := -\frac{1}{3}$$

Звільняємо змінну y:

```
> y:='y':
```

Обчислюємо інтеграл по замкненому контуру за формулою Гріна:

```
> int(int(diff(Q,x)-diff(P,y),y=x^2-1..3*(x-1)),x=1..2);
```

$$-\frac{1}{3}$$

Відповідь: $-\dfrac{1}{3}$.

Бібліографічний список

1. Каленюк П. І., Дрогомирецька Х. Т. Математичний аналіз фукнцій дійсної змінної. Львів : Львівська політехніка, 2016. 592 с.
2. Славко Г. В. Математика програмістам : навч. підруч. Кременчук : ПП Щербатих О. В., 2018. 184 с.
3. Зайцев Є. П. Вища математика : навч. посіб. Київ : Алерта, 2018. 608 с.
4. Clark J., Kapadia D. Introduction to Calculus: A Computational Approach. Wolfram Media, Inc., 2024. 538 с.
5. Stewart J., Clegg D., Watson S. Calculus. 9th ed. Brooks Cole, 2020. 1252 с.
6. Thompson I. Understanding Maple. Cambridge University Press, 2016. 235 с.

Навчальне видання

Михайлова Тетяна Федорівна, Максименкова Юлія Анатоліївна,
Нечай Ігор Вікторович

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ. РЯДИ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ.

ЧАСТИНА II

Навчальний посібник

Електронне видання

Відповідальний редактор Ю. А. Максименкова
Комп'ютерна верстка Ю. А. Максименкова
Дизайн обкладинки Ю. А. Максименкова

Експертний висновок склав канд. фіз.-мат. наук , доц. О. Гулівець

Зареєстровано НМВ УДУНТ (№ 1.829 від 18.06.2025)

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк.6,74. Обл.-вид. арк.6,82.
Зам. № 75

Видавець: Український державний університет науки і технологій.
вул. Лазаряна, 2, ауд. 2216, ауд. 263 (наукова бібліотека)
м. Дніпро, 49010.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 7709 від 14.12.2022